

# 無綫電理論基礎

(訊号分析及綫性电路部分)

无綫电系350教研組編

西安交通大學

1962. 2

# 目 录

第一章 前言	1
第二章 訊号介析	2
§ 2-1 訊号元	2
§ 2-2 訊号分介为微跃变函数之和	2
§ 2-3 訊号分介为微持續時間矩形脈冲之和	3
§ 2-4 訊号分介为傅里叶级数之和, Fourier 级数, Fourier 积分 訊号元 $e^{-j\omega t}$	4
§ 2-5 若干典型非周期 $E(t)$ 的 $G(\omega)$	8
§ 2-6 Rayleigh, Parseval 定理, 非周期訊号的能譜。矩形及 钟形脈冲的基本持續時間和基本頻譜度	15
§ 2-7 关于 Fourier 变换的一些討論	19
§ 2-8 于 $t=0$ 开始的非周期訊号分介为指数律变幅的振盪, Laplace 变换, 訊号元 $e^{st}$ , 广义角頻率。	24
§ 2-9 关于 Laplace 变换的一些討論	32
§ 2-10 $E(t)$ 的时间微分和时间积分的 Laplace 变换	33
§ 2-11 简短結論	36
第三章 調制, 介調及通訊方式	
§ 3-1 調制及調制的目的	38
§ 3-2 頻率多重制其一, 調幅制:	40
3-2-1 完全調幅波	40
3-2-2 中心載波抑制的双边帶調幅波	50
3-2-3 单边帶	54
§ 3-3 頻率多重制其二, 調角制	56
§ 3-4 脈冲調制通訊	68
3-4-1 調高的矩形脈冲調制通訊	75

3-4-2 調寬的矩形脈冲調制通訊	80
3-4-3 調相脈冲調制通訊	83
3-4-4 編碼脈冲調制通訊	86
3-4-5 已調制脈冲序列的基本頻譜帶寬度	87
§3-5 拍頻和階留單邊帶	92
§3-6 調幅通訊和調頻通訊受干擾問題	101
§3-7 脈冲調制通訊受干擾問題	104

#### 第四章 綫性电路分析

§4-1 迴路方程式組和節偶方程式組	110
§4-2 复数响应函数, 复数入端响应函数, 复数轉移响应函数	116
§4-3 互易定理	121
§4-4 四端网络及四端网络参量	123
§4-5 矩阵代数在四端网络中的应用	128
§4-6 基本形式的几种四端网的结构	140
§4-7 函数的0点及极点	145
§4-8 Hurwitz多项式、“电抗”多项式及四角对称多项式	150
§4-9 电路的响应函数及其0点, 极点	152
§4-10 有理分式的展开	157
§4-11 无源电路轉移响应函数的0点和极点	160
§4-12 无源电路的入端响应函数的0点和极点	162
§4-13 抗性电路入端响应函数的0点和极点	162
§4-14 Hurwitz多项式作为 $p = j\omega$ 的函数; $F(p)$ 的相角的正切函数的0点及极点	164
§4-15 无源网络响应函数的实部与虚部的关系	165
§4-16 最小相移网络轉移响应函数及最小电抗/电納的入端响应函数的模-频率特性与相-频率特性之间的关系	169
§4-17 最小相移网络轉移响应函数及最小电抗/电納入端响应函数的实部和虚部及实部和整个函数之间的关系—Brune-Gewertz 的方法	174
§4-18 入端响应函数与网络的对应	181

§ 4-19 Foster 和 Cauer (电抗) 二端网定理	186
----------------------------------	-----

## 第五章 线性电路的合成

§ 5-1 线性四端网络合成法的基本观点	192
§ 5-2 低通响应函数的普遍意义	193
§ 5-3 阻抗归一化及频率归一化问题	200
§ 5-4 合成法中常用的响应函数	202
§ 5-5 合成法及入端响应函数	213

## 第六章 通用滤波器

§ 6-1 滤波器的概念	229
§ 6-2 重复性四端网的传输特性	230
§ 6-3 “ $K$ -常数”型滤波器	233
6-3-1 “ $K$ -常数”型低通滤波器	237
6-3-2 “ $K$ -常数”型高通滤波器	240
6-3-3 “ $K$ -常数”型带通滤波器	242
6-3-4 “ $K$ -常数”型带阻滤波器	245
§ 6-4 “ $K$ -常数”型滤波器的元件选择	247
§ 6-5 “ $K$ -常数”型滤波器的缺点, $m$ -导型滤波器	249
6-5-1 $m$ 导低通复合滤波器	258
6-5-2 $m$ 导型高通滤波器	261
6-5-3 $m$ 导型带通滤波器	263
6-5-4 $m$ 导型带阻复合滤波器	264
6-5-5 设计 $m$ -导复合滤波器的步骤	266
§ 6-6 非“ $K$ -常数”类型的滤波器的例子	269

