附：全国统一考试试卷解析 考试预测试卷

离散数学

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

卞秋菊/主编

计算机及应用专业（独立本科段）

M F E B

朝

新编本

双色印刷

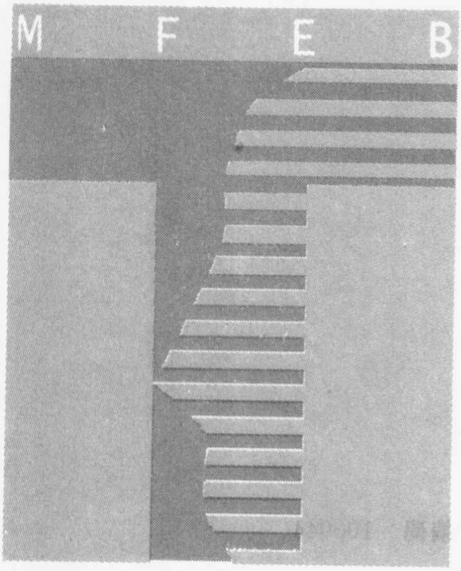
TERRACE

离散数学

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

主编 卞秋菊
副主编 付军



计算机及应用专业(独立本科段)

朝华出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/卞秋菊主编. —北京:朝华出版社,2003.9

(高等教育自学考试同步辅导·同步训练)

ISBN 7-5054-0834-8

Ⅰ.离…　Ⅱ.卞…　Ⅲ.离散数学—高等教育—自学考试—自学参考资料　Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 076108 号

离散数学

主　　编	卞秋菊
责任编辑	顾　珺　凌舒昉
特约编辑	吴伶芝
封面设计	朱　珊
责任印制	赵　岭
出版发行	朝华出版社
社　　址	北京市车公庄西路 35 号　**邮政编码** 100044
电　　话	(010)68433166
	(010)68413840/68433213(发行部)
传　　真	(010)88415285
印　　刷	北京高岭印刷有限公司
经　　销	全国新华书店
开　　本	16 开　**字　　数** 244 千字
印　　数	0—10000　**印　　张** 9.75
版　　次	2003 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
装　　别	平
书　　号	ISBN 7-5054-0834-8/G.0270
定　　价	16.00 元

说　明

本书是全国高等教育自学考试指定教材《离散数学》（计算机及应用专业——独立本科段）的配套辅导用书。

梯田品牌自考系列丛书，由于其独具的特点和卓越的品质深得全国各省、市教委、学校和广大自考师生的好评和认可，全国每年约有 800 万人次的考生使用本品牌，销量居全国同类书之榜首，被誉为**最受欢迎的自考辅导丛书**。

本书的编写依据：

全国高等教育自学考试指导委员会组编的指定教材《离散数学（附：离散数学自学考试大纲）》（左孝凌主编，经济科学出版社出版）。

本书特点：

1. 本书在编写过程中，严格以考试大纲为依据，以指定教材为基础。充分体现**“在考查课程主体知识的同时，注重考查能力尤其是应用能力”**的新的命题指导思想。

2. 全书完全依照指定教材的结构，以章为单位。每章设**“内容提示”、“同步练习”、“参考答案”**三部分。“内容提示”主要是对各章的重点、要点内容的总结归纳；“同步练习”则根据考试大纲对各知识点不同能力层次的要求，将知识点及知识点下的细目以各种主要考试题型的形式编写，覆盖全部考核内容，适当突出重点章节，并且加大重点内容的覆盖密度；“参考答案”是对“同步练习”中所有试题的解答。

3. 精心设计的两套**考试预测试卷**，不仅题型、题量均严格与最新全国统考试卷对照，保持一致，而且从其内容、难度和广度亦全面预测考试趋向。

4. 所附的**最新全国统考试卷**为考生获知考试原卷、增强感性认识、把握考试动向提供准确的信息。

5. **人性化处理模式**。精心进行了版式设计，采用**国际流行开本**，同时采用**双色印刷**，利于考生翻阅学习。

本书可供参加高等教育自学考试集体组织学习或个人自学使用，也可供相关专业人士参加其他考试使用。

编写高质量的全国高等教育自学考试辅导用书，是社会助学的一个重要环节。毫无疑问，这是一项艰难而有意义的工作，需要社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

敬请读者批评指正。

编　者

2003 年 9 月

目　录

第1章 命题演算

内容提示

数理逻辑的任务是采用数学方法研究抽象的思维规律，研究的中心问题是推理，而推理的基本要素是命题，故学习本章首先要深刻理解命题的概念，理解原子命题与复合命题的关系，在理解复合命题的基础上，理解联结词的定义。命题演算中两个重要内容是命题公式的范式表示与命题的推理理论，前者主要是命题公式化简与主范式表示，后者则需熟悉直接推理与间接推理两种方法。

