

高等學校試用教材

初等数学复習及研究

(平面几何)

梁 紹 鴻 編
赵 慈 庚 校

高等教育出版社

高等学校試用教材



初等数学复習及研究
(平面几何)

梁紹鴻編
趙慈庚校

高等教育出版社

本書是根据中华人民共和国教育部1955年編訂的师范学院数学系初等数学复習及研究——平面几何試行教学大綱編写的。可作为师范学院数学系的試用教材或教学参考書。

初等数学复習及研究

平面几何

梁紹鴻編

趙慈庚校

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京華印書局印刷 新华書店發行

統一書号 13010·485 開本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印張 15 $\frac{6}{16}$

字數 394,000 印數 0001—9,000 定價(8) 1.70

1958年11月第1版 1958年11月北京第1次印刷

序

本书是根据中华人民共和国教育部 1955 年編訂的师范学院数学系初等数学复习及研究——平面几何試行教学大綱編写的，間有少数細节作了一些更动。至所增附录一篇，只是为供讀者参考而設。

大綱指出：本科目的設置目的，是培养学生对平面几何問題的观察、分析、綜合、推究的能力，以求掌握通用的方法，养成足够的熟練技巧；所以内容注重系統地講授推証通法的理論，証題的技术，軌迹的探求，作图的方法。本书就是本着这种目的和精神来搜集和布置全部材料的，并且企图做到敘理周密，举例由淺入深，論証力求严格。現在把内容梗概介紹于下：

引言 首述几何論証的本源，以見建立公理体系的必要性；次述古代几何学簡史，并对欧几里得(Euclid)的几何原本給以評价；末介紹希尔伯特(Hilbert)公理体系的主要內容，初步了解近代公理法对于几何論証的严格要求。

第一章——中学平面几何摘要。将現行中学平面几何課本的材料分类整理，以便复习和征引。其中少数材料是因本书需要或由中学材料稍予推广而添入的。

第二章——推証通法。論述命題的結構形式，以及推証时慣用的邏輯理法和它們在数学中的应用。

第三章——証題术。詳論各种証題技术，鍛炼学生独立証題的技能和熟練技巧，并通过証題获得較中学平面几何課本进一步的几何知識。

第四章——軌迹。闡明軌迹的意义和基本属性；詳述三类型命題的解法；討論如何探求軌迹和如何檢查題解，加强解决軌迹命題的能

力。

第五章——作图。闡述作图在几何学中的地位，以及尺規作图的基本根据和解題步驟；詳論作图的各种方法，培养学生分析、推究問題的能力；略論尺規作图不能問題及其判断方法。

附录——多值有向角。一題的証法往往因图形的变化而不同；这是由于邻补角的取舍以及諸角应加应减等分歧所引起的麻煩。解决这种困难的工具是多值有向角。本书特将它的基本性質和它在証題中的应用，簡要地加以叙述，供讀者参考。

在各章节之后，都配备相当数量的多种类型的习题。这些习题大致可分四类：

(1) 回答課文的。这类习题，可供提問或复习时思考回忆之用。

(2) 比較淺易的。設这类习题的用意不是問学生会不会解，而是在于借以檢查学生关于作图立說的基本訓練。

(3) 稍費思考的。演这类习题，可以巩固已学得的知识，对鍛炼解題能力和发展邏輯思維也有一定作用。

(4) 需要深究的。这类习题，很多是有系統的題材，可供学生課外研究，以增加钻研的兴趣，也可作为将来的备查資料。

一般地說，后一类习题多半列入各章后的复习題和总复习題中，前三类大都分布于各节后的习题里面。必須声明，这些习题并不要求全作，教师可以根据具体情况，挑选程度适宜的一部分作为学生的作业，一部分作为課堂习作的內容。

教学大綱又說：为了发展爱国主义教育，應該搜集中国先民的发明創造，发揚光大，树立学生爱国思想。因此，适当地叙述一些有关的中算史料和国人发見的定理，也是本书深切注意的一个項目。本书所提到这方面的材料，有我国古算书“周髀算經”和“九章算术”中有关几何的記載，陈子的勾股定理及各家对这定理的証法，“墨經”、“荀子”所載有关几何的文字，刘徽的割圓术和重差术，祖冲之的祖率，秦九韶的三

