北京市高中数学补充教材

数列

SHUXUE

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

前　　言

高中数学是义务教育后普通高中的一门主要课程，应使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的基础知识、基本技能、基本思想和方法，培养实践能力和创新精神.

为全面提高我市高中数学学科的教学质量，全面推进素质教育，经北京市教委领导批准，北京教科院基教研中心中学数学教研室组织编写了这套高中数学补充教材，供高中数学教师和学生在教与学时参考使用.

这套补充教材力求体现课程改革的精神和要求，以《全日制普通高级中学数学教学大纲》为依据，针对高中数学的重点或难点章节及专题选编内容，既注重知识的系统性、深刻性，又加强了选择性，并适当充实了一些必要的内容，以体现高考改革的要求. 教师可根据学生的实际情况和教学需要，在必修课、选修课或课外活动中选择使用.

《北京市高中数学补充教材》主编曹福海，副主编郭立昌、刘美伦.《数列》一册的编者有：明知白、蒋佩锦、王人伟；统稿：刘美伦.

在编写过程中，我们进行了多次研究讨论，吸收了许多教师宝贵的教学经验，力求既有利于教师教，又有利于学生学. 由于我们水平有限，定会有许多不足之处，衷心期望使用本册教材的教师与学生提出宝贵意见.

编　　者

2003 年 2 月

目　　录

第一章　数列的一般概念

1.1　数列的定义

为了认识什么是数列，我们先来看下面的例子.

(1) 图 1-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层. 自上而下各层的钢管数排列成一列数：

4，5，6，7，8，9，10.

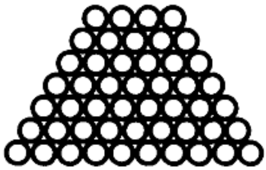

图 1-1

(2) 函数 $f(x)=-x^2+7$，当 x 依次取 1，2，3，4，…时，相应的函数值排列成一列数：

6，3，-2，-9，….

(3) 无理数 e 的精确到 1，0.1，0.01，0.001，…的不足近似值排列成一列数：

2，2.7，2.71，2.718，….

(4) -1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，…排列成一列数：

-1，1，-1，1，….

(5) 无穷多个 $\frac{1}{2}$ 排列成一列数：

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，….

像上面这些例子中，按一定次序排列的一列数叫做**数列**．数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**，各项依次叫做这个数列的第1项（或首项），第2项，…，第 n 项，….

请再举出一些数列的例子．

在一个数列中，它的每一项都有一个确定的序号（项数），序号的集合到相应项的集合构成一个映射．例如上面数列（1）：

序号	1	2	3	4	5	6	7
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
项	4	5	6	7	8	9	10

从映射、函数的观点看，数列可以看作是一个定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$）的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值．

数列有多种多样的表示方法，像以上见到的将数列中的各项依次列举出来的方法是列举法．用列举法表示数列，其一般形式是：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots.$$

也可以简记作 $\{a_n\}$．其中 a_n 是数列的第 n 项．显然 a_n 是 n 的函数，$a_n=f(n)$．

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做数列 $\{a_n\}$ 的**通项公式**．例如，上面数列（1）的通项公式是 $a_n=n+3$（$n\leqslant 7$），数列（2）的通项公式是 $a_n=-n^2+7$，数列（4）的通项公式是 $a_n=(-1)^n$ 或 $a_n=\begin{cases}-1, & n\text{是正奇数,}\\ 1, & n\text{是正偶数.}\end{cases}$ 当然也有一些数列是无法写出其通项公式的，例如上面数列（3）．