# 第一章 前 言

无綫电技术是应用所謂无綫电频率的电磁振荡及各种电子器件的技术領域。今天來說，在縱的方面它包括定位导航，电视，通訊，广播，电子計算，自动化，遙測，遙控，射电天文及电子技术的工业及其它应用等方面；在橫的方面包括路和場的傳輸，（网络理論，振盪理論，超高频傳輸技术，电波傳播及天綫理論），电子綫路（放大，脈冲，接收及发送电路），电子器件（真空器件，半导体及鉄淦养器件等及应用）和信息論各方面。

較狹义的縱的方面則仅包括定位，导航，通訊，电视，广播各方面。

无綫电技术曾經是在通訊及广播的基础上发展起来的。在各橫的学科丰富发展的过程中以及受到各种社会需要的刺激下发展了如上所述的各縱的方面。今日而言，无綫电技术的各分支有的已和通訊及广播很少相似之处。各縱的分支业务的急速发展已急速地促进各橫的学科的急速发展。

在无綫电技术縱的各方面若干基本現象及关系是帶普遍意义的，其中不涉及电子器件的將主要在无綫电理論基础課程中討論。

无綫电理論基础課程的內容包括訊号分析，調制及通訊，网络理論，訊号通过网络，有源綫性系統的稳定問題，及振盪理論六个方面。訊号分析包括（周期及）非周期任意訊号的分析（第二章），調制訊号的分析（第三章部分），随机訊号（过程）的（統計）分析（第八章），調制及通訊包括通訊的方法原理（第三章）及抗扰方法（第八章部分）；网络理論包括网络分析（第四章）网络合成（第五章）通用滤波器（第六章）及基本迴路分析（第七章部分），訊号通过网络包括第七章及第八章的部分（随机訊号通过网络），有源綫性系統的稳定問題及振盪理論中非綫振盪的建立，介及稳定問題，及參量振盪及放大問題都放在第九章中。

相应的实验計有訊号分析一个，频率多重制通訊一个，時間多重制通訊一个，滤波器一个，单振盪迴路的频率及時間相特性一个，耦合振盪迴路的频率及時間相特性一个，參量振盪及放大一个，共七个。

## 第二章 訊号分析

### 2-1 訊号元

訊号作为时间的函数往往是复什形状的。无线电技术中一个最大的任务就是要解决各种任意复什波形的訊号的傳輸問題。不同波形的訊号的傳輸过程是不同的，于是，我們似乎面临无限多問題有待解决。但是，如果不同訊号能分介成为許多同样或同类形状的訊号元，問題就成为有条理，只要研究这种 訊号元的傳輸 特性就可以推广 而計算得任意 訊号的傳輸 特性。

### 2-2 訊号分介为微跃变函数之和

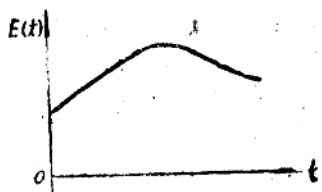


图 2.2.1

設有一訊号  $E(t)$ ，如图 2.2.1 所示。

現考虑一下图 2.2.2。图 2.2.2 所示是二个单元跃变函数，其中  $1(t)$  起始于  $t=0$

$$1(t) \begin{cases} = 0 & (t < 0 \text{ 时}) \\ = 1 & (t > 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

而  $1(t-\tau)$  起始于  $t=\tau$ ，

$$1(t-\tau) \begin{cases} = 0, & (t < \tau \text{ 时}) \\ = 1, & (t > \tau \text{ 时}) \end{cases}$$

