高等学校試用教材

初等数学复習及研究

(平面几何)

梁紹鴻 編
赵慈庚 校

高等教育出版社

高等学校試用教材

初等数学复習及研究

(平面几何)

梁 紹 鴻 編
赵 慈 庚 校

高等教育出版社

本書是根据中华人民共和国教育部1955年編訂的师范学院数学系初等数学复習及研究——平面几何試行教学大綱編写的。可作为师范学院数学系的試用教材或教学参考書。

初等数学复習及研究

平面几何

梁紹鴻編

赵慈庚校

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号13010·485 開本 850×1168 1/32 印張 15 6/16

字數 394,000 印數 0001—9,000 定價（8）¥1.70

1958年11月第1版 1958年11月北京第1次印刷

序

本书是根据中华人民共和国教育部 1955 年編訂的师范学院数学系初等数学复习及研究——平面几何試行教学大綱編写的，間有少数細节作了一些更动。至所增附录一篇，只是为供讀者参考而設。

大綱指出：本科目的設置目的，是培养学生对平面几何問題的观察、分析、綜合、推究的能力，以求掌握通用的方法，养成足够的熟練技巧；所以內容注重系統地講授推証通法的理論，証題的技术，軌迹的探求，作图的方法。本书就是本着这种目的和精神来搜集和布置全部材料的，并且企图做到叙理周密，举例由淺入深，論証力求严格。現在把內容梗概介紹于下：

引言　首述几何論証的本源，以見建立公理体系的必要性；次述古代几何学簡史，并对欧几里得(Euclid)的几何原本給以評价；末介紹希尔伯特(Hilbert)公理体系的主要內容，初步了解近代公理法对于几何論証的严格要求。

第一章——中学平面几何摘要。将現行中学平面几何課本的材料分类整理，以便复习和征引。其中少数材料是因本书需要或由中学材料稍予推广而添入的。

第二章——推証通法。論述命題的結构形式，以及推証时慣用的邏輯理法和它們在数学中的应用。

第三章——証題术。詳論各种証題技术，鍛炼学生独立証題的技能和熟練技巧，并通过証題获得較中学平面几何課本进一步的几何知識。

第四章——軌迹。闡明軌迹的意义和基本属性；詳述三种类型命題的解法；討論如何探求軌迹和如何檢查題解，加强解决軌迹命題的能

力。

第五章——作图。闡述作图在几何学中的地位，以及尺規作图的基本根据和解題步驟；詳論作图的各种方法，培养学生分析、推究問題的能力；略論尺規作图不能問題及其判断方法。

附录——多値有向角。一題的証法往往因图形的变化而不同；这是由于邻补角的取舍以及諸角应加应减等分歧所引起的麻煩。解决这种困难的工具是多値有向角。本书特将它的基本性質和它在証題中的应用，簡要地加以叙述，供讀者参考。

在各章节之后，都配备相当数量的多种类型的习題。这些习題大致可分四类：

(1)回答課文的。这类习題，可供提問或复习时思考回忆之用。

(2)比較淺易的。設这类习題的用意不是問学生会不会解，而是在于借以檢查学生关于作图立說的基本訓練。

(3)稍費思考的。演这类习題，可以巩固已学得的知識，对鍛炼解題能力和发展邏輯思維也有一定作用。

(4)需要深究的。这类习題，很多是有系統的題材，可供学生課外研究，以增加鉆研的兴趣，也可作为将来的备查資料。

一般地說，后一类习題多半列入各章后的复习題和总复习題中，前三类大都分布于各节后的习題里面。必須声明，这些习題并不要求全作，教师可以根据具体情况，挑选程度适宜的一部分作为学生的作业，一部分作为課堂习作的內容。

教学大綱又說：为了发展爱国主义教育，应該搜集中国先民的发明創造，发揚光大，树立学生爱国思想。因此，适当地叙述一些有关的中算史料和国人发見的定理，也是本书深切注意的一个項目。本书所提到这方面的材料，有我国古算书“周髀算經”和“九章算术”中有关几何的記載，陈子的勾股定理及各家对这定理的証法，“墨經”、“荀子”所載有关几何的文字，刘徽的割圓术和重差术，祖冲之的祖率，秦九韶的三