如果已知一个数列的通项公式，那么只要依次用1，2，3，…代替公式中的 n，就可以求出这个数列的各项，这就是数列的第二种表示法——通项公式表示法．

数列的第三种表示法是图像法．图1-2表示数列（1），图1-3表示数列（2）．

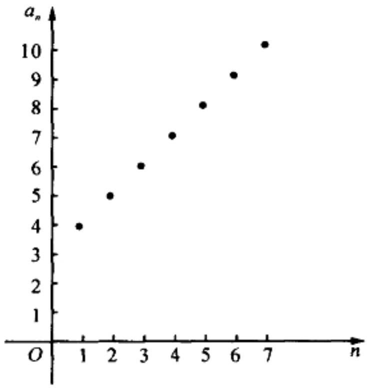

图 1-2

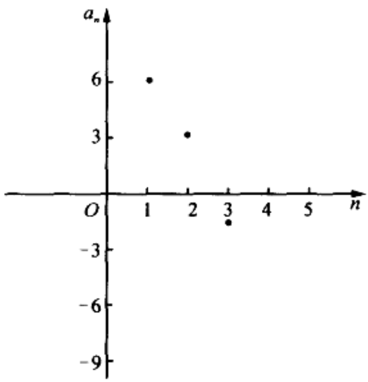

图 1-3

用图像法表示数列时，其图像是位于纵轴右方的一群孤立的点，各点的横坐标 n 表示项数，纵坐标 a_n 表示对应项的值. 为了画图方便，在两条坐标轴上取的单位长度可以不同.

例 1 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=\frac{2n+1}{2n}$;　　　(2) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$.

解：(1) 在通项公式中依次取 $n=1$，2，3，4，5，得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$\frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{6},\ \frac{9}{8},\ \frac{11}{10}.$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1$，2，3，4，5，得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}.$$

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项（或前几项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前几项）之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式. 递推公式也是给出数列的一种方法.

例 2　已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 1，且 $a_n=2a_{n-1}+1$ $(n\geqslant2)$，写出这个数列的前 5 项.

解：$a_1=1$，

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$，

$a_3=2a_2+1=2\times3+1=7$，

$a_4=2a_3+1=2\times7+1=15$，

$a_5=2a_4+1=2\times15+1=31$.

练习 1-1

1. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=-2n+1$；　　　(2) $a_n=n^2-n-1$；

(3) $a_n=\frac{(-2)^{n-1}}{2n}$；　　　(4) $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 1，且 $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{a_n}$，写出这个数列的前 5 项.

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，写出这个数列的前 6 项.

4. 已知数列：1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$. 写出数列的通项公式，并作出它的图像.

1.2 求简单数列的通项公式

简单数列的通项公式往往是研究该数列性质的基础，就像函数解析式是研究函数性质的基础一样，因而确定数列的通项公式是数列中的一个重要研究课题.

例 1 写出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{6}{5}$；

(2) -2，4，-8，16；

(3) 9，99，999，9999.

解：(1) 这个数列的前 4 项都是分数，各项的分母都是序号加 1，分子比分母大 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{n+2}{n+1}.$$

(2) 这个数列的前 4 项的绝对值都可以改写成幂的形式，底数为 2，指数是相应的序号，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式是

$$a_n=(-1)^n\cdot 2^n，或 a_n=(-2)^n.$$

(3) 这个数列的第 1 项可以改写为 $10-1$，第 2 项可以改写为 10^2-1，第 3 项可以改写为 10^3-1，…，所以它的一个通项公式是

$$a_n=10^n-1.$$

说明：(1) 由数列的前 4 项，求它的一个通项公式的关键在于仔细观察各项的特点，找出各项共同的构成规律，找出各项的值与项数之间的关系，要求由特殊到一般地作出正确的抽象和概括.

(2) 根据数列的前 4 项，得到的数列通项公式是不唯一的. 例如，例 1 (1) 中的数列通项公式还可以是

$$a_n=\frac{n+2}{n+1}+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

$$a_n=\frac{n+2}{n+1}+2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

等等.

例 2 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，$a_n=\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$，先计算 a_2，a_3，a_4 的值，再由此推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：$a_1=1$，

$$a_2=\frac{a_1}{1+a_1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

$$a_3=\frac{a_2}{1+a_2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

$$a_4=\frac{a_3}{1+a_3}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}.$$

由此推测：$a_n=\frac{1}{n}$.