斜求积, 李冶的测圆术, 以及近人周达定理等等。

由于几何题材的论证方法, 在逻辑结构方面特别突出, 于是训练学生养成严谨的逻辑习惯和发展积极的逻辑思维, 便成为本课程的教学使命之一。但是又由于学生不易掌握几何题材的这个特点, 从而造成学习上很大的困难, 这可说是几何教学上的一个难点。因此, 在教学的过程中, 既需要攻破这个难点, 尤需要启发思考, 发展严正的逻辑思维, 培养观察、分析、综合、推究问题的能力。基于这个观点, 本书教材的叙述, 对理路的来龙去脉, 不厌求详。对于解题, 固当使学生知其然, 尤重要的是知其所以然, 以及何由知其所以然。这就是说, 在解题时, 证明步骤固然务求完整正确, 但尤应注重证题的思索方法、轨迹的探求和讨论、作图的分析 and 推究等等项目的讲解。这种做法的目的, 无非是想使学生从这些实际训练中积累经验并且锻炼出克服困难的本领来。希望使用本书的教师, 充分地注意这点。

本书有的材料, 是用小字排印的; 这部分只供参考, 不必讲授。1957年, 教育部修订了师范学院教学计划, 对数学系的初等数学复习及研究这门课程作了一些变动, 其中“平面几何”与“立体几何”合并为“初等几何”, 并且规定在一学年内授完。按原来的教学计划, 规定平面几何是一学年的课程, 那么今后讲授学时数便相应地要略为减缩。姑不论按照新教学计划, 本课程的内容要不要更改, 只就时间来说, 本书的篇幅是多了一些。因此, 在新教学大纲未订定之前, 各师范学院如果采用本书暂充教材, 无妨各根据具体情况, 酌量删去其中某些部分。

本书从初稿到定稿, 经历了三、四次修改和增删, 因此定稿几乎已不是初稿的原来面目了。但限于编者水平, 缺点和错误仍然在所难免。希望本书读者以及采用本书作为教材的老师们多多提出宝贵的意见, 以便将来能够作更进一步的订正。

在本书编写过程中, 我校赵慈庚先生始终参加校订工作, 往往为一两个字的更动而躊躇终日。在此, 编者谨向赵先生致以深深的谢意。关

于中算史料，曾承程廷熙先生協助搜集；對本書的完成，初等教學及教學教學法教研組的同志也曾給予不少幫助和鼓舞。一併在此致謝。

梁紹鴻

1958年5月20日於北京師範大學

目 录

引言	(1)
§1. 几何论证的本源	(1)
§2. 古代几何学简史	(2)
§3. 欧几里得的“几何原本”	(4)
§4. 希尔伯特公理体系	(7)
习题一	(16)
第一章 中学平面几何摘要	(18)
第一节 直线形定理	(18)
§5. 三角形的简单性质及有关定理	(18)
§6. 直角·垂线·斜线	(22)
§7. 平行线	(25)
§8. 三角形及多边形的内角和	(26)
§9. 平行四边形·梯形	(28)
§10. 三角形的巧合点	(31)
习题二	(32)
第二节 关于圆的定理	(34)
§11. 圆的基本性质	(34)
§12. 直线与圆及圆与圆的关系	(35)
§13. 圆和有关的角	(39)
§14. 圆和多边形	(42)
习题三	(46)
第三节 比例线段及相似形定理	(47)
§15. 有向线段	(47)
§16. 比例线段	(52)
§17. 相似三角形和相似多边形	(53)
§18. 勾股定理	(55)
§19. 点对于圆的幂	(57)
§20. 三角形中几个重要的公式	(58)
§21. 某些正多边形的边长公式·圆 周率·弧长公式· γ	(60)
习题四	(64)
第四节 面积定理	(67)
§22. 某些直线形的面积	(67)
§23. 两面积之比	(69)
§24. 圆面积	(70)
习题五	(71)
复习题一	(73)
第二章 推证通法	(81)
第一节 命题的形式	(81)
§25. 命题的四种形式	(81)
§26. 定理的结构	(82)
§27. 逆命题制造法·逆定理	(85)
§28. 同一法则	(87)
§29. 分断式命题	(89)
习题六	(90)
第二节 直接证法与间接证法	(91)