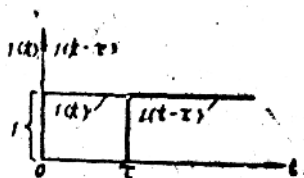


图 2.2.2

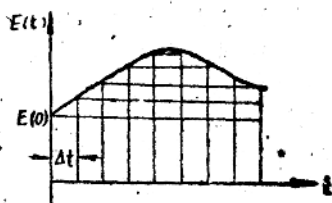


图 2.2.3

現再来研究图 2.2.3。此图同样表示  $E(t)$ ，而在  $E(t)$  曲綫之下作

了若干时间间隔为  $\Delta t$  的阶梯，显然， $E(t)$  在  $t = n\Delta t$  瞬时的值得近似表达如下：

$$\begin{aligned}
 E(t) &= E(n\Delta t) - E(0)1(t) + \left. \frac{dE(t)}{dt} \right|_{\Delta t} \Delta t 1(t - \Delta t) + \\
 &+ \left. \frac{dE(t)}{dt} \right|_{2\Delta t} \Delta t 1(t - 2\Delta t) + \dots + \left. \frac{dE(t)}{dt} \right|_{n\Delta t} \Delta t 1(t - n\Delta t) = \\
 &= E(0)1(t) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{dE(t)}{dt} \right|_{i\Delta t} 1(t - i\Delta t) \Delta t \quad 2.2.1
 \end{aligned}$$

此式在  $\Delta t$  愈小时愈准确。在  $\Delta t$  趋向无限小时， $n\Delta t$  得表示为  $t$  而  $i\Delta t$  得表示为  $t_i$ ， $\Delta t$  则成为  $dt_i$ ，于是，

$$E(t) = E(0)1(t) + \int_0^t \left. \frac{dE(t)}{dt} \right|_{t_i} 1(t - t_i) dt_i \quad 2.2.2$$

因而，任意讯号得分介为许多跃变函数  $E(t)1(t)$  及  $\left[ \left. \frac{dE(t)}{dt} \right|_{t_i} dt_i \right] \times 1(t - t_i)$  的和。跃变函数故可以作为一种基本形式的讯号元。

### 2-3 讯号分介为微持续时间矩形脉冲之和

如图 2.3.1 所示的讯号  $E(t)$ ，可以看作许多等持续时间的矩形脉冲

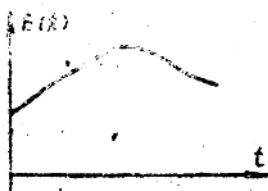


图 2.3.1

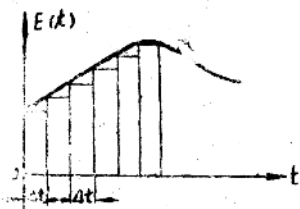


图 2.3.2

之和，如 2.3.2 图所示。当矩形脉冲的持续时间为  $\Delta t$  趋向无限小时，如此分介是完整的。

现来研究 2.3.2 图中起始于  $t = i\Delta t = t_i$  的一个矩形脉冲。

这一矩形脉冲显然可以看作发生在  $t = t_i$  跃变值为  $E(t_i)$  的跃变函数  $E(t_i)1(t - t_i)$  与发生在  $t = (t_i + \Delta t)$  跃变值同样为  $E(t_i)$  的跃变函数  $E(t_i)1(t - t_i - \Delta t)$  之差。

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} E(t) [1(t-t_1) - 1(t-t_1+\Delta t)] dt \\ = E(t_1) [1(t-t_1) - 1(t-t_1+\Delta t)] \end{aligned} \quad 2.3.1$$

上式中方括号显然是函数  $1(t)$  在  $t=t_1$  之处对应于  $\Delta t$  的变量，此变

量当近似等于  $\frac{d1(t-t_1)}{dt} \Delta t$ ：

$$[1(t-t_1) - 1(t-t_1+\Delta t)] = \frac{d1(t-t_1)}{dt} \Delta t \quad 2.3.2$$

在  $\Delta t$  为无穷小的情况下，上式将成为：

$$[1(t-t_1) - 1(t-t_1+dt)] = \frac{d1(t-t_1)}{dt} dt \quad 2.3.3$$

是准确的而非近似的了。

按函数  $1(t-t_1)$  的特性，其一次时间导数  $\frac{d1(t-t_1)}{dt}$  在  $t \neq t_1$  各瞬时均等于 0，而在  $t=t_1$  瞬时为无限大，此外，积分

$$\int_{-\infty}^t \frac{d1(t-t_1)}{dt} dt = 1(t-t_1) \quad 2.3.4$$

此式在  $t < t_1$  时等于 0，在  $t > t_1$  时恒等于 1。因而  $\frac{d1(t-t_1)}{dt}$  是一个持续时间无限小的，发生在  $t=t_1$  瞬时的，其时间积分等于 1 的一个脉冲。