本章重点是命题概念及其表示、命题公式化简、主范式及其互化、P规则、T规则以及CP规则。难点是推理理论及其应用。

一、命题概念

本节主要讲述命题的概念：命题是一个能分辨真假的陈述句。

命题的真假用真值描述。如果一个命题是真的，其真值为真，用 T 或 1 表示；如果一个命题是假的，其真值为假，用 F 或 0 表示。

表示命题的符号称为命题标识符，一般用大写字母 A，B，…，P，Q，…或用带下标的大写字母或数字表示。

一个命题标识符 P 如果表示确定命题，就称为命题常量，否则称为命题变元。当命题变元 P 用一特定的命题去代替时，称为对 P 的指派。

二、复合命题与联结词

本节主要讲述原子命题与复合命题的定义和五个联结词及其真值表。

1. 原子命题：一个不能再分解为更简单的命题，称为简单命题或原子命题。

例 “今天是晴天”是一个原子命题。

2. 复合命题：由原子命题和联结词复合而成的命题称为复合命题。

例 “北京既是中国的政治中心又是文化中心”是一个复合命题。

3. 五个联结词：否定($\neg$)、合取($\wedge$)、析取($\vee$)、条件($\rightarrow$)、双条件($\rightleftarrows$)。一般来说命题联结词与自然语言中的某些词汇有一定的联系。

(1)否定($\neg$)相当于自然语言中的：非、不是、没有等否定词。P 和 $\neg P$ 的真值正好互反，即 P 为 T，则 $\neg P$ 为 F；P 为 F，则 $\neg P$ 为 T。

(2)合取($\wedge$)相当于自然语言中的：并且、既……又……、和、以及、不仅……而且……、虽然……但是……、与等词汇的逻辑抽象。

当且仅当 P 和 Q 都为 T 时，$P\wedge Q$ 的真值才为 T，其他情况 $P\wedge Q$ 的真值都为 F。

(3)析取($\vee$)相当于自然语言中的“或”的逻辑抽象。当且仅当 P 和 Q 都为 F 时，$P\vee Q$ 的真值才为 F，其他情况 $P\vee Q$ 的真值都为 T。

(4)条件($\rightarrow$)相当于自然语言中的：如果……那么……、若……则……、必须……以便……等词汇的逻辑抽象。

当且仅当 P 为 T 和 Q 为 F 时，$P \rightarrow Q$ 的真值才为 F，其他情况 $P \rightarrow Q$ 的真值都为 T。

$P \rightarrow Q$ 也可表述为 P 是 Q 的充分条件。

(5)双条件($\leftrightarrows$)相当于自然语言中的：当且仅当、相当于、……和……一样、等价、要且仅要等词汇的逻辑抽象。

当且仅当 P 和 Q 都为 T 或 F 时，$P \leftrightarrows Q$ 的真值为 T，其他情况 $P \leftrightarrows Q$ 的真值都为 F。

注意 五个联结词之结合能力的强弱顺序为否定($\urcorner$)、合取($\wedge$)、析取($\vee$)、条件($\rightarrow$)、双条件($\leftrightarrows$)，但必须注意 $\wedge$、$\vee$ 两者之间以出现先后为序。

4. 命题符号化

将命题符号化的基本步骤如下：

(1)分析出各原子命题，将它们符号化；

(2)使用合适的命题联结词，把原子命题逐个联结起来，组成复合命题的符号化表示。

例 北京既是中国的政治中心又是文化中心。

解 设 P：北京是中国的政治中心； Q：北京是中国的文化中心。

则命题可表示为：$P \wedge Q$。

三、命题公式与真值表

1. 命题公式(或简称公式)：命题公式是 T、F 和命题变元以及由它们与联结词按一定的规则产生的符号串，递归定义如下：

(1)T、F 是命题公式；

(2)单个命题变元本身是命题公式；

(3)如果 A 是命题公式，则 $\urcorner A$ 是命题公式；

(4)如果 A 和 B 是命题公式，则 $A \wedge B$、$A \vee B$、$A \rightarrow B$、$A \leftrightarrows B$ 都是命题公式；

(5)有限次地应用(1)～(4)所得到的包括命题变元、联结词和圆括号的符号串是命题公式。

注意 命题公式不是命题，只有在命题公式中的每一个命题变元用指定的命题常量代替后，命题公式才有确定的真值，成为命题。

2. 真值指派：给命题公式 P 所包含的所有命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 指定一组真值，称为对 P 的一种真值指派。真值 T、F 可分别用 1 和 0 代替。