§30. 直接証法及間接証法的意义···(91)	§31. 間接証法举例·····(93)
习题七·····(97)	
第三节 綜合法与分析法·····(98)	
§32. 綜合法·····(99)	§33. 分析法·····(100)
习题八·····(105)	
第四节 演繹法与归納法·····(105)	
§34. 演繹法·····(105)	§35. 归納法·····(108)
习题九·····(119)	复习題二·····(117)
第三章 証題术·····(120)	
第一节 相等·····(120)	
§36. 关于相等的証題术·····(120)	习题十·····(129)
第二节 和差倍分与代数証法·····(130)	
§37. 关于和差倍分的証題术·····(130)	§38. 代数証法·····(135)
习题十一·····(138)	
第三节 不等·····(140)	
§39. 关于不等的証題术·····(140)	习题十二·····(147)
第四节 垂直与平行·····(149)	
§40. 关于垂直的証題术·····(149)	§41. 关于平行的証題术·····(152)
习题十三·····(156)	
第五节 共綫点·····(158)	
§42. 关于共綫点的証題术·····(158)	§43. 梅涅勞定理·····(163)
习题十四·····(166)	
第六节 共点綫·····(169)	
§44. 关于共点綫的証題术·····(169)	§45. 等角共軛点·····(173)
§46. 塞瓦定理·····(177)	习题十五·····(181)
第七节 共圓点·····(183)	
§47. 关于共圓点的証題术·····(183)	习题十六·····(190)
第八节 共点圓·····(193)	
§48. 关于共点圓的証題术·····(193)	习题十七·····(200)
第九节 綫段計算·····(203)	
§49. 关于綫段計算的証題术·····(203)	习题十八·····(211)
复习題三·····(218)	
第四章 軌迹·····(228)	
第一节 基本知識·····(228)	
§50. 类或集的概念·····(228)	§51. 軌迹的意义·····(229)

§52. 轨迹的基本属性·····	(229)	§53. 轨迹命题的证明·····	(231)
§54. 轨迹命题的类型·····	(232)	§55. 基本轨迹命题·····	(233)
习题十九·····	(234)		
第二节 解法范例·····	(235)		
§56. 第一类型命题·····	(235)	习题二十·····	(241)
§57. 第二类型命题·····	(243)	习题二十一·····	(252)
§58. 第三类型命题·····	(254)	习题二十二·····	(262)
第三节 求法与检查·····	(265)		
§59. 探求轨迹的方法·····	(265)	§60. 间接求迹法·····	(270)
§61. 轨迹的界限问题·····	(271)	§62. 题解的检查·····	(274)
习题二十三·····	(280)	复习题四·····	(282)
第五章 作图·····	(286)		
第一节 基本知识·····	(286)		
§63. 作图题与设定条件·····	(286)	§64. 作图工具与作图公法·····	(288)
§65. 作图成法·····	(290)	§66. 解作图题的步骤·····	(292)
习题二十四·····	(299)		
第二节 常用的作图方法·····	(300)		
§67. 轨迹交点法·····	(301)	§68. 游移切线法·····	(307)
习题二十五·····	(310)	§69. 三角形奠基法·····	(312)
习题二十六·····	(313)		
第三节 合同变换与变位法·····	(319)		
§70. 合同变换·····	(319)	§71. 变位法·····	(325)
习题二十七·····	(331)		
第四节 位似变换与放大法·····	(333)		
§72. 位似变换·····	(333)	§73. 相似图形·····	(337)
§74. 圆和圆的位似·····	(340)	§75. 放大尺·····	(345)
§76. 放大法·····	(348)	习题二十八·····	(357)
第五节 反演变换与反演法·····	(359)		
§77. 反演变换·····	(359)	§78. 保角性·····	(362)
§79. 变态的反演变换·····	(363)	§80. 直线和圆的反象·····	(364)
§81. 反演器·····	(368)	§82. 极点和极线·····	(371)
§83. 反演法·····	(374)	习题二十九·····	(385)
第六节 作图杂法·····	(387)		
§84. 伸缩进退法·····	(384)	§85. 反求法·····	(391)
§86. 变更问题法·····	(394)	习题三十·····	(398)