Dirac 首先提出研究这种特殊的时间函数， $\frac{d1(t-t_1)}{dt}$  被称为 Dirac 函数，或称为单元脉冲函数，标为  $\delta(t-t_1)$ ：

$$\delta(t-t_1) = \frac{d1(t-t_1)}{dt} \quad (\text{发生在 } t=t_1) \quad 2.3.5$$

由是，按 2.3.1 式及 2.3.2 图，可将  $E(t)$  变为

$$E(t) = \int_{-\infty}^t E(t_1) \delta(t-t_1) dt_1 \quad 2.3.6$$

因此，任意讯号得分介为许多微持续时间之矩形脉冲  $E(t_1) \cdot \delta(t-t_1) \cdot dt_1$  之和。故微持续时间之矩形脉冲也可作为一种基本形式的讯号元。

## 2-4 讯号分介为简谐振荡之和，Fourier 级数，

Fourier 积分，讯号元  $e^{-j\omega t}$ ：

按交流电路原理，稳态的简谐电振荡作用于构成于线性电阻，电容、电感的电路所生的响应，很容易利用复数阻抗及导纳的方法来求介。因此，



对于直线性电路来说，如可能将输入讯号分介为一些稳态的简谐波，将使求介响应成为简单。也就是说，如可能将一讯号分介为简谐波，则求介电路对该讯号的响应将成为非常简单，事实上多数讯号都可以如此分介。

设讯号  $E(t)$  在  $t_0$  区间内以周期  $T$  周期性的重复。在满足 Dirichlet 条件时， $E(t)$  在上述区间内得以 Fourier 级数表示：

$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \quad 2.4.1$$

式中 
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad 2.4.2$$

此处  $E(t)$  被分介为角频率为  $n\omega_0$  的简谐波讯号元。

称 
$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad 2.4.3$$

同时， 
$$\phi_n = t_0^{-1} \frac{b_n}{a_n}. \quad 2.4.4$$

则 
$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = C_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n).$$

故 
$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n).$$

如规定 
$$C_n = C_{-n} \quad \text{及} \quad \phi_{-n} = -\phi_n,$$

则  $E(t)$  复可写为：

$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n).$$

因对  $n=0$ ,

$$\phi_0 = \phi_0 = 0,$$

$$C_0 = a_0,$$

故  $E(t)$  又得写为

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n).$$

再考虑到： 
$$e^{j(i\omega_0 t - \phi_i)} = \cos(i\omega_0 t - \phi_i) + j \sin(i\omega_0 t - \phi_i),$$

$$e^{j(-i\omega_0 t - \phi_i)} = e^{j(-i\omega_0 t + \phi_i)} = e^{-j(i\omega_0 t - \phi_i)} =$$

$$= \cos(i\omega_0 t - \phi_i) - j \sin(i\omega_0 t - \phi_i),$$

故 
$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(n\omega_0 t - \phi_n)}.$$

定义 
$$C_n e^{j(-\phi_n)} = \dot{C}_n, \quad 2.4.5$$

謂之复数振幅，則

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_0 t} \quad 2.4.6$$

回到 2.4.1 式，从之可以得出：

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) dt,$$

$$\text{及} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) \cos n\omega_0 t dt, \quad 2.4.7$$

显然，2.4.7 式也适用于求  $a_0$ 。从 2.4.1 复可得：

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) \sin n\omega_0 t dt. \quad 2.4.8$$

从 2.4.7, 2.4.8 及 2.4.3, 2.4.4 各式，可見原設的  $C_n = C_{-n}$  及  $\phi_{-n} = -\phi_n$  关系是成立的。

同样，从 2.4.6 式可得

$$\dot{C}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad 2.4.9$$

式 2.4.9 与 2.4.6 作为一对，是将  $E(t)$  在  $t_1 < t < t_2$  区间分介为簡諧訊号元的基本关系式。2.4.9 式被称作  $E(t)$  的复数頻譜函数，它表明  $E(t)$  的角頻率為  $n\omega_0$ 。的簡諧訊号元分量的复数振幅与  $n\omega_0$  的关系。

$$\text{今} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

故 2.4.9 式亦得写为

$$\dot{C}_n = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad 2.4.10$$

注意  $E(t)$  的頻譜函数只在  $\omega = n\omega_0$  成立 ( $n$  为整数)，而是离散的，跳跃的单位是  $\omega_0$ 。現引入一量，称为頻譜密度函数  $H_n$ ，定义为：

$$H_n = \frac{\dot{C}_n}{\omega_0}$$

$$\text{得} \quad H_n = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad 2.4.11$$