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

斜求积，李冶的测圓术，以及近人周达定理等等。

由于几何題材的論証方法，在邏輯結构方面特别突出，于是訓練学生养成謹严的邏輯习惯和发展积极的邏輯思維，便成为本課程的教学使命之一。但是又由于学生不易掌握几何題材的这个特点，从而造成学习上很大的困难，这可說是几何教学上的一个难点。因此，在教学的过程中，既需要攻破这个难点，尤需要启发思考，发展严正的邏輯思維，培养观察、分析、綜合、推究問題的能力。基于这个观点，本书教材的叙述，对理路的来龙去脉，不厌求詳。对于解題，固当使学生知其然，尤重要的是知其所以然，以及何由知其所以然。这就是說，在解題时，証明步驟固然务求完整正确，但尤应注重証題的思索方法、軌迹的探求和討論、作图的分析和推究等等項目的講解。这种做法的目的，无非是想使学生从这些实际訓練中积累經驗并且鍛炼出克服困难的本領来。希望使用本书的教师，充分地注意这点。

本书有的材料，是用小字排印的，这部分只供参考，不必講授。1957年，教育部修訂了师范学院教学計划，对数学系的初等数学复习及研究这門課程作了一些变动，其中“平面几何”与“立体几何”合并为“初等几何”，并且規定在一学年內授完。按原来的教学計划，規定平面几何是一学年的課程，那么今后講授学时数便相应地要略为减縮。姑不論按照新教学計划，本課程的內容要不要更改，只就时間来說，本书的篇幅是多了一些。因此，在新教学大綱未訂定之前，各师范学院如果采用本书暫充教材，无妨各根据具体情况，酌量删去其中某些部分。

本书从初稿到定稿，經历了三、四次修改和增删，因此定稿几乎已不是初稿的原来面目了。但限于編者水平，缺点和錯誤仍然在所难免。希望本书讀者以及采用本书作为教材的老师們多多提出宝貴的意見，以便将来能够作更进一步的訂正。

在本书編写过程中，我校赵慈庚先生始終参加校訂工作，往往为一两个字的更动而躊躇終日。在此，編者謹向赵先生致以深深的謝意。关

于中算史料，曾承程廷熙先生协助搜集；对本书的完成，初等数学及数学教学法教研組的同志也曾給予不少帮助和鼓舞。一并在此致謝。

梁紹鴻

1958年5月20日于北京师范大学

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

引　言

§1. 几何論証的本源

在几何学里經常有两件要做的主要工作：一是为了簡約文辞而确立定义，一是为了蕃衍內容而推証定理。

通常每遇一新概念，往往要訂立明确的定义，使人明白所指的是什么。但是若要求一切概念都有所本，即新概念都要用以前有过定义的旧概念来解釋，而旧概念又都須有它自己的定义，这是不可能的。因为从复杂的概念回溯到較簡单的概念，这种过程当然不能无止境地継續下去，必須最初先有一些我們从具体事物抽象出来的認为最簡单而无需解釋的概念，然后所有其余的概念才能由这些原始概念引导出来。所以用旧概念解釋新概念，虽然是經常的方法，但追溯上去終久有时而穷，我們不可不事先选定一組基本概念，不加定义，作为解釋其余一切概念的本源。这組不定义的基本概念，总称为元詞。这些元詞中，有的是指单純的事物的，叫做元名或基本元素；有的是表示事物間的关系的，叫做元誼或基本关系。

証明定理，誠然在在都要根据。可是每見一定理，既追求它所本的前提，又問此前提所以成立的原因，如此往上追寻，那么何时才可終止呢？事实上，希望每題都証，每証都根据已証的命題，犹之乎要想名名定义，一样是办不到的。因此就有必要采用一套基本命題，不加証明即作为一切定理的基础，而不再根究它的理由。这套不証明的基本命題，称为公理。

选定元詞和公理之后，几何的論証便有了明确的本源，此外再无需訴諸直觉或默契。这套选定的元詞和公理，彼此相輔而行，組成了所謂

公理体系。公理体系乃是奠定本門科学的基石，基石既立，嗣后卽以它为論据，按着邏輯推理，一面轉立新名（定义），一面寻求余論（定理），那么一部論証严格的几何学便由此建立起来了。

§2. 古代几何学簡史

如上所述，似乎应該先立公理体系，而后产生几何学。然而事实并不这样。实际上，几何公理体系的建立不过是在近几十年才得到完成，而几何学早在数千年前已因人类生活的需要而发生了。任何科学的发展过程，大都如此。

