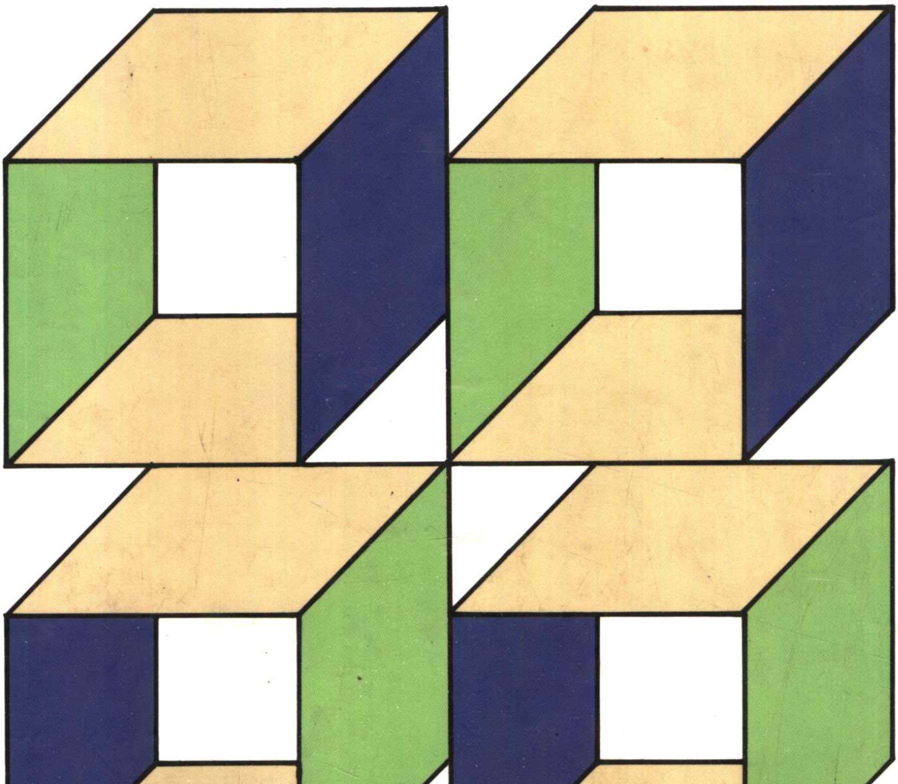
高等学校教材 （第二版）

数学分析

华东师范大学数学系 编

·上册·



高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析　上册/华东师范大学数学系编．—2版．—北京：高等教育出版社，1991.3(2002重印)
ISBN 7-04-003291-0

I.数…　II.华…　III.数学分析　IV.017

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第00837号

出版发行 高等教育出版社			
社　　址 北京市东城区沙滩后街55号		**邮政编码**	100009
电　　话 010—64054588		**传　　真**	010—64014048
网　　址 http://www.hep.edu.cn			
经　　销 新华书店北京发行所			
印　　刷 中国科学院印刷厂			
		版　　次	1980年9月第1版
开　　本 850×1168　1/32			1991年3月第2版
印　　张 14		**印　　次**	2002年2月第15次印刷
字　　数 334 000		**定　　价**	13.40元

再 版 的 话

本书自1980年出版发行以来，由于它在取材、体系、可读性诸方面较为切合我国教学实际，而被许多兄弟院校所采用，并于1987年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获全国优秀奖．近几年，许多学校在数学教学改革中，更新了一些课程，对数学分析提出了许多新的要求．基于这些情况，我们在这次再版中，除订正初版中的某些疏漏外，在不影响本书原有体系、格局的前提下，对某些内容作了适当的增删和调整．使全书内容更充实结构更合理，且有更大的选择性，以期适应各类学校师生的需要．

修改的主要内容有：

在第一章精减某些与中学数学相重复的函数概念，增加实数集有关的一些内容，如有界集，确界和确界原理等．

在极限理论方面，把出发点改为"确界原理"(原来是"单调有界原理")，并在第二章用它证明单调有界定理，第四章用它证明实指数幂的性质，最后在第八章完成对实数完备性的几个等价命题的证明．相应地，在附录 II 实数理论中，也改用戴德金分划说定义实数，并证明了确界原理(原来采用柯西列定义实数，虽有不少优点，但不够直观，不易理解)．此外，子列概念提前到第二章，第八章"极限与连续性(续)"(原为第七章)在内容和次序上也稍作调整．

对于微分学，在单元部分，把原来的第六章中值定理与导数应用分为两章．在新的第六章"微分学基本定理与不定式极限"增加了导数极限定理与达布定理(小字排印)，用以揭示导函数的性质；在新的第七章"运用导数研究函数性态"加强了日益显得重要的凸