$H_n$  是在  $\omega = n\omega_0$  点上  $\dot{C}_n$  与单位頻率跳跃量  $\omega_0$  的比值。

如果周期  $T$  趋向  $\infty$ ，(对于非周期性訊号，實質就是如此)，而在  $-\infty < t < \infty$  区间仍滿足 Dirichlet 条件，同时  $E(t)$  绝对可积，則 2.4.6 式，2.4.9 式，2.4.11 式等仍是成立的。考虑到  $T$  趋向  $\infty$ ， $\omega_0$  将趋向于

无限小，同时諸  $n\omega_0$  将趋向成为連續而非跳跃的，而得改写为  $\omega$ 。此时， $\dot{C}_n$  (2.4.9式) 将成为微值，而 2.4.11 式将成为

$$\dot{H}_n = \frac{\dot{C}_n(\text{微值})}{\omega_0(\text{微值})} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt.$$

按上式表示法， $n\omega_0$  已被写为  $\omega$ ，故上式应写为

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt. \quad 2.4.12$$

$\dot{H}(\omega)$  显然是非周期性的  $E(t)$  (在  $-\infty < t < \infty$  区间满足 Dirichlet 条件) 分介为簡諧訊号元的复数頻譜密度，将  $\dot{H}(\omega)$  乘以单位頻率跳跃量将得  $E(t)$  的  $\omega$  角頻率分量的复数振幅  $\dot{C}(\omega) (= \dot{C}_n)$ 。将  $\dot{H}(\omega)$  乘以微頻率間隔  $d\omega$ ，将得  $\dot{H}(\omega)d\omega$  为在該  $d\omega$  区間中各  $\dot{C}(\omega) (-\dot{C}_n)$  之总和。在这个意义上，和式 2.4.6 将成为积分：

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{H}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 2.4.13$$

2.4.12 式及 2.4.13 式是非周期性訊号  $E(t)$  分介为簡諧訊号元分量的基本关系式。按 2.4.12 式，可从  $E(t)$  求得  $\dot{H}(\omega)$ ，而按 2.4.13 式，可从  $\dot{H}(\omega)$  求得  $E(t)$ 。此二式被称为 Fourier 变换式对，其中 2.4.12 式称为 Fourier 正变换式，而 2.4.13 式称为 Fourier 反变换式。

在 Fourier 变换的习惯上，往往引用一函数  $\dot{G}(\omega)$ ：

$$\dot{G}(\omega) = \pi \dot{H}(\omega). \quad 2.4.14$$

如此，则 2.4.12 式可写为

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt, \quad 2.4.15$$

而 2.4.13 式则可写为

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad 2.4.16$$

在习惯上称 2.4.15 式及 2.4.16 式为 Fourier 变换式对。我們以后的討論将按习惯以 2.4.15 式及 2.4.16 式为 Fourier 变换式对。

当將訊号  $E(t)$  用 Fourier 积分变换为  $\dot{G}(\omega)$  时，实际上是將  $E(t)$  分介为 (无限) 多个  $e^{j\omega t}$  形式的 (微) 訊号元。 $e^{j\omega t}$  是更一般形式的簡諧振盪。

$\dot{G}(\omega)$  作为頻率的函数是一个复数，我們可以将  $\dot{G}(\omega)$  写为

$$\dot{G}(\omega) = g_1(\omega) + jg_2(\omega) \quad 2.4.17$$

按此,

$$\begin{aligned} g_1(\omega) + jg_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

因  $E(t)$  是  $t$  的实函数, 故

$$\left. \begin{aligned} g_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \cos \omega t dt \\ g_2(\omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \right\} \quad 2.4.18$$

显然,  $g_1(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数, 而  $g_2(\omega)$  为  $\omega$  的奇函数:

$$\left. \begin{aligned} g_1(\omega) &= g_1(-\omega) \\ g_2(\omega) &= -g_2(-\omega) \end{aligned} \right\} \quad 2.4.19$$