练习 1-2

1. 写出数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式，使得数列的前 4 项是下列各数：

(1) $\frac{1^2+1}{2}$，$\frac{2^2+1}{3}$，$\frac{3^2+1}{4}$，$\frac{4^2+1}{5}$；

(2) $\frac{1}{2\times 3}$，$\frac{1}{3\times 4}$，$\frac{1}{4\times 5}$，$\frac{1}{5\times 6}$；

(3) $1+\frac{5}{2}$，$2+\frac{5}{3}$，$3+\frac{5}{4}$，$4+\frac{5}{5}$；

(4) 1，3，5，7；

(5) 3，5，7，9；

(6) -1，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{9}$，$\frac{1}{16}$；

(7) 2，-4，8，-16；

(8) 1，3，7，15.

2. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式：

(1) 2，4，(　　)，8，10，(　　)，14；

(2) (　　)，6，9，12，15，(　　)，21，24；

(3) 1，$\sqrt{2}$，(　　)，2，$\sqrt{5}$，(　　)，$\sqrt{7}$；

(4) $\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$，(　　)，$\frac{1}{42}$，$-\frac{1}{56}$，(　　).

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+3}$，先计算 a_2，a_3，a_4 的值，再由此推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

1.3　数列的前 n 项和

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，是指它的从第 1 项起到第 n 项的各项之和，记作 S_n.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

例如，对于正整数列：1，2，3，4，…，n，…，其前 n 项和 $S_n=1+2+3+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n}i$.

当 $n=1$ 时，S_1 表示第 1 项，$S_1=1$；

当 $n=2$ 时，S_2 表示前 2 项和，$S_2=1+2$；

当 $n=3$ 时，S_3 表示前 3 项和，$S_3=1+2+3$；

……

S_{n-2} 表示前 $n-2$ 项和，$S_{n-2}=1+2+3+\cdots+n-2$；

S_{n-1} 表示前 $n-1$ 项和，$S_{n-1}=1+2+3+\cdots+n-1$.

由此可见，S_n 也是 n 的函数，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，但是，只有 $n\geqslant2$ 时，S_{n-1} 才有意义，只有当 $n\geqslant3$ 时，S_{n-2} 才有意义.

如果已知以 n 表示的 S_n 的公式，能不能求出以 n 表示的 a_n 的公式呢？

由于$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n \quad (n\in\mathbf{N}^*)$，

$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1} \quad (n\geqslant 2)$，

于是有 $S_n-S_{n-1}=a_n$（$n\geqslant 2$）.

因此得到

$$\boldsymbol{a_n}=\begin{cases}\boldsymbol{S_1}, & \boldsymbol{n}=1,\\ \boldsymbol{S_n}-\boldsymbol{S_{n-1}}, & \boldsymbol{n}\geqslant 2.\end{cases}$$

以上关系式不仅是由 S_n 求 a_n 的公式，也是使 S_n 与 a_n 互相转化的依据.

例 1 由下面给出的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式，求出它的通项公式：

（1）$S_n=n^2+1$；（2）$S_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1$.

解：（1）$n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2+1=2$，

$n\geqslant 2$ 时，
$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2+1)-[(n-1)^2+1]\\&=2n-1,\end{aligned}$$

所以 $a_n=\begin{cases}2, & n=1,\\ 2n-1, & n\geqslant 2.\end{cases}$

（2）$n=1$ 时，$a_1=S_1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^1-1=\dfrac{1}{2}$，

$n\geqslant 2$ 时，
$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right]\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

所以 $a_n=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

说明：由于（2）中，当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1-1}=\dfrac{1}{2}$，所以 a_n 的公式可以不分段表达.

例 2 S_n 是各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，并且 $4S_n$

$=a_n(a_n+2)$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，证明 $a_n=a_{n-1}+2$ 对任意 $n\geqslant 2$ 成立.

分析： 注意作为条件和作为结论的两个等式之间的区别，可知本题证明应从把条件中的 S_n 转化成 a_n 入手.

