高等学校教材

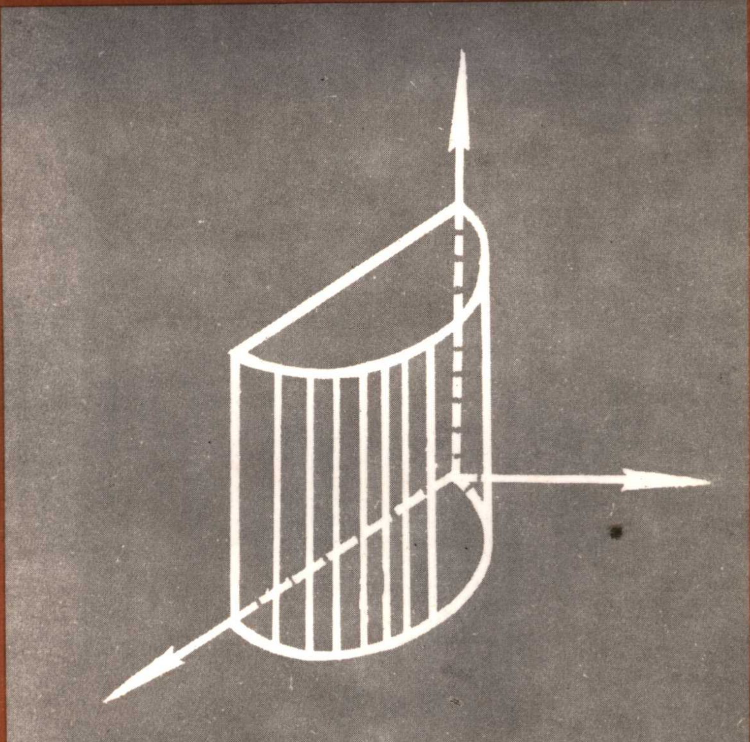
高等数学

(物理类专业用)

(第三版)

第二册

四川大学数学系高等数学教研室编



高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

（物理类专业用）

（第三版）

第二册

四川大学数学系高等数学教研室　编

高等教育出版社

内容提要

本书是四川大学数学系高等数学教研室编《高等数学》第二册的第三版，它保持了第二版说理浅显，叙述详细，便于教学的特点．主要内容：空间解析几何和矢量代数，多元函数微分学，重积分，曲线积分，曲面积分，矢量分析初步，级数，广义积分和含参变量积分．

本书由周城璧同志编写，贾瑞霞同志选配习题及答案．本书可作为综合大学和师范院校物理类专业的教材．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　第二册/四川大学数学系高等数学教研室编．—3版．北京：高等教育出版社，1996(2001重印)
高等学校教材·物理类专业用
ISBN 7-04-005484-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．四…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第06676号

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	河北省香河县印刷厂	版　次	1979年1月第1版
开　本	850×1168　1/32		1996年4月第3版
印　张	13.75	印　次	2001年1月第8次印刷
字　数	350 000	定　价	13.20元

第三版序言

为使本书符合国家教育委员会高等教育司1989年印发的《综合大学本科物理类专业高等数学课程教学基本要求》，并进一步提高本书质量，现对第一册、第二册的第二版进行修订. 本版仍保持原书通俗易懂、便于自学的特点，主要改动有：按基本要求对个别内容作了增删（如增加了实数的基本理论和闭区间上连续函数的性质的证明）；改正了第二版的错漏；对习题作了小量补充；引入了少量数学符号. 与此同时，对本书的一些定义和定理的叙述，定理的证明作了相应的改动.

高等数学教材建设组对这次修订给以很大的帮助，专门召开了修订本书的研讨会. 高等数学教材建设组组长曹之江教授亲自主持研讨会，参加会议的中山大学范达教授，北京师范大学王家鸾教授、李天林教授，广西大学曾纪雄教授，以及武汉大学侯友良老师，贵州师范大学的几位老师对第二版提出了全面、系统的批评意见和修改建议. 复旦大学秦曾复教授认真细致地审阅了修改稿，提了许多宝贵的意见，对提高本书的质量，起了很大的作用. 在此谨向他们表示衷心的感谢.

本书责任编辑高等教育出版社的杨芝馨同志，为本书第二、三版作了许多深入细致的工作，为提高本书质量付出了艰辛劳动，在此向她表示衷心感谢.

虽然本书已是第三版，但限于我们的水平，错误和不妥之处仍在所难免，请广大读者给予批评指正.