如果将  $\dot{G}(\omega)$  表示为

$$\dot{G}(\omega) = |\dot{G}(\omega)| e^{j\phi(\omega)}, \quad 2.4.20$$

$|\dot{G}(\omega)|$  是  $\dot{G}(\omega)$  的模, 而  $\phi(\omega)$  则是  $\dot{G}(\omega)$  的幅角, 按 2.4.17 式, 可得

$$|\dot{G}(\omega)| = \sqrt{g_1^2(\omega) + g_2^2(\omega)} \quad 2.4.21$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} g_2(\omega) / g_1(\omega) \quad 2.4.22$$

由此二式, 显然  $|\dot{G}(\omega)|$  是  $\omega$  的偶函数, 而  $\phi(\omega)$  是  $\omega$  的奇函数.

$$|\dot{G}(\omega)| = |\dot{G}(-\omega)| \quad 2.4.23$$

$$\phi(\omega) = -\phi(-\omega) \quad 2.4.24$$

2.4.19, 2.4.23, 2.4.24 各式关系是  $\dot{G}(\omega)$  的重要特性。

## 2-5 若干典型非週期 $E(t)$ 的 $\dot{G}(\omega)$

(i) 矩形脉冲的频谱密度 (其一)

設有  $E(t)$ , 如图 2.5.1 所示, 即

$$\begin{cases} E(t) = 1, & (\text{当 } -\tau/2 < t < +\tau/2) \\ E(t) = 0, & (\text{当 } t < -\tau/2 \text{ 或 } t > +\tau/2), \end{cases}$$

按 2.4.15 式

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt.$$

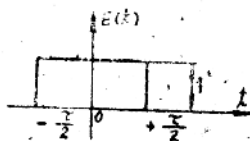


图 2.5.1

对现考虑的具体  $E(t)$ , 此积分的极限实际上在  $t = -\tau/2$  至  $t = +\tau/2$  之间, 故

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{e^{-j\omega \tau/2} - e^{j\omega \tau/2}}{-j\omega} = 2 \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega} \quad 2.5.1$$

2.5.1 式表示于图 2.5.2, 注意  $\dot{G}(\omega)$  在  $\omega = \pm \frac{2n\pi}{\tau}$  ( $n$  为大于 1 的整数) 之点等于 0。

須用二个自由度来表示的  $\dot{G}(\omega)$  可写为  $|\dot{G}(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$ 。現討論例的  $|\dot{G}(\omega)| \sim \omega$  曲綫表示于图 2.5.3,  $\phi(\omega) \sim \omega$  曲綫見 2.5.4。注意  $|\dot{G}(\omega)|$  的偶对称性及  $\phi(\omega)$  的奇对称性。

(ii) 矩形脉冲的頻譜密度 (其二)

設有  $E(t)$ , 如图 2.5.5 所示, 即

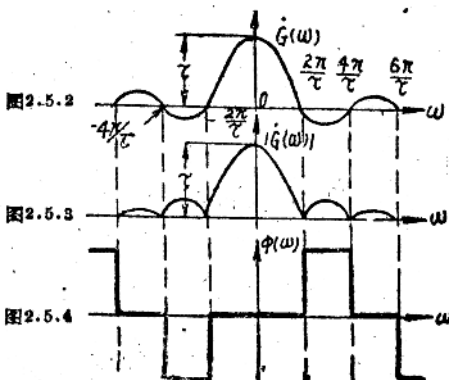
$$\begin{cases} E(t) = 1 & (\text{当 } 0 < t < \tau) \\ E(t) = 0 & (\text{当 } t < 0 \text{ 或 } t > \tau) \end{cases}$$

按 2.4.15,

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-j\omega t} dt$$

对这一具体  $E(t)$ ,

$$\begin{aligned} \dot{G}(\omega) &= \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-j\omega\tau} - 1}{-j\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} \\ &= 2 \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \end{aligned} \quad \text{2.5.2}$$



此  $\dot{G}(\omega)$  的  $|\dot{G}(\omega)| \sim \omega$  曲綫見图 2.5.6,  $\phi(\omega) \sim \omega$  曲綫見 2.5.7 图。注意  $|\dot{G}(\omega)|$  曲綫的偶对称性及  $\phi(\omega)$  曲綫的奇对称性, 并注意图 2.5.5 与图 2.5.1 的相似, 和图 2.5.3 与图 2.5.6 的相似。

