构形定理

科 学 普 及 出 版 社

构 形 定 理

（数学通俗讲話第 24 册）

〔苏〕 Б. И. 阿尔古諾夫
Л. А. 斯考尔尼雅考夫 合著

王 联 芳 譯

科学普及出版社

一九六四年·北京

内 容 提 要

本书讲的是一些重要的平面构形定理及其在解决某些实际問題上的应用。这里假定讀者只有平面几何和立体几何的知識。关于中心射影和空間反常元素的必要知識，在本书中有简单的叙述。本书不仅对中学数学小組有用，对地形测量者和大地測量者也很有用。

总号：065

构形定理（数学通俗讲話第24册）

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

著　者：〔苏〕Б. И. 阿尔古諾夫　Л. А. 斯考尔尼雅考夫

譯　者：王联芳

出版者：科学普及出版社

（北京市西直門外郝家湾）

北京市书刊出版业营业许可证出字第112号

发行者：新华书店

印刷者：北京市印刷一厂

开　本：787×1092 1/32　印张：1 5/16

1964年2月第1版　字数：20,000

1964年2月第1次印刷　印数：8,590

統一书号：13051·034

定　价：0.19元

序

这本小册子以初等形式讲述一些平面构形定理及其推論，幷用来研究几何图形的性质和解决某些問題。我們企图尽可能地把讲述的可接受程度与必要的严格程度結合起来。本书除了平面几何和立体几何的基本知識以外，只引用了中心射影和空間反常元素的概念，而这两个概念应該认为是数学普通教育的最起碼的組成部分。

§1 讲述中心射影、反常点和反常直綫的必需知識。

§2 和 3 讲述两个重要构形定理，即巴巴—巴斯加定理和德沙格定理。

§4 讲述多角形的构形性质。

§5 引出問題幷举例。

§6 略一接触关于构形定理的代数意义的問題以及得到这类定理的一般方法。

书末附有文献目录，供进一步研究构形定理問題之用。

作者希望本书能为中学高年級学生所接受，幷希望对領导数学小組工作的教师有所帮助。熟悉一些构形定理对地形測量和大地測量都有好处。师范学院或师范大学的学生可以在本书中找到密切联系射影几何基础課程的資料。

作　者

目　　次

引　言

构形定理是几何中最单純的定理。这里只讲有限个数的点和直綫以及它們之間的相互从属性。

通常的构形①定理作如此表述，使得由几个所討論的点位于一直綫上或几条所討論的直綫通过一点，推导出另外几个点位于一直綫上或另外几条直綫通过一点。

下面便是构形定理中一些最簡单的例子：

1．若四点 A, B, C, D 各不相同，并且 A, B, C 三点在一直綫上，A, B, D 三点在一直綫上，则 B, C, D 三点也在一直綫上(图 1)。

2．若四直綫 a, b, c, d 各不相同，并且 a, b, c 三直綫通过一点，a, b, d 三直綫通过一点，则 b, c, d 三直綫也通过一点(图 2)。

在中学几何教本学过的命题中，关于三角形的几个著名点定理，接近于构形定理。

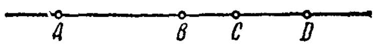

图 1

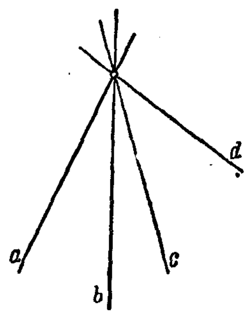

图 2

① 构形(拉丁文是Configuratio)，原是某种对象的相互位置的意思。

某些构形定理远在古代即巳知名。在現代，它是一門最引人注目的几何分支——射影几何——的基础。射影几何又是論述空間图形在平面上的表現方法——画法几何——的理論基础。

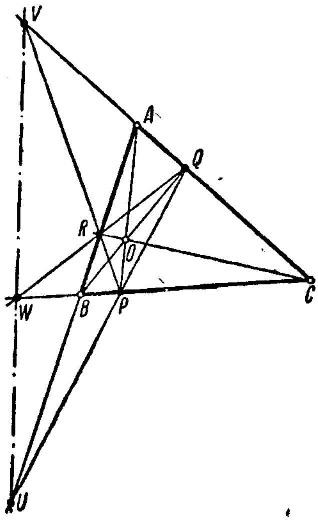

图 3

在最近十年內，构形定理的研究兴趣轉到代数化。这个原因，将在这本小册子的最后一节作某种程度的解釋。

构形定理用来研究多角形的某些性质和解决某些問題甚为有效，特别有效的是用它来解决在不同限制的条件下的作图問題。例如，单用直尺作图、在平面的有限区域內的作图、不可达到的点的作图，等等。