编　者

1994年4月于四川大学

第二版序言

本套书(共四册)自1978年2月起陆续出版以来，收到许多读者的来信，对本书的内容安排，习题配备等方面提出了很多宝贵意见，有的读者还为书中出现的错误编制了勘误表，这对我们的修改工作起了很大的作用。借此再版之机，向关心和支持我们工作的广大读者，表示衷心的感谢。

本套书是根据原教育部制定的“高等数学教学大纲”（由北京大学拟订供物理类专业使用)修订的，我们对第一版书中未严格证明的定理补充了证明(少数证明较复杂，或涉及内容超出大纲的例外)。考虑到与高中内容的衔接，函数和极限部分的讲法尽量与中学的讲法一致，极限一节中略微补充了一些内容，习题的配备也作了一定的修改。书后备有答案。

中山大学范达副教授细致地审阅了修订稿，提了许多宝贵的意见，对提高本书的质量起了很大的作用，我们非常感谢。

由于我们水平有限，虽然这次修订我们尽了很大的努力，但错误和不妥之处仍可能出现，希望广大读者予以指正。

编　者

1987年1月于四川大学

第一版序言

本书是根据 1977 年 10 月在上海召开的理科教材编写大纲讨论会所拟订的物理类高等数学和数学物理方法编写大纲写成的.

全书分四册出版. 前三册为高等数学部分; 第四册为数学物理方法部分. 具体内容为: 第一册包括函数与极限、微分学、不定积分、微分方程初步、定积分;第二册包括立体解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、场论初步、无穷级数(包括傅氏级数)、反常积分; 第三册包括线性代数、微分方程、概率论初步;第四册包括复变函数、数学物理方程、特殊函数等.

由于物理类各专业所需要的数学不尽相同, 本教材除共同需要的部分外,增加了一些加*号的内容,各专业可根据需要,自行选用.

本书初稿完成后承有关兄弟院校的同志进行审稿, 提供了许多修改意见,特此表示衷心的感谢.

由于水平所限,又兼仓促完稿, 本书在内容安排、文字修饰和习题选配等方面,还存在许多问题,希望同志们指正.

编　者

1978年2月

目　　录

第六章　空间解析几何和矢量代数

第一节　空间直角坐标

§6.1.1　空间点的直角坐标

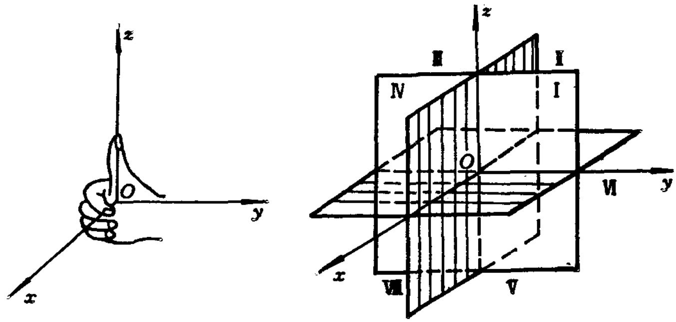
为了确定空间中一点的位置，需要建立空间的点与有序实数组之间的对应关系.

过空间一个定点 O，作三条两两互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且有一定的量度单位，这三条轴分别叫做 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，z 轴(竖轴)，统称坐标轴. 我们还规定这些坐标轴构成右手系，即若用右手握住 z 轴，且大姆指指向 z 轴的正向，则其余四指弯曲的方向表示从 x 轴正向沿最小角度转至 y 轴正向的旋转方向(图 6.1(a)). 如此就建立起一个空间直角坐标系.

任意两条坐标轴可以确定一个平面，如 x 轴和 y 轴确定 xOy 面，y 轴和 z 轴确定 yOz 面，z 轴和 x 轴确定 zOx 面，这三个面统称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分为八个部分. 每一部分称为一个**卦限**. 把含三个坐标轴正向的那个卦限称为第一卦限，在 xOy 平面的上部如图 6.1(b) 所示，依反时针顺序得 I，II，III，IV 四个卦限. 在 xOy 平面下部与第 I 卦限相对的为第 V 卦限，依反时针顺序得 VI，VII，VIII 三个卦限(图 6.1(b)).