函数概念．在多元部分，除对原有内容作不同程度精简外，主要增加了第十九章“向量函数微分学”，以便在更一般形式上讨论多元函数理论，使读者对经典导数概念的认识得以深化．这一章目前暂作选学材料，期望今后能逐步用向量函数的方式取代传统内容成为多元函数微分学的主体．

在积分学方面，于定积分中补充了第二积分中值定理(小字排印)．压缩了非正常积分与含参量积分的内容，并把它分别并入定积分与重积分各章中．为便于重积分部分的教学，在内容与结构上也稍作调整，其中第二十章主要讲述二、三重积分的概念、计算与应用，在第二十一章除对二重积分中某些问题作进一步讨论外，还介绍了 n 重积分(小字排印)和含参量非正常积分．此外，我们删去了“非正常重积分”与“外微分与一般斯托克斯公式”两节．

关于级数部分，在新版中删去了对傅里叶级数一致收敛性的进一步讨论．

张奠宙教授为本书写了“微积分学简史”(附录 I)．我们认为，知道一点微积分的来龙去脉，对每一位数学教育工作者来说是必要和有益的．

在这次修订中，我们重新审查了本书的全部习题，并进行了调整与补充，以便更加符合教学的需要．各节横线以上的习题仍然是必做题．每册书末都附有计算题答案．

在新版中，用记号□表示命题证明或例题求解的结束．上册增加了附录 III“积分表”．每册末尾增设了名词和人名索引，以供读者检索．

这次修订工作由程其襄、郑英元、毛羽辉和宋国栋等四人完成，程其襄教授任主编，郑英元负责全书的统一整理工作．高等教育出版社郑洪深同志为本书的初版和再版做了许多深入细致的工作．我系数学分析教学组成员对本书的修订工作提出过许多积极

的建议．本书自出版以来深得广大读者的关心与支持． 在此，我们一并致以深切的谢意，并希望读者对本书给予批评与指正．

编　　者

上册：1987 年 12 月完成初稿，1990 年 2 月完成修改稿．

下册：1988 年 6 月完成初稿，1990 年 6 月完成修改稿．

编 者 的 话 (第一版)

本书是根据1977年高等学校理科数学教材大纲讨论会所制定的《数学分析》大纲编写的. 全书分上、下两册,可作为高等师范院校数学系教学用书,以及其他高等院校有关专业的教学参考书.

关于本书的使用兹作以下一些说明:在极限问题的处理上,虽一开始就采用 ε–δ 定义,但若干较难的理论证明则放到微分学之后.实数理论作为附录放在上册的末尾. 有关集合的基本概念,目前尚未在中学里全面普及,仍在附录I中作了简要的介绍.本书有部分内容用小号字排印,在实际教学中可视情况选用. 本书各节都附有适量的习题,并把它们分为基本题与选作题两类,中间用一道横线分开,横线之后的习题和各章的总练习题,读者可在教师指导下挑选一部分进行练习. 书末并附有计算题的答案.

本书由程其襄教授主编,编写组写出初稿后,经程其襄、周彭年、郑英元修改定稿(郑英元执笔整理). 先后参加本书编写工作的有:陈昌平、陈美廉、徐钧涛、曹伟杰、杨庆中、黄丽萍、张奠宙、宋国栋等同志. 此外,林克伦、华煜铣、顾鹤荣等同志也参加过一些工作.

北京师范大学、武汉大学担任本书主审,先后参加审稿的单位有: 上海师范学院、安徽师范大学、吉林师范大学、曲阜师范学院、西藏师范学院、陕西师范大学、贵阳师范学院、徐州师范学院、新乡师范学院以及四川师范学院、华中师范学院、华南师范学院、江西师范学院、昆明师范学院、南京师范学院等. 甘肃师范大学的同志也对本书上册提出过仔细的修改意见. 在审查过程中,大家对原稿提出了许多宝贵的意见和建议,我们曾根据这些意见作过许多

重大的修改，特此表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，恳切希望读者对本书的缺点错误给予批评指正.

编　者

1979.11

又及，本书最后定稿时，曾照一九八〇年五月在上海举行的高等学校理科数学教材编审委员会审订的《数学分析》大纲作了修订.

编　者

1980.9

目　录

第一章　实数集与函数

第二章　数列极限

第三章　函数极限

第四章 函数的连续性

第五章 导数与微分

第六章 微分学基本定理与不定式极限

第七章 运用导数研究函数性态

第八章 极限与连续性(续)

第九章　不定积分

第十章　定积分

第十一章　定积分的应用

第一章 实数集与函数

§1 实 数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数.为此,我们先简要叙述实数的有关概念.