請讀者画一个三角形 ABC，幷在形內取一点 O，延长这点与三角形三頂点的連綫，使与对边分别交于 P, Q, R 三点(图3)。設 U 是直綫 AB 和 PQ 的交点，V 是直綫 AC 和 PR 的交点，W 是直綫 BC 和 QR 的交点。若是把所有的这些点画在一张图上，图作得也很精确，那末，你可以拿尺子比比看，所得出的三点 U, V, W 是在一条直綫上的。再画一些三角形，变动点 O 的位置，得的結果还是一样。

如果 $BC \parallel QR$，則 $UV \parallel QR$。如果与 $BC \parallel QR$ 的同时，还有 $AC \parallel PR$，則毫无疑問，$AB \parallel PQ$。

很难想象这許多事实是出于偶然的。想必这里有規律性，应該有某一定理成立。这定理的結論是說："点 U, V, W 在一

直線上"。

共点判断定理在中学課程里已經遇到过了，讀者只要回忆一下关于三角形的几个著名点的定理，即可知道。但是，与那些定理不同，在我們的定理的条件里，无須說边和角的大小。在我們的定理的条件里或是結論里，光說到点和直綫的相互位置关系。这样的定理叫做**构形定理**。

上面提到的构形定理，現在可写成这样：

如果三角形PQR的三頂点分別在三角形 ABC 的三边上，而且直綫 AP, BQ, CR 共过一点，直綫AB和 PQ，AC 和PR，BC 和 QR 分別交于 U, V, W 三点，則 U, V, W 在一直綫上。

要想得到証明构形定理的可能性，必須首先认識一下中心射影运算，以及"反常的"或"无穷远的"点①和直綫的概念。

§ 1. 中心射影和反常元素

先考察在平面上的中心射影。

設已給直綫 l 和这直綫外的一点 S(图 4)。如有一点 A，使 $AS \not\parallel l$，則直綫 SA 交直綫 l 于某一点 A'。这点叫做 A 的**射影**。設 m 是一条通过点 S 且平行于 l 的直綫。那末显然，平面上不在直綫 m 上的任一点 B 都有确定的射影 B'。这样来說，我們借用点 S 把平面上的点**映射**到直綫 l 上的点，这种映射称为**中心射影**，点 S 称为**射影中心**。

假如选择某一直綫 k，不通过点 S，則中心射影把直綫 k 上的点映到直綫 l，如果 $k \not\parallel l$，射影不是直綫 k 的所有点。在图 5 上的点 X，其中 $SX \parallel l$，就沒有射影。考察图 5，不难看到，除了点 X 以外，例外的点还有点 Y'，其中 $SY' \parallel k$。事实上，

① 反常点(直綫)，也有人叫做理想点(直綫)，或假点(直綫)——譯者註。

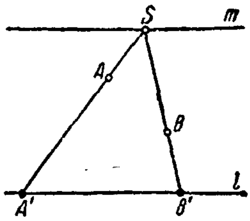

图 4

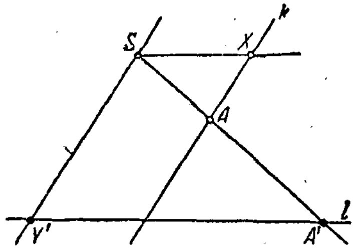

图 5

与直綫 l 上的其他点不同，在直綫 k 上沒有投射到 Y' 的点。

为了給例外的点具有与其他的点相同的地位，我們約定，在正常点之外，每一直綫均賦予以一**反常点**。

我們还約定，平行直綫有同一反常点。这样，点 X 就有了射影，它的射影就是直綫 l 上的反常点。同样点 Y' 乃是直綫 k 上的反常点的射影。注意，在直綫 $k \parallel l$ 的情况下(而且 k 通过点 S。——譯者註)，它們的共同反常点就是自己的正常点的射影。