证明： 因为 $4S_n=a_n(a_n+2)\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $4S_{n-1}=a_{n-1}(a_{n-1}+2)\ (n\geqslant 2)$.

当 $n\geqslant 2$ 时，以上两式相减得

$$4(S_n-S_{n-1})=a_n^2-a_{n-1}^2+2(a_n-a_{n-1}),$$

即 $4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2(a_n-a_{n-1})$.

化简后得 $2(a_n+a_{n-1})=a_n^2-a_{n-1}^2$.

由于 $a_n>0$，因此可得

$$a_n-a_{n-1}=2\ (n\geqslant 2),$$

即 $a_n=a_{n-1}+2\ (n\geqslant 2)$.

练习 1-3

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^3-2$，求 a_1 和 a_3 的值.
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(n+1)(n-7)$.
   (1) 求 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ 的值；
   (2) 求 $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$ 的值.
3. 由下面给出的数列的前 n 项和公式，写出它的通项公式：
   (1) $S_n=3n+2$；　　(2) $S_n=n^2-2n+2$；
   (3) $S_n=\dfrac{1}{n}$；　　(4) $S_n=\dfrac{3^n-2^n}{2^n}$.
4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，其前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\dfrac{1}{3}a_n-2\ (n\in\mathbf{N}^*)$.
   对于任意大于 1 的自然数 n，证明：
   (1) $2a_n+a_{n-1}=0$；
   (2) $2S_n+S_{n-1}=-6$.

1.4 数列的分类

数列可以按照不同的标准进行分类.

(1) 按照数列的项数，数列可分为有穷数列和无穷数列.

项数有限的数列叫做**有穷数列**，如 4，5，6，7，8，9，10. 项数无限的数列叫做**无穷数列**，如 0，1，2，3，…，n，….

在有穷数列中，它的末项与通项是有区别的. 例如，一个 $n+1$ 项的数列：

$$1，2，3，4，\cdots，n，n+1，$$

它的末项，即第 $n+1$ 项，为 $n+1$，而它的通项为 $a_n=n$ ($n\in\mathbf{N}^*$).

一个项数为 n 的有穷数列，它的末项和通项是相同的.

(2) 按照数列各项值的大小关系，数列可分为常数列、递增数列、递减数列和摆动数列.

数列 $\{a_n\}$ 各项的值都相等，即 $a_n=c$（常数），或 $a_{n+1}=a_n$，这样的数列叫做**常数列**. 如 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{2}$，….

数列 $\{a_n\}$ 各项的值逐项增大，即 $a_n<a_{n+1}$，这样的数列叫做**递增数列**. 如 1，2，3，4，…，n，….

数列 $\{a_n\}$ 各项的值逐项减小，即 $a_n>a_{n+1}$，这样的数列叫做**递减数列**. 如 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…，$\frac{1}{n}$，….

递增数列和递减数列统称**单调数列**. 数列单调性的意义与函数单调性的意义是相同的.

数列 $\{a_n\}$ 各项的值，有些项逐项增大，又有些项逐项减小，即对某些 n 有 $a_{n+1}>a_n$，对另一些 n 有 $a_{n+1}<a_n$，这样的数列叫做**摆动数列**. 如 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$，…，$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，…；

$$0，2，0，2，\cdots，1+(-1)^n，\cdots，$$

等都是摆动数列.

例 1 判断以下数列是递增数列，还是递减数列，并说明理由.

(1) 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=an+b$（a，b 是常数，$a>0$）；

(2) 在数列 $\{b_n\}$ 中，$b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 5^{n-1}$.

解：(1) 因为 $a_{n+1}-a_n=[a(n+1)+b]-(an+b)$

$$=a>0,$$

即 $\quad a_{n+1}>a_n$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

(2) 因为 $b_{n+1}-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 5^n-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 5^{n-1}$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 5^{n-1}\cdot(5-1)$$

$$=(-2)\cdot 5^{n-1}<0,$$

即 $\quad b_{n+1}<b_n$,

所以数列 $\{b_n\}$ 是递减数列.