一 实数及其性质

在中学数学课程中,我们知道实数由有理数与无理数两大部分组成.每一个有理数都可用分数形式 $\frac{p}{q}$(p、q 为整数,$q\neq0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示;而无限十进不循环小数则表示一个无理数.

实数有如下一些主要特性:

1.实数对加、减、乘、除(除数不为0)四则运算是封闭的,即对任意两个实数在施行加、减、乘、除(除数不为0)任何一个运算之后,所得的和、差、积、商仍然是实数.

2.实数是有序的,即任意两个实数 a、b,必满足下述三个关系之一:

$$a<b,\ a=b,\ a>b.$$

3.实数具有阿基米德(Archimedes)性,即对任意两个实数 a、b,若 $b>a>0$,则存在自然数 N,使得 $Na>b$.

4.实数全体具有稠密性,即任意两个不相等实数之间必有另一个实数(而且既有有理数,也有无理数).

5.如果在一直线(通常画成水平直线)上确定一点 O 作为原

点，指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向)，并规定一个单位长度，则称此直线为**数轴**．于是，任一实数都对应数轴上唯一的一点；反之，数轴上每一点也都唯一地代表一个实数．正由于全体实数与整个数轴上的点有着一一对应关系，故在以后的叙述中，常把“实数 a”与“数轴上的点 a”两种说法看作具有相同的含义，而不加以区别．

为方便起见，通常将全体实数构成的集合记为 $\boldsymbol{R}$，即

$$\boldsymbol{R}=\{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

关于实数的定义与性质的详细论述，有兴趣的读者可参阅本书附录 II．

二　绝对值与不等式

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

从数轴上看，数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离．

关于绝对值有如下一些性质：

1．$|a|=|-a|\geqslant 0$；当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$．

2．$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$．

3．关系式 $|a|<h$ 和 $|a|\leqslant h$ 分别等价于不等式 $-h<a<h$ 和 $-h\leqslant a\leqslant h\ (h>0)$．

4．对于任何实数 a 和 b 有如下的**三角形不等式**

$$|a|-|b|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|.$$

5．$|ab|=|a||b|$．

6．$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$．

下面只证明性质 4，其余性质由读者自行证明．

由性质 2 有

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\ -|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

两式相加后得到

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

根据性质 3, 上式等价于

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1}$$

将上述 b 改为 $-b$ 后, (1)式仍然成立, 这就证明了性质 4 的右半部分. 又由 $|a|=|a-b+b|$, 根据(1)式有

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|.$$

于是

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|. \tag{2}$$

当(2)中 b 改为 $-b$ 时, (2)式仍然成立. □

最后列出两个今后常用的不等式:

伯努利(Bernoulli)不等式 设 $h>-1$, n 为自然数, 则有

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

读者已在中学数学课本知道, 可运用数学归纳法证明这个不等式对一切自然数 n 成立.

平均值不等式 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数, 则有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

即几何平均值不超过算术平均值. 在中学数学课本中已经证明了 $n=2$ 和 $n=3$ 情况, 其一般证明将在本书第六章总练习题 8 完成.

习 题

1. 设 a 为有理数, x 为无理数. 试证明:

(1) $a+x$ 是无理数; (2) 当 $a\neq 0$ 时, ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $x(x^2-1)>0$; (2) $|x-1|<|x-3|$;

(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$; (4) $x^3+x\geqslant1$.

3．设 $x\neq0$. 证明: $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant2$, 并说明其中等号何时成立.

4．证明: 对任何 $x\in\boldsymbol{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant1$; (2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant2$.

5．设 a, b, c 为三个任意正实数. 证明:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

6．设 p 为自然数. 证明: 若 p 不是完全平方数, 则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

7．设 a 与 b 为已知的实数, 试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解:

(1) $|x-a|<|x-b|$; (2) $|x-a|<x-b$;

(3) $|x^2-a|<b$.

8．设 $a>0$, $b>0$ 且 $a\neq b$. 试证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

9．利用平均值不等式证明:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\quad n=1, 2, \cdots.$$

提示: 令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1+\frac{1}{n}$, $x_{n+1}=1$.

10．证明柯西(Cauchy)不等式: 设 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 为两组实数, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$

§2 数集·确界原理

本节将首先定义 $\boldsymbol{R}$ 中两类重要的数集——区间与邻域, 然后讨论有界集并给出本书中作为极限理论基础的确界原理.

一 区间与邻域

设 $a, b\in\boldsymbol{R}$, 且 $a<b$, 则称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间, 记作