含 n 个命题变元的命题公式，一共有 2^n 组真值指派。

3. 真值表：将命题公式 P 在所有真值指派下的取值情况列成表，称为 P 的真值表。在真值表中，真值 T、F 可分别用 1 和 0 代替。

4. 命题公式类型

(1)永真式(或重言式)：若命题公式 P 在所有真值指派下取值均为真，则称命题公式 P 为永真式(或重言式)。

(2)永假式(或矛盾式)：若命题公式 P 在所有真值指派下取值均为假，则称命题公式 P 为永假式(或矛盾式)。

(3)可满足式：若至少存在一种真值指派，使命题公式 P 取值为真，则称命题公式 P 为可满足式。

5. 两个公式等价：给定两个命题公式 P 和 Q，设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为所有出现于 P 和 Q 中的命题变元，若给定 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 任一组真值指派，P 和 Q 的真值都相同，称 P 和 Q 是等价的，记作 $P \Leftrightarrow Q$。

对一个给定的公式，可利用真值表的方法判定它是何种类型的公式。

6. 常用的命题定律：

(1)对合律：$\urcorner\urcorner P \Leftrightarrow P$

(2)幂等律：$P\vee P\Leftrightarrow P, P\wedge P\Leftrightarrow P$

(3)结合律：$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$

$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$

(4)交换律：$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P \quad P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$

(5)分配律：$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

(6)吸收律：$P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P, P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$

(7)德摩根律：$\urcorner(P\vee Q)\Leftrightarrow\urcorner P\wedge\urcorner Q, \urcorner(P\wedge Q)\Leftrightarrow\urcorner P\vee\urcorner Q$

(8)同一律：$P\vee F\Leftrightarrow P, P\wedge T\Leftrightarrow P$

(9)零律：$P\vee T\Leftrightarrow T, P\wedge F\Leftrightarrow F$

(10)否定律：$P\vee\urcorner P\Leftrightarrow T, P\wedge\urcorner P\Leftrightarrow F$

四、等价变换与蕴含式

1. 等价变换的定义：等价变换就是利用已知的一些基本等值公式，根据置换和代入规则推导出另一些等值公式的过程。用等值演算的方法还可以化简一些复杂的公式。

2. 等价变换的性质：

(1)置换性质：设 X 是合式公式 A 的子公式，若 Y 也是一个合式公式，且 $X\Leftrightarrow Y$，如果将 A 中的 X 用 Y 置换，得到公式 B，则 $A\Leftrightarrow B$；

(2)设 A、B 为两个命题公式，$A\Leftrightarrow B$，当且仅当 $A\leftrightarrows B$ 为一个重言式(或永真式)。

3. 证明任意两个命题公式 A,B 等值的方法：

(1)真值表法：利用真值表验证 $A\leftrightarrows B$ 为一个重言式；

(2)等值演算法：利用等价变换证明两个公式 A,B 等值，可以从其中任一个开始进行等值演算，一般从较复杂的公式开始，也可以对两个公式 A 和 B 分别进行等值演算，如果能将这两个公式都等值推演为同一个公式，那么由等值关系的传递性即可知这两个公式等值。

另外，用等值演算的方法可以判别命题公式的类型。

4. 蕴含式的定义：当且仅当 $P\rightarrow Q$ 是一个重言式时，则称"P 蕴含 Q"，记作 $P\Rightarrow Q$。

5. 蕴含式的性质：

(1)对任意公式 A，有 $A\Rightarrow A$；

(2)对任意公式 A,B 和 C，若 $A\Rightarrow B, B\Rightarrow C$，则 $A\Rightarrow C$；

(3)对任意公式 A,B 和 C，若 $A\Rightarrow B, A\Rightarrow C$，则 $A\Rightarrow(B\wedge C)$；

(4)对任意公式 A,B 和 C，若 $A\Rightarrow C, B\Rightarrow C$，则 $A\vee B\Rightarrow C$。

6. 等值式和蕴含式的关系：设 P,Q 为任意两个命题公式，则 $P\Leftrightarrow Q$ 的充分必要条件是 $P\Rightarrow Q$，且 $Q\Rightarrow P$。