例 2 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=19n-2^n$.

(1) 证明当 $n\leqslant 4$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是递增数列；当 $n\geqslant 5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的最大项.

(1) **证明**：$a_{n+1}-a_n=[19(n+1)-2^{n+1}]-(19n-2^n)$

$$=19-2^n(2-1)$$

$$=19-2^n.$$

当 $n=1$，2，3，4，即 $n\leqslant 4$ 时，$19-2^n>0$，即 $a_{n+1}>a_n$；

当 $n=5$，6，7，8，…，即 $n\geqslant 5$ 时，$19-2^n<0$，即 $a_{n+1}<a_n$.

因此，当 $n\leqslant 4$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是递增数列；当 $n\geqslant 5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列.

(2) 由 (1) 可得 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，

且 $\quad a_5>a_6>a_7>a_8>\cdots$.

又因为 $\quad a_5=19\times 5-2^5=63$，

于是得数列 $\{a_n\}$ 的最大项为

$$a_5=63.$$

说明：由于数列与函数的联系，这里借用了利用函数单调性求函数最值的方法来求数列的最大项.

*(3) 按照数列各项的绝对值的取值，数列可分为有界数列与无界数列.

数列 $\{a_n\}$ 的各项的绝对值都小于或等于某一正常数，即存在正常数 c，使 $|a_n|\leqslant c$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，这样的数列叫做有界

数列，否则就叫做无界数列. 例如，

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots,$$

$$-1,\ 1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots,$$

都是有界数列.

练习 1-4

1. 已知有穷数列 3，5，7，9，…，$2n+7$.

   (1) 指出这个数列共有多少项；

   (2) 写出这个数列的一个通项公式；

   (3) 指出其末项是数列的第几项.

2. 判断下面数列是递增数列，还是递减数列，并说明理由.

   (1) 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=-3n+2$；

   (2) 在数列 $\{b_n\}$ 中，$b_n=\dfrac{2n+3}{n+1}$；

   (3) 在数列 $\{c_n\}$ 中，$c_n=n^2+2n-4$；

   (4) 在数列 $\{d_n\}$ 中，$d_n=a\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$（$a$ 是非零常数）.

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=n\left(\dfrac{7}{9}\right)^{n+1}$.

   (1) 判断数列 $\{a_n\}$ 的单调性，并说明理由；

   (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的最大项的项数.

习　题　一

A　组

1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=n^2-2n$.

   (1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项；

   (2) 195 是不是数列 $\{a_n\}$ 中的项？如果是，是第几项？

   (3) 在数列 $\{a_n\}$ 中，求其值小于 24 的项共有几项，它们是哪些项？

2. 已知函数 $f(x)=4x-9$，当 x 依次取 1，2，3，…，10 时确

定一个数列，请至少用两种不同的方法把这个数列表示出来.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{qn}{pn+1}$，并且 $a_2=\frac{4}{3}$，$a_5=\frac{5}{3}$，求 p，q 的值.

4. 依下列条件，写出数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项来：

(1) $a_1=5$，$a_n-a_{n-1}=4$ $(n\geqslant 2)$；

(2) $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$；

(3) $a_1=1$，$a_{n+1}-2^{n-1}=2a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$；

(4) $a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$.

5. 写出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 4，8，12，16；

(2) $-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$-\frac{5}{8}$，$\frac{7}{16}$；

(3) $\frac{1}{4}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{7}$；

(4) $1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}-\frac{1}{4}$；

(5) 0，3，8，15；

(6) 8，88，888，8888.

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，$a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_{n-1}}\right)$ $(n\geqslant 2)$，求 a_2，a_3，a_4 的值，并由此推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，写出这个数列的前 8 项来.

8. 已知函数 $f(x)=\frac{2x}{2+x}$. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=f(2)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项；

(2) 由 (1) 推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

9. 由下面数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式，求它的通项公式：

(1) $S_n=2n^2-3n$；　　(2) $S_n=2^n+3$；