轉而注意下面的事实。如果点 A 从左方趋近于点 X (在图 6 上点 A 取 A_1, A_2, A_3 等位置)，則它在直綫 l 上的射影愈来愈远地向右方走去。因此反常点也叫**无穷远点**。再注意当点 A 从右方趋近于点 X 时(在图 6 上点 A 取 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ 等位置)，它的射影向左方走去。因此应該认为在每条直綫上只有一个无穷远点，而直綫本身是封閉的。

补充了反常点的直綫，叫做**射影直綫**。我們約定，所有的反常点在一条**反常**射影直綫上，这条直綫有时也叫做**无穷远直綫**。补充了反常点和反常直綫的平面叫做**射影平面**。

射影直綫"类似于"圓周。事实上，我們可以把圓上的每一点与射影直綫上的点对应，使得圓上的不同的点对应射影直綫的不同的点。映射

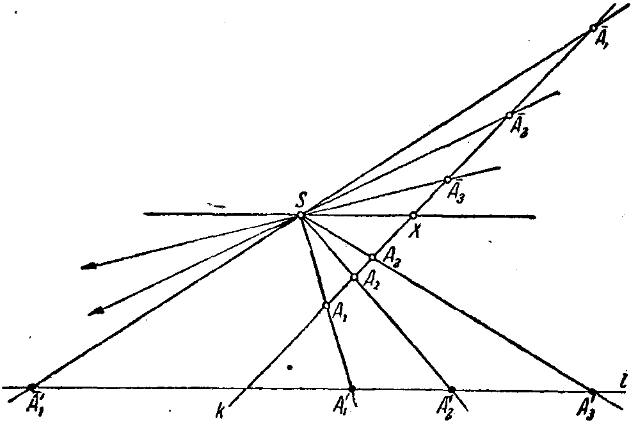

图 6

的方法从图7上看是很明显的，但須再补充，点 O 映射到自己，点 S 映射到无穷远点。

引进反常点之后，便能把构形定理的例外情况熔合在一般的叙述里。在引言里我們所考慮的那个定理，假如决定 U, V, W 三点的某些直綫平行，例外情况就发生了。这是說，对应的点变成了无穷远点。这时有下列的可能情况：

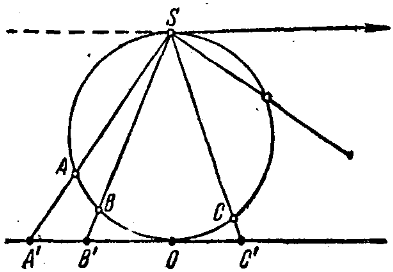

图 7

а) $BC \parallel QR$, $AC \parallel PR$;

б) $BC \parallel QR$, $AC \nparallel PR$;

в) $BC \parallel QR$, $AB \parallel PQ$;

г) $BC \parallel QR$, $AB \nparallel PQ$;

д) $AB \parallel PQ$, $AC \parallel PR$;

e) $AB \parallel PQ$, $AC \nparallel PR$。

正如以前提到的，在情况 б)中，必有 $UV \parallel QR$。在这种情况下，点 W 是反常点。这时由 $UV \parallel QR$ 可推知直綫 UV 通过点 W，亦即点 U, V, W 在一直綫上。在情况 a)中，必有 $AB \parallel PQ$，即三点 U, V, W 都是反常点，因而在一反常直綫上。类似的情形出現在其他的情况中。

現在証明关于射影直綫的某些基本定理。

定理 1。通过任意二不同点(正常点或反常点)有一条且只有一条射影直綫。

可能有三种情况：(1)二点是正常点；(2)二点是反常点；(3)一点是正常点，一点是反常点。

在第一种情况下，我們想起，按照初等几何的公理，通过二不同点有一且只有一直綫。因为反常直綫不包含正常点，所以它不能連接已給的两点。定理証明了情况(1)。

在情况(2)中，我們的两点是以无穷远直綫連接起来的。因为所有其他的直綫只包含一个反常点，所以任何其他直綫都不能包含这两个已給的点。

在情况(3)中，命 A 表正常点，B 表反常点。設点 B 被某一直綫 k 决定(而且可以在图上給出来)。只有当 l 是平行于 k 且为通过点 A 的正常直綫时，射影直綫 l 才是連接点 A 和 B 的。这样的直綫，大家知道，是存在的。根据平行公理，可知它是唯一的。