7. 判定蕴含式 $P\Rightarrow Q$ 成立的方法：

(1)直接用真值表证明 $P\rightarrow Q\Rightarrow T$；

(2)用等值演算证明 $P\rightarrow Q\Rightarrow T$；

(3)假定前件 P 为真，验证在此情况下，其后件 Q 是否为真，这是因为由条件联结词的真值表知，在 P 为真的情况下，$P\rightarrow Q$ 为真当且仅当 Q 为真；

(4)假定后件 Q 为假，验证前件 P 是否也为假，同样因为由条件联结词的真值表知，在 Q 为假的情况下，$P\rightarrow Q$ 为真当且仅当 P 为假。

五、最小联结词组与范式

1. 最小联结词组：称$\{\neg,\wedge\}$及$\{\neg,\vee\}$为命题公式的最小联结词组。

2. 合取范式的定义：一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geqslant 1)$$

其中，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元及其否定所组成的**析取式**。

例如，$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P)$是一个合取范式。

3. 析取范式的定义：一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geqslant 1)$$

其中，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元及其否定所组成的**合取式**。

例如，$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R) \vee (\neg R \wedge P)$是一个析取范式。

4. 布尔合取或小项的定义：n 个命题变元的合取式称为小项，其中每个变元和它的否定不能同时存在，但二者必须出现且仅出现一次。

例 两个命题变元 P 和 Q 的所有小项为$\neg P \wedge \neg Q, \neg P \wedge Q, P \wedge \neg Q, P \wedge Q$。

一般 n 个命题变元一共有 2^n 个小项，每个小项可以通过二进制进行编码，具体方法如下：

首先将 n 个命题变元排序，把每个命题变元对应于 1，将命题变元的否定对应于 0，则可将 2^n 个小项按二进制数进行编码，记为 m_i。其下标 i 是将小项所对应的二进制数化为十进制数的那个数。如两个变元 P 和 Q 的所有小项$\neg P \wedge \neg Q, \neg P \wedge Q, P \wedge \neg Q, P \wedge Q$ 分别对应于 $m_{00}, m_{01}, m_{10}, m_{11}$。

5. 布尔析取或大项的定义：n 个命题变元的析取式称为大项，其中每个变元和它的否定不能同时存在，但二者必须出现仅出现一次。

一般 n 个命题变元的大项一共也有 2^n 个。同小项一样，每个大项也可以通过二进制进行编码，具体方法如下：

首先将 n 个命题变元排序，把每个命题变元对应于 0，将命题变元的否定对应于 1，则可将 2^n 个大项按二进制数进行编码，记为 M_i，其下标 i 是将大项所对应的二进制数化为十进制数的那个数。如两个变元 P 和 Q 的所有大项$\neg P \vee \neg Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, P \vee Q$ 分别对应于 $M_{11}, M_{10}, M_{01}, M_{00}$。

6. 主析取范式的定义：对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称为原式的主析取范式。

7. 主合取范式的定义：对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称为原式的主合取范式。

8. 求主析取范式和主合取范式的方法

(1)**真值表法**：在一个公式的真值表中，一个公式的真值为 T 的指派所对应的小项的析取，即为该公式的主析取范式；这个公式的真值为 F 的指派所对应的大项的合取，即为该公式的主合取范式。

(2)等值演算法。其步骤如下：

1)利用等值公式 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$和 $P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$消去公式中的$\rightarrow$和$\rightleftarrows$；

2)利用德摩根律将公式中的$\neg$向内深入，使之只作用于命题单元；

3)利用双重否定律将$\neg(\neg P)$置换成 P；

4)利用分配律将公式变成所需要的范式。

注意 根据主范式也可以判定命题公式的类型，若公式 P 的主范式由 2^n 个小项组成，则公式 P 是永真式；若公式 P 的主范式由 2^n 个大项组成，则公式 P 是永假式；若公式 P 的主范式由少于

2^n 个小项或大项组成，则公式 P 是可满足式。

六、推理理论

1. 结论的有效性：设 $H_1,H_2,\cdots,H_n,C$ 是命题公式，当且仅当 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow C$，称 C 是一组前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 的有效结论，或称从前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 能推出有效结论 C。有时也记作 $H_1,H_2,\cdots,H_n\Rightarrow C$。

2. 证明结论有效的方法：判别有效结论的过程就是论证过程，其方法有很多种，**最主要方法有直接证法和间接证法**，直接证法主要有：

(1) **真值表法**：将推理过程符号化，得到相应的前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 和结论 C，利用真值表证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow C$ 是否为真。

(2) **主范式方法和等值演算法**：将推理过程符号化，得到相应的前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 和结论 C，然后由这组前提，利用推理规则，并根据已知的等值公式和蕴含公式推导出有效结论。