第七节 代数在几何上的应用.....	(400)
§87. 几何线段关系式的齐次性.....	(400)
§88. 一次式的作图.....	(401)
§89. 二次方程的根的作图.....	(405)
§90. 代数分析法.....	(407)
§91. 正五边形和正五角星.....	(420)
§92. 正十七边形.....	(428)
习题三十一.....	(428)
第八节 尺规作图不能问题.....	(430)
§93. 尺规作图可能性的准则.....	(430)
§94. 方程的根与系数间的关系.....	(438)
§95. 三次方程的根.....	(434)
§96. 几何三大问题.....	(436)
§97. 作图不能问题的间接判断法.....	(439)
§98. 等分圆周问题.....	(440)
习题三十二.....	(443)
复习题五.....	(444)
总复习题.....	(448)
附录 多值有向角.....	(464)
§ 99. 多值有向角及其通值.....	(464)
§100. 多值有向角的相等.....	(465)
§101. 三点共线的条件.....	(467)
§102. 四点共圆的条件.....	(467)
§103. 多值有向角的和.....	(469)
§104. 轴对称的多值有向角.....	(470)
§105. 多值有向角的整数倍.....	(471)
§106. 多值有向角的优点.....	(472)
§107. 应用例题.....	(473)
习题.....	(479)

引 言

§ 1. 几何論証的本源

在几何学里經常有两件要做的主要工作：一是为了簡約文辭而确立定义，一是为了蕃衍內容而推証定理。

通常每遇一新概念，往往要訂立明确的定义，使人明白所指的是什么。但是若要求一切概念都有所本，即新概念都要用以前有过定义的旧概念来解釋，而旧概念又都須有它自己的定义，这是不可能的。因为从复杂的概念回溯到較简单的概念，这种过程当然不能无止境地繼續下去，必須最初先有一些我們从具体事物抽象出来的認為最簡單而无需解釋的概念，然后所有其余的概念才能由这些原始概念引导出来。所以用旧概念解釋新概念，虽然是經常的方法，但追溯上去終久有时而穷，我們不可不事先选定一組基本概念，不加定义，作为解釋其余一切概念的本源。这組不定义的基本概念，总称为元詞。这些元詞中，有的是指單純的事物的，叫做元名或基本元素；有的是表示事物間的关系的，叫做元誼或基本关系。

証明定理，誠然在在都要根据。可是每見一定理，既追求它所本的前提，又問此前提所以成立的原因，如此往上追尋，那么何时才可終止呢？事实上，希望每題都証，每証都根据已証的命題，犹之乎要想名名定义，一样是办不到的。因此就有必要采用一套基本命題，不加証明即作为一切定理的基础，而不再根究它的理由。这套不証明的基本命題，称为公理。

选定元詞和公理之后，几何的論証便有了明确的本源，此外再无需訴諸直覺或默契，这套选定的元詞和公理，彼此相輔而行，組成了所謂

公理体系。公理体系乃是奠定本門科学的基石，基石既立，嗣后即以它为論据，按着邏輯推理，一面轉立新名(定义)，一面寻求余論(定理)，那么一部論証严格的几何学便由此建立起来了。

§ 2. 古代几何学簡史

如上所述，似乎应该先立公理体系，而后产生几何学。然而事实并不这样。实际上，几何公理体系的建立不过是在近几十年才得到完成，而几何学早在数千年前已因人类生活的需要而发生了。任何科学的发展过程，大都如此。

相傳古代埃及的尼罗河每年泛濫，两岸田亩地界，尽被淹沒，事后必須設法測量，重新勘定田地的界綫。在这个实际的需要中，測量土地的方法自然要应运而生。据說西方的几何学就是起源于这种測地术。按“几何学”这个名詞，原是我国明朝徐光启(1562—1638年)譯的，这詞的原义無論在英文、拉丁文或希腊文都含着“測地术”的意思，这說明上面的傳說相当可靠。