定理 1 得証。

定理 2。二不同射影直綫交于一点，且只一点(正常点或反常点)。

(在看証明之前，讀者試自行証明。)

为了証明定理 2，我們首先注意有两种假定是可能的：(1)二直綫是正常的；(2)一直綫是正常的，另一直綫是反常的。两条都是反常直綫沒有可能，因为按照我們的約定，在平面上只有一条无穷远直綫。

如果两条正常直綫不平行，它們有一个公共的正常点；如果两条直綫平行，它們有唯一的公共反常点。

在第二种情况，正常直綫的反常点是两条直綫唯一的公共点。

现在来考虑空間的中心射影。

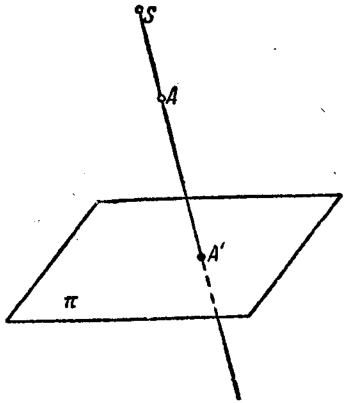

图 8

假設給定了平面 π 和在这平面之外的一点 S(图 8)。直綫 SA 与平面 π 的交点 A' 叫做点 A 在平面 π 上的**射影**。和平面的情况一样，点 S 叫**射影中心**。注意，与平面 π 平行且通过点 S 的平面 τ 上的所有点映射到平面 π 上的无穷远直綫。

平面 π，即布置点的射影的平面，今后約定叫做**射影平面**。

定理 3. 位于一直綫上的諸点的射影，仍位于一直綫上。

为了証明，我們假定有三点 A, B, C 位于一直綫 a 上（图 9）。那末直綫 SA, SB, SC 同时位于由 S 和 a 决定的平面 σ 上。如果平面 σ 和 π 不平行，則既在平面 σ 又在平面 π 的点 A', B', C' 位于二平面的交綫上。

如果平面 π 和 σ 平行(图 10)，我們考虑直綫 SA 上的反常点(平面 σ 和 π，我們默认是射影的)。这个反常点也应該属于在平面 π 上每条平行于直綫 SA 的直綫。所以在这种情况下

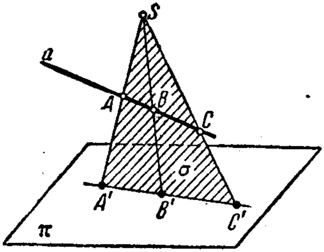

图 9

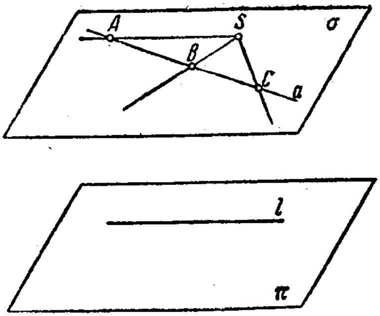

图 10

点 A 的射影将为平面 π 上的反常点 A'。而 B 点和 C 点的射影也是 π 平面上的反常点。由于所有在平面 π 上的反常点，按定义，位于一直綫上，所以当平面 σ 和 π 平行时的情况定理 3 是对的。

§ 2. 巴巴—巴斯加定理

巴巴·亚力山得里斯基是公元三世紀后半叶的古希腊数学家。在巴巴的著作«数学汇集»中可以发現有很多希腊作家的成果迄今我們还未收集到。因此这篇著作是古希腊数学史上的宝貴史料。

伯力兹·巴斯加(1623—1662)是傑出的法国数学家、物理学家兼哲学家。最初的数学培养得自他父亲的教导。他父亲是有名的数学家埃契那·巴斯加。在十六岁时巴斯加自己写下了第一篇科学論文。在这篇文章里他証明了在这一节要讲的巴巴—巴斯加定理中的一个特例，虽則这个不应用反常点的特例，早已为巴巴·亚力山得里斯基所知。巴斯加的数学兴趣不限于几何学。他研究过求和計算机的設計，写过許多关于算术、代数、数論和概率論的論文。特别是，他精确地确定并应用了完全数学归納法。在物理学上，他从事研究过气压表的压强和流体靜力学的問題。例如，他发現了流体靜力学的基本定律，这个定律是說：由外力产生的流体表面的压强，能够不减弱地被流体向各方传递。