常用的推理规则如下：

1) **前提引入规则**：在证明的任何步骤上，都可以引入前提，简称 P 规则；

2) **结论引入规则**：在证明的任何步骤上，所证明的结论都可作为后续证明的前提，称为 T 规则；

3) **置换规则**：在证明的任何步骤上，命题公式中的任何子命题公式都可以用与之等值的其他命题公式置换，也称为 T 规则；

4) **蕴含证明规则**：如果能够从 Q 和前提集合 P 中推导出 S 来，则就能从前提 P 中推导出 $Q\rightarrow S$ 来，称为 CP 规则。

我们把由一组前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$，根据推理规则、已知的等价公式和蕴含公式推演出的结论，即命题公式 C，记作

$$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\vdash C;$$

或

$$H_1,H_2,\cdots,H_n\vdash C。$$

间接证法：间接证法即常用的反证法。也就是把结论的否定作为假设（附加前提），与给定的前提一起作为前提集合进行推证，若能推出矛盾，则结论是有效结论。即是若

$$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\wedge\neg C\Rightarrow S\wedge\neg S,$$

则

$$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow C,$$

其中 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是前提，C 是由前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 推出的结论，S 是任一命题公式。

同步练习

一、单项选择题

1. 指出下列语句中是命题的是

A. 今天是晴天。　　B. 你身体好吗？

C. 我真高兴。　　D. 请勿吵闹。　　【　】

2. $(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow S$ 的合取范式是

A. $(\neg P\vee S\vee Q)\wedge(\neg P\vee S\vee\neg R)$　　B. $(\neg P\vee S\vee Q)\vee(\neg P\vee S\vee\neg R)$

C. $(\neg P\vee S\vee Q)\wedge(P\vee S\vee R)$　　D. $(P\vee S\vee Q)\vee(P\wedge S\vee\neg R)$　　【　】

二、填空题

1. 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称作原式的__________。

2. $p \wedge q \vee r$ 的主合取范式是__________。

三、计算题

1. 给定以下 15 个语句：

(1)大熊猫是中国的国宝。

(2)美国不位于南美洲。

(3)15 是 2 的倍数，3 是素数。

(4)$5x+7>6$。

(5)你下午有会吗？若无会，请到办公室来一下。

(6)2 和 3 都是素数。

(7)2 和 4 中有且只有一个是素数。

(8)王琦与李斌是同学。

(9)这朵花真美丽！

(10)圆的面积等于半径的平方乘以 π。

(11)数 a 是偶数当且仅当它能被 2 整除。

(12)只有 4 是偶数，3 才能被 2 整除。

(13)除非 6 能被 4 整除，6 才能被 2 整除。

(14)明年十月一号是晴天。

(15)若 4 是素数，则 3 是偶数。4 是素数。所以 3 是偶数。

以上 15 个语句中：

1)哪些是命题？

2)哪些是简单命题？哪些是复合命题？

3)哪些是真命题？哪些是假命题？哪些命题的真值是待定的？（真值客观存在，只是现在不知道）

2. 给定下面 8 个命题公式：

(1)$(p \wedge q) \to (p \vee q)$；

(2)$(\neg p \vee \neg q) \to (\neg p \wedge \neg q)$；

(3)$(\neg(q \to p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r)$；

(4)$p \wedge q \wedge r$；

(5)$(p \to q) \wedge r$；

(6)$(\neg p \vee q) \wedge r \wedge (p \wedge q \to q)$；

(7)$q \to (p \to r)$；

(8)$(q \to p) \to r$。

要求：

1)用真值表法证明(1)与(2)不等值；

2)用等值演算法证明(3)与(4)等值；

3)用主析取范式法证明(5)与(6)等值；

4)用主析取范式法证明(7)与(8)不等值。

3. 给定下面3个简单命题：

p:北京比天津人多； q:2大于1； r:15是素数

求下列各复合命题的真值：

(1)$(q\vee r)\rightarrow(p\rightarrow\urcorner r)$；

(2)$((p\rightarrow\urcorner q)\vee(\urcorner p\wedge q))\rightarrow r$；

(3)$(\urcorner q\vee r)\rightleftarrows(p\wedge r)$；

(4)$(q\rightarrow\urcorner p)\rightleftarrows(p\rightleftarrows r)$；

(5)$(q\rightarrow p)\rightarrow((p\rightarrow\urcorner r)\rightarrow(\urcorner r\rightarrow\urcorner q))$。