大家都知道，古代埃及建有很多金字塔，这些金字塔的工程非常浩大，而它的精美造形，直到現在还是令人十分叹服。由此可見埃及人很早就已知道許多关于几何的知識了。大約公元前1700年，埃及人阿默斯(Ahmes)手抄了一本书，即后人所称的“阿默斯手册”，里面載有很多关于面积的測量法以及关于金字塔的几何問題。这本世界上最古的数学书出于埃及并不是偶然的，应该說是埃及人智慧积累的結果。

在我国方面，最早的数学书“周髀算經”和“九章算術”^①里也載有許多关于几何的問題，由这两部书可以知道“圓周率”^②及“勾股定理”^③

① 两书著者，已难稽考，大約非出于一人之手。书中所算各种問題，源流极古，有可以上溯到周秦以前的，也有两汉时代的算法。

② 見 §21 定理 135。

③ 見 §18 定理 124。

在我国很早就发现了。再推前一些，无论在石器时代的陶器上，或在殷商的钟鼎上，都已经有了精美的几何图案。所以我国古代的几何知识在很早也已达到了很高的程度。

我国战国时代的墨子(名翟，约公元前480—390年)，著有“墨经”十五卷，其中所载科学文字，标义立说，都极其精微深刻，就其所论几何学的各条来说，较之西方百余年后的欧几里得(Euclid，约公元前330—275年)，略无逊色。例如“墨经”上说：“圆，一中同长也。”这里的“圆”即是圆，那是说圆有唯一的中心，而这个中心距圆上任何点都一般远。又说：“方，柱隅四讎也。”其中的“方”指正方形，“柱”就是边，“隅”就是角，“讎”读如权，有相等的意思，这一条说的是正方形四边及四角各各相等。象这样对“圆”和“方”下的定义，字句很简单而意义详尽，在欧几里得所下的“圆”和“正方形”的定义亦不过如此。其后又有荀卿(约公元前310—230年)，在他所著“荀子”中曾说，“五寸之矩，尽天下之方也。”这和欧几里得的第四公设“凡直角都相等”^①意义完全相同。从这些记录可以窥见我国古代几何的一斑。

古代埃及虽然积累了许多几何知识，但是还没有组织成为一门系统的科学。后来希腊和埃及通商，而当时希腊的许多学者也先后来到埃及留学，于是几何的知识才渐渐传入希腊。此后，这些知识无论在实际材料方面，或是在某些理论基础奠定方面，在希腊都得到了光辉的发展。这样，几何学便形成了一门独立的科学。这门科学后来再传布于欧洲诸国，以至一直流传到现在。

古代希腊的许多数学家，如他勒(Thales，约公元前640—546年)、闭达队刺(Pythagoras，约公元前582—493年)、依卜加(Hippocrates，约当公元前430年)、柏拉图(Plato，约公元前427—347年)、欧几里得诸人，对几何学都有莫大的功绩。他勒曾发现若干几何定理和证明的

^① 见§3。

方法,这是理論几何的开端;他还能运用几何定理来解决实际問題,凭一根竹竿就可以測得金字塔的高。閉达臥刺认为数学是一切学問的基础,他对几何学有很多研究,著名的勾股定理在西方就叫做“閉达臥刺定理”。依卜加編著第一部初等几何教科书,他首先会用“反証法”^①,与柏拉图同为研究“几何三大問題”^②的有名的人,因而附带发見許多几何定理。柏拉图首創現在目为証題利器的“分析法”^③,而确立縝密的定义和明晰的公理作为几何学的基础,这种思想也由柏拉图开其先河。欧几里得搜集当时所有已知的初等几何材料(包括他自己的发見),接着严密的邏輯系統,編成“几何原本”十三卷^④,此书在历史上极負盛名,后世奉为几何学的正宗。

§ 3. 欧几里得的“几何原本”

欧几里得的“几何原本”一书,最突出的一点是它从一些特別提出的公理、公設^⑤和定义有計劃地来論証其他命題,其次是他第一次把丰富而散漫的几何材料整理成了系統严明的讀本,这些优点,使它成为人

① 見 §30.