我們把平面上标以 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个不同点与連接点 1 和 2，2 和 3，$\cdots n-1$ 和 n，n 和 1 的 n 条直綫所成的图形叫做 **n 点形**。已知点叫做 n 点形的**頂点**，依次連接頂点的直綫叫做 n 点形的**边**。显然，n 点形跟 n 角形的区别仅在于前者的边是直綫，而不是綫段。如果点 A, B, C, D, E, F 在所說的次序下作成六点形，頂点 A 和 D，B 和 E，C 和 F，即每隔两个頂点的頂点，叫做**对頂点**。連接六点形对应对頂点的二边，叫做六点形的**对边**。此处所述六点形 $ABCDEF$ 的对边乃是 AB 和 DE，BC 和 EF，CD 和 FA。

巴巴—巴斯加定理表示頂点在某种特殊分布下的六点形的一个奇妙的性质。

巴巴—巴斯加定理　如果六点形的頂点輪流位于二直綫上，则它的对边的交点位于一直綫上。

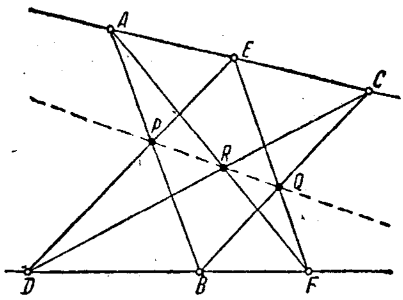

图 11

即使认为六点形的頂点都是正常的点，也只能在引进反常点和直綫的条件下，才能得到定理的这样簡单的表达形式。若不用反常元素，定理的結論势必要分三种独立的情况来讲：

第一种情况：六点形的对边对对相交，而且它們的交点（图11 上的 P, Q, R）位于一直綫上。

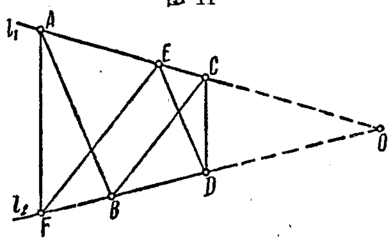

图 12

第二种情况：六点形的对边两两平行(图 12)。

第三种情况：六点形的两对对边交于 P, Q 二点，第三对对边平行于直綫 PQ(图 13)。

反常元素能够把上述三种情况合成一种表述。因为在第二种情况下，三对对边的交点都是反常点，所以它們在已知平面的反常直綫上。在第三种情况下，第三对对边的交点属于直綫 PQ，因为二平行直綫认为有一公共反常点。

除此之外，可以証明，不論六点形的哪些頂点是反常点，巴巴—巴斯加定理还是成立的。当然，对于所有的这些情况，如不引进反常点，也可以表述定理。但是，这要分多少种情况呢！不但如此，对于每种情况还要单独进行証明！

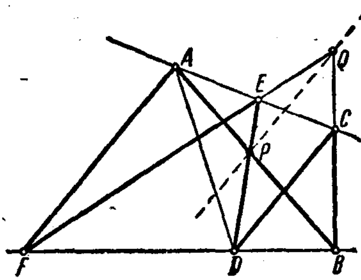

图 13

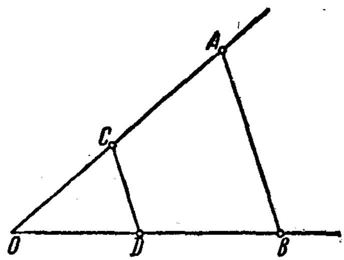

图 14

在証明巴巴—巴斯加定理之前，我們証明下面的一个輔助命題，这命題后面要用到的。

引理 1. 在角 AOB 的边 OA 上取綫段 OC，在边 OB 上取綫段 OD，使 $OA:OB=OC:OD$，则 $AB \parallel CD$ (图 14)。

因为在三角形 AOB 和 COD 中，角 O 是公共的，而这角的二夾边成比例，那末这两三角形必相似了。据此，角 OCD 和角 OAB 相等，因之 $CD \parallel AB$。