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与有序实数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点，过点 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴，它们与 x 轴，y 轴，z 轴的交点依次为 P,Q,R (图 6.2). 设 P,Q,R 三点在三条坐标轴上的坐标依次为 x,y,z。这样，空间的



(a) (b)

图 6.1

一点M就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)，称为点M的直角坐标，其中 x 称为点M的横坐标，y 称为纵坐标，z 称为竖坐标，记为

$$M(x,y,z).$$

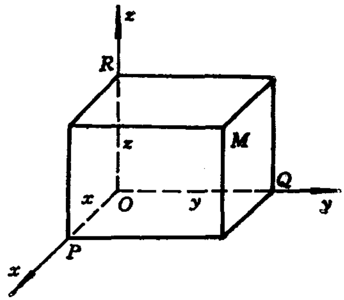


图 6.2

反过来，给定了有序实数组 (x,y,z)，我们依次在 x 轴，y 轴，z 轴上取与 x,y,z 相应的点P,Q，R，然后过点 P,Q，R 各作平面分别垂直于 x 轴，y 轴，z 轴，这三个平面的交点 M，就是以有序实数组(x,y,z)为坐标的点。

§6.1.2 两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，我们可用两点的坐标来表达它们间的距离 d。

过 M_1,M_2 分别作垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成的长方体以 M_1M_2 为对角线(图 6.3)。根据勾股定理可以证明，长

方体对角线的长度的平方，等于它的三条棱的长度的平方和，即

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2$$
$$= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2.$$

由于 $|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$，

$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$，

$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$；

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间中两点间距离的公式．特殊地，点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

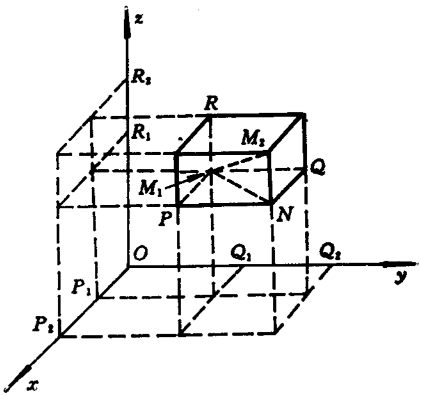


图 6.3

第二节 矢量代数

在研究力学、物理学以及其它应用科学时所遇到的量，可以分为两类．一类量完全由数值决定，例如质量、温度、时间、面积、体积、密度等，这一类量叫做**数量**；另一类量，它们不但有大小，还有

方向．例如，力、速度、加速度等，这一类量叫做**矢量**（**向量**）。

定义 1 既有大小又有方向的量称为**矢量**．

我们可以用有向线段来表示矢量．有向线段的长度表示所讨论矢量的大小，有向线段的方向表示该矢量的方向．

定义 2 如果两个矢量的大小相等、方向相同，就称这两个矢量是相等的．

从定义 2 可知，一个矢量平行移动后，仍与原矢量相等，所以矢量的起点可以在空间的任意一点．我们称这样的矢量为**自由矢量**．通常选择点 O 作起点，把所有矢量都看作是从这点出发．若矢量起点为 O，终点为 M，则记为 $\overrightarrow{OM}$；若起点为 A，终点为 B，则记为 $\overrightarrow{AB}$．

定义 3 如果两个矢量的大小相等、方向相反，则称这两个矢量互为反矢量．

矢量的长度叫做矢量的**模**．矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的模用 $|\overrightarrow{AB}|$ 来表示．在直角坐标系中，以坐标原点 O 为起点，向已知点 M 引矢量 $\overrightarrow{OM}$，这个矢量称为点 M 对于点 O 的**矢径**。

§ 6.2.1 矢量运算

1. 矢量的加法

根据力学中关于力，速度及加速度的合成法则，我们定义两矢量的和如下．

不在同一直线上的两矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和，是指以这两矢量为两边所做的平行四边形的对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$（图 6.4），记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

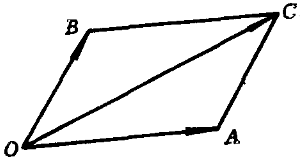


图 6.4

如果两矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在同一直线上，我们定义它们的和是

这样一个矢量：当 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的方向相同时，则和矢量的方向与原来两矢量的方向相同，长度等于两矢量长度的和；当 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的方向相反时，则和矢量的方向与长度较大的矢量方向相同，而长度等于两矢量长度的差。

长度为零的矢量，叫做**零矢量**，记作 **0**。它是起点与终点重合的矢量，所以它没有确定的方向。我们规定，一切零矢量都相等。长度相等而方向相反的两个矢量的和是零矢量。

对于矢量，加法交换律显然成立，即

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}.$$

在图 6.4 中可见 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$。于是得矢量加法的三角形法则：在第一矢量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 引第二矢量 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，封闭这折线 OAC 的矢量 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和，它的起点合于第一矢量的起点，终点合于第二矢量的终点。