4. 一个公安人员审查一件盗窃案，已知下列事实：

(1)甲或乙盗窃了录像机；

(2)若甲盗窃了录像机，则作案时间不能发生在午夜前；

(3)若乙的证词正确，则午夜时屋里灯光未灭；

(4)若乙的证词不正确，则作案时间发生在午夜前；

(5)午夜时屋里电灯光灭了。

试问：盗窃录像机的是甲还是乙？

5. 判断下列语句是否为命题：

(1)北京是中国的首都。

(2)所有的树木都是植物。

(3)雪是黑色的。

(4)请勿吸烟！

(5)这个男孩多聪明呀！

(6)今天下午开会吗？

6. 分析下列语句哪些是命题？哪些不是命题？如果是命题，指出其真值。

a)北京是中国的首都。

b)上海是全国人口最多的城市。

c)今天天气多么好啊！

d)$11+1=100$。

e)雪是黑的，当且仅当$5>0$。

f)全体起立！

g)不存在最大素数。

h)$x+y\geqslant 16$。

i)白色加红色可以调成粉红色。

j)明天你去看电影吗？

k)火星上有生物。

7. 试给出三个语句是真命题，三个语句是假命题，三个语句不是命题的实例。

8. 将下列命题符号化：

a)小李不但聪明而且用功。

b)昨天晚自习时小赵做了二三十道数学题。

c)如果天下大雨，他就在体育馆内锻炼。

d)除非天下大雨，否则他不在室内运动。

e)不经一事，不长一智。

9. 将下列复合命题分成若干原子命题：

a)今天天气炎热，且有雷阵雨。

b)如果你不去比赛，那么我也不去比赛。

c)我既不看电视，也不去看电影，我准备做作业。

d)四边形 $ABCD$ 是平行四边形，当且仅当它的对边平行。

10. 试给出四个语句，符号化后分别是合取式、析取式、条件式和双条件式。

11. 判断下列公式哪些是合式公式？哪些不是合式公式？

a)$(Q \to R \wedge S)$；

b)$(P \leftrightarrows R \to S))$；

c)$((\neg P \to Q) \to (Q \to P))$；

d)$(RS \to K)$；

e)$((P \to (Q \to T)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$。

12. 根据定义，说明下列公式如何形成合式公式：

a)$(A \to (A \wedge B))$；

b)$((\neg A \wedge B) \wedge A)$；

c)$((\neg A \to B) \vee (B \to A))$。

13. 设 P、Q 的真值为 0；R、S 的真值为 1；求下列各命题公式的真值：

a)$P \vee (Q \wedge R)$；

b)$(P \leftrightarrows R) \wedge (\neg Q \wedge S)$；

c)$(P \wedge (Q \vee R)) \to ((P \vee Q) \wedge (R \wedge S))$；

d)$\neg(P \vee (Q \to (R \wedge \neg P))) \to (R \vee \neg S)$。

14. 求下列公式的真值表：

a)$P \to (Q \vee R)$；

b)$(P \to Q) \leftrightarrows (\neg P \vee Q)$；

c)$(P \to (Q \vee R)) \leftrightarrows ((P \wedge \neg Q) \to R)$。

15. 试以真值表证明下列命题：

a)合取运算的结合律；

b)析取运算的结合律；

c)合取($\wedge$)对析取($\vee$)之分配律；

d)德．摩根律。

16. 下表为含有两个变元的命题公式的各种情况真值表，对于每一列试写出一个至多包含此两个变元的命题公式。

P	Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

17. 判断下列各式，哪些是永真式？哪些是永假式？哪些是可满足式？方法不限。

a) $P \to (P \vee Q \vee T)$；

b) $(P \to \neg P) \to \neg P$；

c) $\neg(Q \to P) \wedge P$；

d) $(P \to Q) \to (Q \to \neg P)$；

e) $(\neg P \to Q) \to (Q \to \neg P)$；

f) $(P \vee \neg P) \to ((Q \wedge \neg Q) \wedge \neg R)$；

g) $(P \wedge \neg P) \rightleftarrows Q$；

h) $(P \rightleftarrows Q) \to \neg(P \vee Q)$。

18. 设 A、B、C 为任意命题公式：

a) 已知 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$，问 $A \Leftrightarrow B$ 吗？

b) 已知 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$，问 $A \Leftrightarrow B$ 吗？

c) 已知 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$，问 $A \Leftrightarrow B$ 吗？