(iii) 单元脉冲的頻譜密度。

图 2.5.8 示一单元脉冲,  $E(t) = \delta(t)$  发生在  $t=0$  至  $t=\Delta t$  之間,  $\Delta t$  为无限小, 脉冲高度为  $\frac{1}{\Delta t}$ , 脉冲的面积等于 1。

显然, 此单元脉冲实际上是矩形脉冲的极端情况, 利用 2.5.2 式可

推求出此单元脉冲的频谱密度。

按 2.5.2 式, 对于持续时间

间为  $\tau$ , 高度为  $(\frac{1}{\tau})$  的矩形脉冲,

$$\dot{G}(\omega) = 2 \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

将  $\sin \frac{\omega\tau}{2}$  因子展开为升幂级数, 得

$$\dot{G}(\omega) = 2 \frac{e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{\omega\tau} \left[ \frac{\omega\tau}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\frac{\omega\tau}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{\omega\tau}{2})^5}{5!} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\frac{\omega\tau}{2})^7}{7!} \dots \right] =$$

$$= e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \left[ 1 - \frac{(\frac{\omega\tau}{2})^2}{3!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\frac{\omega\tau}{2})^4}{5!} - \frac{(\frac{\omega\tau}{2})^6}{7!} \dots \right]$$

以  $\tau = \Delta t$  代入, 取  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限, 得:

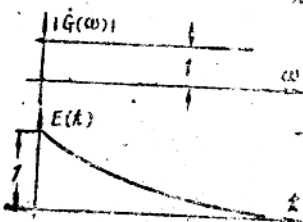
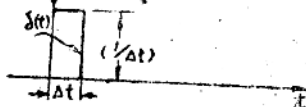
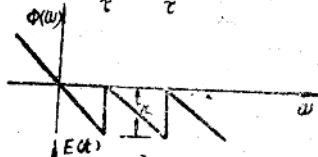
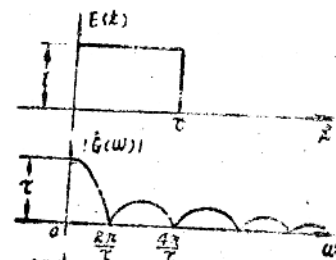
$$\dot{G}(\omega) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \left[ 1 - \frac{(\frac{\omega\Delta t}{2})^2}{3!} + \frac{(\frac{\omega\Delta t}{2})^4}{5!} \dots \right] = 1 \quad 2.5.3$$

此式指出  $|\dot{G}(\omega)|$  是完全与  $\omega$  无关的常数 1。图 2.5.9 示  $\delta(t)$  的  $|\dot{G}(\omega)| - \omega$  关系。

(iv) 指数衰减脉冲的频谱。

设有  $-E(t)$ , 如图 2.5.10 所示:

$$\left. \begin{aligned} E(t) &= 0 & (\text{当 } t < 0) \\ E(t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} & (\text{当 } t > 0) \end{aligned} \right\}$$



这种形式的脉冲称为指数衰减脉冲。按 2.4.15 式，以现例情况代入，得：

$$\begin{aligned} \dot{G}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau_0}} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau_0} + j\omega\right)t}}{-\left(\frac{1}{\tau_0} + j\omega\right)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_0} + j\omega}, \end{aligned} \quad 2.5.4$$

$$|\dot{G}(\omega)| = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_0^2}}, \quad 2.5.5$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega \tau_0. \quad 2.5.6$$

$|\dot{G}(\omega)|$  及  $\phi(\omega)$  与  $\omega$  的关系图示于图 2.5.11 及 2.5.12。

(v) 单元跃变函数的频谱密度。

图 2.5.13 示单元跃变函数  $E(t) = 1(t)$ ：

$$\left. \begin{aligned} E(t) &= 0, & (\text{当 } t < 0) \\ E(t) &= 1, & (\text{当 } t > 0) \end{aligned} \right\}.$$

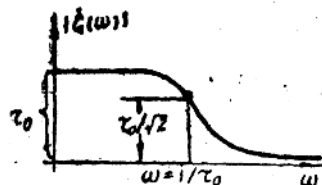


图 2.5.11

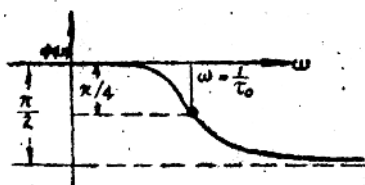


图 2.5.12

此单元跃变函数可以看作是前述指数衰减脉冲的一种极限情况，即  $\tau_0 = \infty$  的极限情况。因此，求指数衰减脉冲在  $\tau_0 \rightarrow \infty$  的  $\dot{G}(\omega)$  极限即得单元跃变函数的  $\dot{G}(\omega)$ 。于是，按 2.5.4 得：