相傳古代埃及的尼罗河每年泛濫，两岸田亩地界，尽被淹没，事后必須設法測量，重新勘定田地的界綫。在这个实际的需要中，測量土地的方法自然要应运而生。据說西方的几何学就是起源于这种測地术。按“几何学”这个名詞，原是我国明朝徐光启（1562—1638 年）譯的，这詞的原义无論在英文、拉丁文或希腊文都含着“測地术”的意思，这說明上面的傳說相当可靠。

大家都知道，古代埃及建有很多金字塔，这些金字塔的工程非常浩大，而它的精美造形，直到現在还是令人十分叹服。由此可見埃及人很早就已知道許多关于几何的知識了。大約公元前 1700 年，埃及人阿默斯（Ahmes）手抄了一本书，卽后人所称的“阿默斯手册”，里面載有很多关于面积的測量法以及关于金字塔的几何問題。这本世界上最古的数学书出于埃及并不是偶然的，应該說是埃及人智慧积累的結果。

在我国方面，最早的数学书“周髀算經”和“九章算术”①里也載有許多关于几何的問題，由这两部书可以知道“圓周率”②及“勾股定理”③

① 两书著者，已难稽考，大約非出于一人之手。书中所载各种問題，源流极古，有可以上溯到周秦以前的，也有两汉时代的算法。

② 見 §21 定理 135。

③ 見 §18 定理 124。

在我国很早就发見了。再推前一些，无論在石器时代的陶器上，或在殷商的鐘鼎上，都已經有了精美的几何图案。所以我国古代的几何知識在很早也已达到了很高的程度。

我国战国时代的墨子(名翟，約公元前 480—390 年)，著有"墨經"十五卷，其中所載科学文字，标义立說，都极其精微深刻，就其所論几何学的各条来說，較之西方百余年后的欧几里得(Euclid, 約公元前330—275 年)，略无遜色。例如"墨經"上說："圜，一中同长也。"这里的"圜"即是圓，那是說圓有唯一的中心，而这个中心距圓上任何点都一般远。又說："方，柱隅四讙也。"其中的"方"指正方形，"柱"就是边，"隅"就是角，"讙"讀如权，有相等的意思，这一条說的是正方形四边及四角各各相等。象这样对"圜"和"方"下的定义，字句很簡单而意义詳尽，在欧几里得所下的"圓"和"正方形"的定义亦不过如此。其后又有荀卿(約公元前 310—230 年)，在他所著"荀子"中曾說，"五寸之矩，尽天下之方也。"这和欧几里得的第四公設"凡直角都相等"① 意义完全相同。从这些記录可以窺見我国古代几何的一斑。

古代埃及虽然积累了許多几何知識，但是还沒有組織成为一門系統的科学。后来希腊和埃及通商，而当时希腊的許多学者也先后来到埃及留学，于是几何的知識才漸漸傳入希腊。此后，这些知識无論在实际材料方面，或是在某些理論基础的奠定方面，在希腊都得到了光輝的发展。这样，几何学便形成了一門独立的科学。这門科学后来再傳布于欧洲諸国，以至一直流傳到現在。

古代希腊的許多数学家，如他勒(Thales, 約公元前 640—546 年)、閉达臥剌(Pythagoras, 約公元前 582—493 年)、依卜加 (Hippocrates, 約当公元前 430 年)、柏拉圖(Plato, 約公元前 427—347 年)、欧几里得諸人，对几何学都有莫大的功績。他勒曾发見若干几何定理和証明的

① 見 §3。

方法，这是理論几何的开端；他还能运用几何定理来解决实际問題，凭一根竹竿就可以測得金字塔的高。閉达臥剌認为数学是一切学問的基础，他对几何学有很多研究，著名的勾股定理在西方就叫做"閉达臥剌定理"。依卜加編著第一部初等几何教科书，他首先会用"反証法"①，与柏拉图同为研究"几何三大問題"②的有名的人，因而附带发見許多几何定理。柏拉图首創現在目为証題利器的"分析法"③，而确立縝密的定义和明晰的公理作为几何学的基础，这种思想也由柏拉图开其先河。欧几里得搜集当时所有已知的初等几何材料（包括他自己的发見），按着严密的邏輯系統，編成"几何原本"十三卷④，这书在历史上极負盛名，后世奉为几何学的正宗。

§3. 欧几里得的"几何原本"

欧几里得的"几何原本"一书，最突出的一点是它从一些特别提出的公理、公設⑤和定义有計划地来論証其他命題，其次是他第一次把丰富而散漫的几何材料整理成了系統严明的讀本，这些优点，使它成为人