現在証明巴巴—巴斯加定理的第二种情况。假設給定了

$AB \parallel DE, BC \parallel EF$。求証 $AF \parallel CD$。如果六点形的頂点所在的二直綫 l_1, l_2 平行(图 15)，則由条件可知 $BF=CE, BD=AE$，这因为它們是平行四边形的二对边。因此綫段 AC 和 DF 也相等。所以 $ACDF$ 是平行四边形，即 $AF \parallel CD$。如果直綫 l_1 和 l_2 交于一点 O（参考图 12)，則由于相似三角形的关系，得

$$OC:OE=OB:OF, \quad OE:OD=OA:OB。$$

将上二式相乘，得 $OC:OD=OA:OF$。由最后一式。应用引理 1，得知 $AF \parallel CD$。这样来説，我們証明了，如果滿足

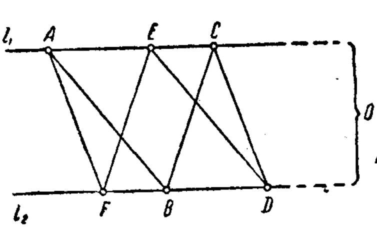

图 15

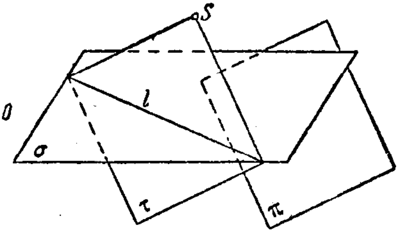

图 16

巴巴—巴斯加定理的条件的六点形的两对对边平行，則第三对对边也平行。

再証明一个輔助命題：

引理 2。若 l 是平面 σ 上的任一直綫，則存在这样的射影中心 S 和平面 π，使得直綫 l 的射影成为平面 π 的反常直綫。这里的平面 π 是平行于通过点 S 和直綫 l 的平面 τ。

为了証明，我們选择不在平面 σ 上的一点 S 作为射影中心(图 16)。通过点 S 和直綫 l 作平面 τ(可能直綫 l 是反常直綫，这也不必顾虑，因为在这种情况下，通过 S 和 l 的平面，即是通过 S 而平行于平面 σ 的平面)。令 π 是平行于 τ 但不通过 S

的某一平面。如果 A 是直綫 l 上的一点，則直綫 SA 在平面 τ 上，因此它平行于平面 π。这是說，A 投射到平面 π 的反常点。因为这种說法对直綫 l 上的任意一点都对，所以我們所选择的点 S 和平面 π 滿足了引理的結論。

現在回到巴巴—巴斯加定理的証明。

命已知六点形所在的平面为 σ，把直綫 PQ 記以 l(图17)。按引理 2，可以找到这样的射影中心 S 和射影平面 π，使得直綫 l 的射影是平面 π 的反常直綫。这时由点 S 和直綫 PQ 所决定的平面 τ 是平行于 π 的。

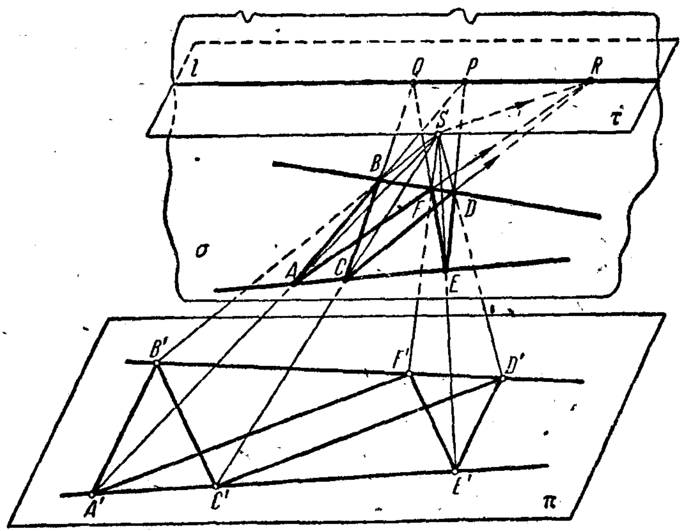

图 17

把六点形各頂点的射影記作 A', B', C', D', E', F'，把 P, Q, R 各点的射影記作 P', Q', R。因为点 P 在直綫 AB 和 DE 上，則依照定理 3，可知点 P' 在直綫 $A'B'$ 和 $D'E'$ 上。同理