$$\dot{G}(\omega) = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\tau_0} + j\omega} = \frac{1}{j\omega} \quad 2.5.7$$

$$\text{即} \quad |\dot{G}(\omega)| = \frac{1}{\omega} \quad 2.5.8$$

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad 2.5.9$$

$|\dot{G}(\omega)|$  及  $\phi(\omega)$  与  $\omega$  的关系各图示于图 2.5.14 及 2.5.15。

(vi) 钟形脉冲的频谱密度

图 2.5.16 示一峰发生于  $t=0$  的钟形脉冲，钟形脉冲以 Gauss 函数表示：

$$E(t) = e^{-(at)^2}$$

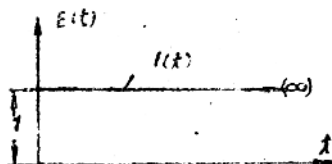


图 2.5.13

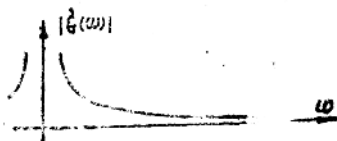


图 2.5.14

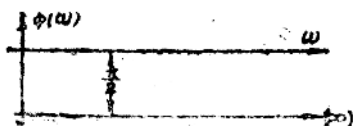


图 2.5.15



图 2.5.16

此脉冲在  $t=0$  之点高度为 1，开始于  $t=-\infty$  之点，终于  $t=\infty$ 。上式中  $a$  是确定脉冲宽度的参量， $a$  愈大则脉冲愈窄，反之则愈宽。按 2.4.15 式，

$$\begin{aligned} \dot{G}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at)^2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at + j\frac{\omega}{2a})t} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

钟形脉冲的  $|\dot{G}(\omega)|$  [见图 2.5.17,  $\phi(\omega)$  见图 2.5.18。 ( $|\dot{G}(\omega)| = \phi(\omega) = 0$ )。注意 Gauss 函数的一个特性：Gauss 函数的 Fourier 正变换还是 Gauss 函数。

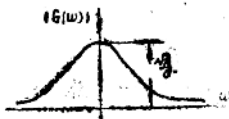


图 2.5.17

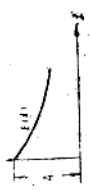
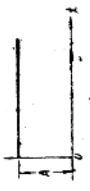

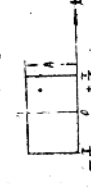
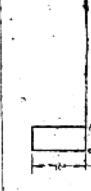


图 2.5.18

以上对若干典型的  $E(t)$  进行了求  $\dot{G}(\omega)$  的运算，2.5.1 表列几个典型的  $E(t)$  的  $\dot{G}(\omega)$ 。



几种脉冲的频谱密度

序号	脉冲的时间函数 $E(t)$	$E(t)$ 的频谱密度		相角 $\phi(\omega)$	
		$\hat{G}(\omega)$	模数 $ \hat{G}(\omega) $		
1	$E(t) = Ae^{-\beta t}$ 当 $t > 0$ 时 $E(t) = 0$ 当 $t < 0$ 时		$\frac{A}{\beta + j\omega}$	$\frac{A}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}$	$\text{tg}^{-1} \frac{\omega}{\beta}$
2	$E(t) = A$ 当 $t > 0$ 时 $E(t) = 0$ 当 $t < 0$ 时		$\frac{A}{j\omega}$	$\frac{A}{\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
3	$E(t) = A$ 当 $0 < t < \tau$ 时 $E(t) = 0$ 当 $t < 0$ 或 $t > \tau$ 时		$A \frac{e^{-j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{j\omega}$	$\frac{2A}{\omega} \left  \sin \frac{\omega\tau}{2} \right $	$-\frac{\omega\tau}{2} - n\pi$ $n=0, 1, 2, \dots$
4	$E(t) = A$ 当 $-\tau/2 < t < \tau/2$ $E(t) = 0$ 当 $t < -\tau/2$ 或 $t > \tau/2$		$A \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega}$	$\frac{2A}{\omega} \left  \sin \frac{\omega\tau}{2} \right $	0
5	$E(t) = 1/\tau$ 当 $\tau \rightarrow 0$		1	1	0