① 見§30。

② 見§96。

③ 見§33。

④ 这书原有十三卷，后来别人在书末續了两卷。原来的前四卷及第六卷論平面几何，第五及第七至第十卷論比例和算术理論，后三卷論立体几何。明万历三十五年(1607年)徐光启与西人利瑪竇(Metteo Ricci)合譯前六卷，在北京出版，这是西洋数学輸入我国的开始。至清季咸丰五年(1855年)，李善兰(1810—1882年)与偉烈亚力(Alexander Wylie)才續譯后九卷。

⑤ 欧几里得本人并沒有說明"公理"与"公設"的区别。按字面与內容来看，似乎欧几里得所謂公理，指的是人們認为明白无疑的公共观念，而公設是一种假設的事項，几何学里用它們作为最簡单的論理根据。或者欧几里得以为假設的事項，容許还有商榷的余地，試看他把第五公設(平行公設)排在很后的地位，仿若他觉得这一条最可怀疑，到不得已时，才将它提出来。欧几里得煞費苦心，于此可見一斑。近代的著作，已不再区分公理与公設，而一律叫做公理。

类历史上的科学偉著。因为欧几里得完成了这一件学术上的艰巨工作，所以他的光輝的名字一直被后世推崇，而二千多年来所有初等几何教科书以及十九世紀以前一切有关初等几何的論著无不以他的“几何原本”为根据。于是这部精深偉大的著作乃被人們看做几何学的唯一圣典，甚至有将“欧几里得”用作几何学的代名詞的。由于这个历史性的称誉，人們一直就把这种体系的几何学，称为欧几里得几何学。現在中学所学的几何，大致还是欧几里得的几何体系。

欧几里得的“几何原本”是一部擅几何学权威达二千余年之久的古代杰作已如上述，但是它并不是毫无缺点的，它的缺点在于它的基础部分。“几何原本”的基础是用一些定义、公設和公理来构造的，主要的有下列几条：

定义　1° 点是不可分的。

2° 綫有长无寬。

3° 綫的界是点。

4° 直綫是这样的綫，它对于它的任何点来說都是同样地放置着的。

5° 面只有长和寬。

6° 面的界是綫。

7° 平面是这样的面，它对于它的任何直綫来說都是同样地放置着的。

公設　1° 从每一点到另一点可引直綫(图 1)。

2° 每条直綫都可以无限延长(图 2)。

3° 以任意点为中心可作半徑等于任意长的圓(图 3)。

图 1.

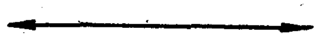

图 2.

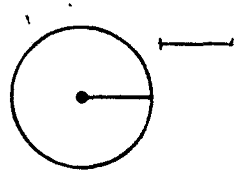

图 3.

图 4.

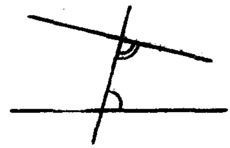

图 5.

4° 凡直角都相等(图 4)。

5° 同平面两直綫与第三直綫相交，若其中一側的两个內角之和小于二直角，則該两直綫必在这一側相交(图 5)。

这条就是有名的"欧几里得第五公設"，也叫做平行公設①。

公理 1° 等于同量的量相等。

2° 等量加等量，其和相等。

3° 等量減等量，其差相等。

4° 不等量加等量，其和不等。

5° 等量的两倍仍相等。

6° 等量的一半仍相等。

7° 能迭合的量相等。

8° 全体大于部分。

欧几里得給"点"、"綫"、"直綫"、"面"、"平面"都下了定义，这种工作，論意图自很正确，但是因为他用了"分"、"长"、"寬"、"界"等概念，而这些概念却沒有定义，其中定义 4° 和定义 7° 虽然沒有用到这些字眼，可是語意模糊，解釋起来难免夾杂猜測的成分，所以那些定义都有邏輯上的缺陷。欧几里得的这种定义方法，系用普通語言，从各个角落，将所定义的概念的某些特性描写出来，使人心領神会；象这样的定义方法，叫做描写法。因其易为初学者接受，所以一直到現在，絕大多数的中学几何教科书，开头部分还是沿用这种方法。

① 后人因觉得这条公設的內容不簡单，似乎不該列为公設，于是想法去証明而沒有成功，結果产生了"非欧几里得几何学"。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com