若要求三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$① 的和，可先求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，再与 $\boldsymbol{C}$ 相加即得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$。由图 6.5 可见，若以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 相加，会得同一结果。因之，我们得公式

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C},$$

即加法的结合律成立。

我们注意到矢量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 就是封闭这折线 $OABC$ 的矢量 $\overrightarrow{OC}$，同时由于加法的交换律和结合律，可得到下面一般法则：

以任何次序相继作矢量 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$，并以前一矢量的终点作为次一矢量的起点，再由第一矢量的起点至最后一矢量的终点所得折线的封闭矢量即为矢量 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 的和。

2. 矢量的减法

---

① 我们约定，用单个字母表示矢量时，这个字母排成黑体。

矢量的减法定义为加法的逆运算，若 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，则矢量 $\overrightarrow{BA}$ 就定义为矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与矢量 $\overrightarrow{OB}$ 的差：

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$

两矢量差的作图法如图 6.6 所示.

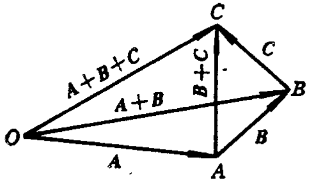


图 6.5

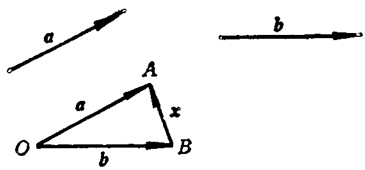


图 6.6

取点 O 为起点，作矢量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则矢量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{x}$ 满足表达式 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，它就是差矢量 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

3. 数量与矢量的乘法

（1）设已知矢量 $\boldsymbol{A}$ 和实数 m，则它们的乘积 $m\boldsymbol{A}$ 仍是一个矢量，这矢量的模等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模与数量 $|m|$ 的乘积，并且平行于矢量 $\boldsymbol{A}$. 若 $m>0$，则它的方向与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向相同；若 $m<0$，则它的方向与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反；若 $m=0$，它就成为零矢量；$m=1$ 时，$m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

（2）特别当 $m=-1$ 时，

$$m\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}，记为 -\boldsymbol{A},$$

$-\boldsymbol{A}$ 的模与 $\boldsymbol{A}$ 的模相等而方向相反. $-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的反矢量.

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}.$$

若 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 平行，则 $\boldsymbol{A}_2=\lambda\boldsymbol{A}_1$（$\lambda$ 为一数量）. 反之若 $\boldsymbol{A}_2=\lambda\boldsymbol{A}_1$，则 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 平行.

读者可以用作图法证明

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

（3）数量与矢量的乘法有下列性质：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为任意矢量.

λ,μ 为任意实数

1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$（第一分配律），

2) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$（第二分配律），

3) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$（结合律），

证 1）当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 时，等式显然成立．当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\lambda,\ \mu>0$ 时，等式两边的矢量都是将 $\boldsymbol{A}$ 放大 $\lambda+\mu$ 倍，所以显然相等．其它情形根据 $\lambda,\mu,\lambda+\mu$ 的正负由定义同样可证明．

2）$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 就是将和矢量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 伸长(或缩短) λ 倍(图6.7)．

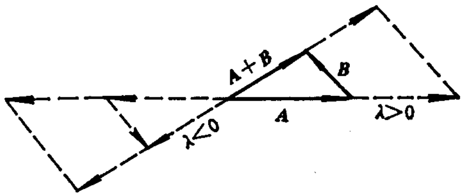


图 6.7

3）等式两边的矢量是同向的．例如 $\lambda<0$ 而 $\mu>0$ 时，两边的矢量都与 $\boldsymbol{A}$ 反向，从而它们是同向的，至于长度，由定义

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{A})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{A}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{A}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{A}|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{A}|,$$

即等式两边的矢量等长，故 3）的等式成立．其它情况可类似证明．

（4）长度为一个单位长的矢量叫做**单位矢量**．

用 $\boldsymbol{A}^0$ 表示与 $\boldsymbol{A}$ 同方向的单位矢量，则有

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^0,$$

或 $\boldsymbol{A}^0=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$（$\boldsymbol{A}$ 不为零矢量）．

4. 矢量的射影

（1）空间两轴的夹角

设空间两轴 l_1 和 l_2 相交于点 S，在两轴决定的平面上，把其中一轴绕点 S 旋转，使它的正向与另一轴的正向重合时所需要旋转的角度，就称为是这两轴间的夹角，记为 $(\widehat{l_1,l_2})$ 或 $(\widehat{l_2,l_1})$．一般规定