② 見 §96.

③ 見 §33.

④ 此书原有十三卷,后来別人在书末續了两卷。原来的前四卷及第六卷論平面几何,第五及第七至第十卷論比例和算术理論,后三卷論立体几何。明万历三十五年(1607年)徐光启与西人利瑪竇(Matteo Ricci)合譯前六卷,在北京出版,这是西洋数学輸入我国的开始。至清季咸丰五年(1855年),李善兰(1810—1882年)与偉烈亚力(Alexander Wylie)才續譯后九卷。

⑤ 欧几里得本人並沒有說明“公理”与“公設”的区別。按字面与內容来看,似乎欧几里得所謂公理,指的是人們认为明白无疑的公共观念,而公設是一种假設的事項,几何学里用它們作为最簡單的論理根据。或者欧几里得以为假設的事項,容許还有商榷的余地,試看他把第五公設(平行公設)排在很后的地位,仿若他觉得这一条最可怀疑,到不得已时,才将它提出来。欧几里得煞費苦心,于此可見一斑。近代的著作,已不再区分公理与公設,而一律叫做公理。

类历史上的科学伟著。因为欧几里得完成了这一件学术上的艰巨工作，所以他的光辉的名字一直被后世推崇，而二千多年来所有初等几何教科书以及十九世纪以前一切有关初等几何的论著无不以他的“几何原本”为根据。于是这部精深伟大的著作乃被人们看做几何学的唯一圣典，甚至有将“欧几里得”用作几何学的代名词的。由于这个历史性的称誉，人们一直就把这种体系的几何学，称为欧几里得几何学。现在中学所学的几何，大致还是欧几里得的几何体系。

欧几里得的“几何原本”是一部擅几何学权威达二千余年之久的古代杰作已如上述，但是它并不是毫无缺点的，它的缺点在于它的基础部分。“几何原本”的基础是用一些定义、公设和公理来构造的，主要的有下列几条：

定义 1° 点是不可分的。

2° 线有长无宽。

3° 线的界是点。

4° 直线是这样的线，它对于它的任何点来说都是同样地放置着的。

5° 面只有长和宽。

6° 面的界是线。

7° 平面是这样的面，它对于它的任何直线来说都是同样地放置着的。

公设 1° 从每一点到另一点可引直线(图 1)。

2° 每条直线都可以无限延长(图 2)。

3° 以任意点为中心可作半径等于任意长的圆(图 3)。



图 1.



图 2.

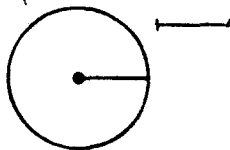


图 3.



图 4.



图 5.

4° 凡直角都相等(图 4)。

5° 同平面两直线与第三直线相交,若其中一侧的两个内角之和小于二直角,则该两直线必在这一侧相交(图 5)。

这条就是有名的“欧几里得第五公设”,也叫做平行公设^①。

公理 1° 等于同量的量相等。

2° 等量加等量,其和相等。

3° 等量减等量,其差相等。

4° 不等量加等量,其和不等。

5° 等量的两倍仍相等。

6° 等量的一半仍相等。

7° 能迭合的量相等。

8° 全体大于部分。

欧几里得给“点”、“线”、“直线”、“面”、“平面”都下了定义,这种工作,论意图自很正确,但是因为他用了“分”、“长”、“宽”、“界”等概念,而这些概念却没有定义,其中定义 4° 和定义 7° 虽然没有用到这些字眼,可是语意模糊,解释起来难免夹杂猜测的成分,所以那些定义都有逻辑上的缺陷。欧几里得的这种定义方法,系用普通语言,从各个角落,将所定义的概念的某些特性描写出来,使人心领神会;象这样的定义方法,叫做描写法。因其易为初学者接受,所以一直到现在,绝大多数的中学几何教科书,开头部分还是沿用这种方法。

^① 后人因觉得这条公设的内容不简单,似乎不该列为公设,于是想法去证明而没有成功,结果产生了“非欧几里得几何学”。