19. 将下面公式化成与之等值并且仅含 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 中的联结词的公式：

a) $\neg\{p \rightleftarrows (q \to (p \vee r))\}$；

b) $((p \vee q) \wedge r) \to (p \vee r)$；

c) $(p \wedge q) \vee r$；

d) $(p \to (q \to r))$。

20. 将下列公式化成与之等值并且含有 $\{\neg, \wedge\}$ 中的联结词的公式：

a) $P \wedge Q \wedge R$；

b) $(P \rightleftarrows Q) \vee R$；

c) $P \wedge (Q \vee R)$。

21. 求 $\neg(P \vee Q) \rightleftarrows (P \wedge Q)$ 的析取范式。

22. 求下列公式的主析取范式、主合取范式，并判断各式类型：

a) $(\neg P \to Q) \to (\neg Q \vee P)$；

b) $\neg(P \to Q) \wedge Q \wedge R$；

c) $(\neg Q \vee \neg P) \to (P \rightleftarrows \neg Q)$；

d) $P \vee (\neg P \to (Q \vee (\neg Q \to K)))$；

e) $(P \vee (Q \wedge R)) \to (P \wedge Q \wedge R)$。

23. 判断 $(P \to (Q \to R))$ 与 $(Q \to (P \to R))$ 是否等值？

24. 如果他是理科学生，他必学好数学；如果他不是文科学生，他必是理科学生；他没学好数学，所以他是文科学生。

25. 设有下列情况，结论是否有效？

或者是天晴，或者是下雨；

如果是天晴，我去看电影；

如果我去看电影，我就不看书。

结论：如果我在看书，则天在下雨。

26. 甲、乙、丙、丁四人参加考试后，有人问他们谁的成绩最好，甲说“不是我”，乙说“是丁”，丙说“是乙”，丁说“不是我”，四人的回答只有一人符合实际，问成绩最好是哪些？只有一人成绩最好的是谁？

四、习题

1. 下面给出 4 个推理，对于正确的推理用构造证明的方法加以证明。对于不正确的推理要证明它不正确，方法不限。

(1)前提：$\neg p \vee q, \neg(q \wedge \neg r), \neg r$。

结论：$\neg p$。

(2)前提：$\neg p, p \vee q$。

结论：$p \wedge q$。

(3)若今天是星期日，则明天是星期一；今天是星期日，所以明天不是星期一。

(4)若今天是星期二，则明天是星期四；今天是星期二，所以明天是星期四。

2. 证明下列等价式：

a)$P \to (Q \to P) \Leftrightarrow \neg P \to (P \to \neg Q)$；

b)$\neg(P \leftrightarrows Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$；

c)$\neg(P \to Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$；

d)$P \to (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \to R$；

e)$(P \to R) \vee (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$；

f)$(\neg P \leftrightarrows Q) \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrows Q)$。

3. 不构造真值表证明下列蕴含式：

a)$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$；

b)$P \to Q \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$；

c)$(P \to Q) \to Q \Rightarrow P \vee Q$；

d)$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$；

e)$\neg A \to (B \vee C), D \vee E, (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$。

4. 检验下述论证的有效性：

如果我学习，那么我数学不会不及格；

如果我不热衷于玩扑克，那么我将学习；

我数学课不及格，因此我热衷于玩扑克。

5. 使用将公式化为主范式的方法证明下式是等价式：

a)$(A \to B) \wedge (A \to C) \Leftrightarrow (A \to (B \wedge C))$；

b)$(A \to B) \to (A \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (B \to A)$；

c)$P \vee (P \to (P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee (P \wedge Q)$。

6. 判断$(P \to (Q \to R))$与$(Q \to (P \to R))$是否等值？

7. 用推理方法证明以下各式成立：

a)$\neg(W \wedge \neg Q), \neg Q \vee R, \neg R \vdash \neg P$；

b)$(P \vee Q), (P \to R), (Q \to S) \vdash S \vee R$；

c)$W \to Q \vdash W \to (W \wedge Q)$；

d)$\neg W \leftrightarrows Q, S \to \neg Q, \neg R, R \vee S \vdash W$；

e)$\neg(P \leftrightarrows Q) \vee (R \vee S), (P \wedge Q) \vdash R \vee S$。

8. 构造下面推理的证明：

如果小张守第一垒并且小李向 B 队投球，则 A 队取胜。或者 A 队未取胜，或者 A 队成为联赛

的第一名。小张守第一垒。A 队没有成为联赛的第一名。因此小李没有向 B 队投球。

9. 甲、乙、丙、丁四人参加拳击比赛，如果甲获胜，则乙失败；如果丙获胜，则乙也获胜，如果甲不获胜，则丁不失败。所以如果丙获胜，则丁不失败。请用推理方法，证明有效结论。

10. 用 CP 规则证明以下各式：

a) $\neg A\vee B, C\rightarrow\neg B \vdash A\rightarrow\neg C$；

b) $A\rightarrow(B\rightarrow C),(C\wedge D)\rightarrow E,\neg F\rightarrow(D\wedge\neg E)\vdash A\rightarrow(B\rightarrow F)$；

c) $A\rightarrow(B\wedge C),\neg B\vee D,(E\rightarrow\neg F)\rightarrow\neg D,B\rightarrow(A\wedge\neg E)\vdash(B\rightarrow E)$。

五、应用题

1. 苏格拉底三段论：凡人都要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。描述并证明以上论段。

2. 某科研所有 3 名青年高级工程师 A、B、C。所以要选派他们中的 1 至 2 人出国进修，由于所里工作的需要，选派时必须满足以下条件：

(1)若 A 去，则 C 也可以去；

(2)若 B 去，则 C 不能去；

(3)若 C 不去，则 A 或 B 可以去。

问所里如何选派他们？

参考答案

一、单项选择题

1. A　　　　2. A

二、填空题

1. 主析取范式　　　　2. $M_0\wedge M_2\wedge M_4$

三、计算题

1. **解**

1) $5x+7>6$ 是陈述句，但因含变量 x，所以真值不定，因而(4)不是命题。(5)由疑问句和祈使句构成，因而不是命题。(9)是感叹句，因而也不是命题。除(4)、(5)、(9)外全是命题。

2) 在是命题的语句中，(1)、(8)、(10)和(14)均为简单命题。在命题符号化中，只需要一个字母就可以将它们符号化，不用任何联结词。而(2)、(3)、(6)、(7)、(11)、(12)、(13)、(15)都是复合命题。在符号化时，都要使用联结词，它们的符号化形式分别为：

(2) $\neg p$，其中，p：美国位于南美洲。

(3) $p\wedge q$，其中，p：15 是 2 的倍数，q：3 是素数。

(6) $p\wedge q$，其中，p：2 是素数，q：3 是素数。

(7) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$，其中，$p$：2 是素数，$q$：3 是素数。

(11) $p\leftrightarrows q$，其中，p：a 是偶数，q：a 能被 2 整除。

(12) $q\rightarrow p$，其中，p：4 是偶数，q：3 能被 2 整除。

(13) $q\rightarrow p$，其中，p：6 能被 4 整除，q：6 能被 2 整除。

(15)$((p\rightarrow q)\wedge p)\rightarrow q$,其中,$p$:4 是素数,$q$:3 是偶数。

3)(1)、(2)、(6)、(7)、(10)、(11)、(12)、(15)均为真命题。在(11)中,由于 p,q 同为真命题,或同为假命题,所以 $p\leftrightarrows q$ 的真值为 1,它是真命题。在(12)中,q 是假命题,因而 $q\rightarrow p$ 为真命题。在(15)中,p 为假命题,q 也是假命题,所以 $p\rightarrow q$ 为真命题,$(p\rightarrow q)\wedge p$ 为假命题,$((p\rightarrow q)\wedge p)\rightarrow q$ 为真命题。

(3)与(13)为假命题,在(13)中,q 是真命题,p 是假命题,故 $q\rightarrow p$ 为假命题。(8)的真值要由王琦和李斌是否为同学的具体情况而定。(14)的真值到明年十月一日才能知道。

2. **解**

1)下表给出了(1)与(2)的真值表:

p	q	$(p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$	$(\neg p\wedge\neg q)\rightarrow(\neg p\vee\neg q)$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

从表中可知,(1)为重言式,而(2)不是,它有两个成假赋值 01,10,因而(1)与(2)不等值。

2)从(3)开始演算:

$(3)\Leftrightarrow(\neg(q\rightarrow p)\wedge p)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg q\vee p)\wedge p)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow(q\wedge\neg p)\wedge p\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow 0\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow p\wedge q\wedge r$

$\Leftrightarrow(4)$。

所以,$(3)\Leftrightarrow(4)$。

3)先求(5)的主析取范式:

$(p\rightarrow q)\wedge r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_7\Leftrightarrow\sum(1,3,7)$。

再求(6)的主析取范式:

$(\neg p\vee q)\wedge r\wedge(p\wedge q\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow((\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r))\wedge(\neg p\vee\neg q\vee q)$

$\Leftrightarrow((\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r))\wedge 1$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_7\Leftrightarrow\sum(1,3,7)$。

可见(5),(6)有相同的主析取范式,故$(5)\Leftrightarrow(6)$。

4)读者可用等值演算和真值表两种方法求出(7)与(8)的主析取范式,结果为: