华章数学译丛

26

Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems

(Second Edition)

偏微分方程教程

（原书第2版）

（美）Nakhlé H. Asmar 著
密苏里大学

陈祖墀 宣本金 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统讲解偏微分方程及其定解问题的求解方法，通过大量实例讨论偏微分方程解的性质，特别强调傅里叶级数在求解边值问题中的作用．书中配有丰富的例题与习题，还采用"专题问题"较为系统地研究某个具体问题，补充和扩展了正文内容．

本书内容丰富、推导严密，包含大量物理背景，为理解和掌握偏微分方程提供了有效途径．本书可作为高等院校数学及相关专业学生的偏微分方程课程教材，同时也可作为工程技术人员、科技工作者的参考书．

本书版权登记号：图字：01-2005-0525

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程教程(原书第2版)/(美)亚斯马(Asmar, N. H.)著；陈祖墀，宣本金译．—北京：机械工业出版社，2006.10

(华章数学译丛)

书名原文：Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, Second Edition

ISBN 7-111-19746-1

Ⅰ．偏…　Ⅱ．①亚…　②陈…　③宣…　Ⅲ．偏微分方程-教材　Ⅳ．O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第094797号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037)

责任编辑：耿　娅　迟振春

北京京北制版印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2006年10月第1版第1次印刷

186mm×240mm　·44.5印张

定价：85.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

偏微分方程这门学科产生于18世纪，是由对弦振动的研究而兴起的，并在19世纪得到迅速发展.

本书通过大量丰富的实例，在各种坐标系中论述了基本的偏微分方程及其定解问题的求解方法，并讨论了解的性质，特别强调了傅里叶级数在求解边值问题中的作用. 为了求解，书中介绍了偏微分方程中常用的特殊函数，例如，勒让德函数、贝塞尔函数等. 另外，还介绍了与求解偏微分方程有关的基本计算方法.

本书内容丰富，物理背景清楚，层次分明，推导严密，图文并茂，并配有丰富的例题与习题，难易适度. 特别是专题问题，它针对某个具体问题进行了较为系统的研究，是正文内容的补充和扩展. 本书可作为高等院校理工科学生和教师的教材，同时也可作为工程技术人员、科技工作者的参考书.

本书由中国科学技术大学数学系陈祖墀教授和宣本金副教授翻译. 陈祖墀翻译第4章、第5章、第9章和索引，其他部分均由宣本金翻译，陈祖墀对译文作了统一校对. 对原著中细小的笔误和印刷错误，在翻译时进行了必要的修改和纠正. 对于书中所涉及的数学术语和外国人名，尽可能参照科学出版社2002年版的《新英汉数学词汇》和广东科技出版社1991年版的《英俄汉数学词汇》.

由于时间仓促，水平有限，译文难免有不妥之处，敬请有关专家、读者指正，以便再版时更正.

译 者

前　言

自本书第 1 版出版以来，我很高兴地收到了来自读者的积极回应．这一版采纳了他们的许多建议，如更多的源自工程和物理的应用、更多的数学证明与理论．为保持原版的组织结构，这些变化体现在章后面的新增小节里．

本书旨在作为偏微分方程和边值问题（包括傅里叶级数）的现代基础教材，供学完常微分方程基础课程的学生使用．

本书内容与安排

本书是为了读者较好地从常微分方程基础课程过渡到偏微分方程基础课程而设计的．虽然本书面向那些强调应用的工程、数学和物理等专业的学生，但本版新增内容为教师提供了多种选择：以理论为主的偏微分方程课程，或者强调边值问题和傅里叶级数的偏微分课程．除了偏微分方程基础课程的核心内容（参见下面的“教学安排”）外，本书还包含许多特别专题，教师可以根据需要讲授，或者作为专题研究的题目．这些基于核心内容的高级专题基本上是相互独立的．

预修要求

在附录 A 中，汇总了一些线性常微分方程的基本理论，包括级数法．教师可以根据需要将这些内容仔细讲授或完全省略，这是为了方便那些已经学过的学生查阅．特别是，A.4～A.6 节包含了对幂级数方法和弗罗贝尼乌斯方法的详细讨论，适合于那些第一次接触这些内容的学生阅读．有鉴于现在在常微分方程基础课程中省略级数方法这一趋势，我认为有必要对这些内容作较为详细的讨论．

习题和计算机辅助教学

每一节的习题都以一组基础题开始，这些基础题是为了加深读者对该节基本概念的理解而设计的；接着是难度较大的提高题，引导读者对概念进行更深入的理解．这些提高题通常都给出了详细的提示，以使绝大多数学生都可以完成．有些节包含了**专题问题**，专题问题是一些较长的习题，其结果有一定价值或涉及相关的应用．专题问题可以由学生独自完成，或由小组共同完成，或由教师作进一步的讲解．

虽然本书是从传统观点来编写的，无需计算机辅助教学，但还是包含了一些需要利用计算机的例题和习题．需要用计算机的习题都标上了计算机标记，这些问题都是要求学生利用计算机辅助作图功能研究一些问题（例如，一些特殊函数的傅里叶展开、贝塞尔展开、勒让德展开以及其他展开形式的部分和序列的收敛性），以及计算那些用手工不易计算出来的数值数据（例如，广义傅里叶级数的系数和超越方程的根）．

本版新增内容

本版显著的变动如下：

- 2.2 节增加了一些傅里叶级数的例题和习题，这些例题和习题建立在图形基础上，用于增强学生阅读和理解傅里叶级数图形表示的能力.
- 2.7 节是新的，该节包含了应用傅里叶级数求解机械或电子系统的受迫振动. 我们的讨论超越了该领域的典型步骤，通过对傅里叶级数解的分析，讨论了一种抑制系统高振荡的方法.
- 2.8 节以及 2.9 节的大部分内容是新的. 第 2 章最后三节较完整地讨论了傅里叶级数的逐点收敛以及一致收敛问题，包括分段光滑函数的傅里叶级数表示定理的完整证明. 这些内容的巧妙安排使之更适合于课堂教学.
- 3.4 节做了扩充，包含了特征线、平行图等方法，以及达朗贝尔解的依赖区间.
- 3.10 节是新的，它研究了在矩形区域上具有罗宾边界条件或诺伊曼边界条件的边值问题.
- 4.4 节做了扩充，以包含平面中的圆盘、楔形、片状区域上具有罗宾边界条件或诺伊曼边界条件的边值问题.
- 4.9 节是新的，讨论了贝塞尔函数的一些重要的高级性质，如积分表示和渐近公式. 本节还初步介绍了定常相方法，工程师、物理学家和应用数学家对此非常感兴趣.
- 6.6 节和 6.7 节是新的，这两节介绍了双调和方程和板振动理论. 这两节综合运用了前面几节中的许多重要方法(贝塞尔函数的渐近公式、特征函数展开法和广义傅里叶级数等).
- 7.2 节增加了一些关于卷积的新例子，讨论了卷积在求解边值问题时的作用.
- 7.8 节是新的，讨论了广义函数、分段光滑函数的导数、卷积及其在计算分段光滑函数的傅里叶变换中的应用.
- 7.9 节和 7.10 节是新的，这两节包括杜阿梅尔原理及其在非齐次热传导方程和波动方程中的应用，还引入了偏微分方程的基本解和弱解等概念. 虽然这些内容看起来是纯理论性的，但这两节包含了很多有趣的应用和习题，以激发第一次接触它们的学生的学习兴趣.
- 第 12 章关于格林函数和共形映射的内容是新的，这是一个关于格林函数和共形映射的自封式的处理. 和本书其他部分一样，这一章也是按照便于阅读的方式编写的，该章包含了许多有趣的习题和应用. 12.1 节从线积分的基本性质开始，证明了格林定理，导出格林公式，最后证明了调和函数的基本性质；在 12.2 节和 12.3 节中，证明了调和函数的高斯平均值性质和最大模原理，导出了格林函数，讨论了它们的理论和物理意义. 12.3 节还讨论了求解格林函数的特征函数法；在 12.4 节中，运用镜像法推导出格林函数；12.5 节从多方面介绍解析函数及其在偏微分方程中的应用，该节包含柯西-黎曼方程以及许多有关解析函数在求解狄利克雷问题中的相关应用；12.6 节介绍了共

形映射及其在边值问题中的应用；在 12.7 节和 12.8 节中，运用共形映射推导出格林函数和诺伊曼函数.

- 附录 A.4 是新的，综述了幂级数知识，为其后几节有关幂级数方法的讨论做了铺垫.

教学安排

- **偏微分方程基础课程**. 该课程包含如下核心内容：
  - 第 1 章；
  - 2.1～2.4 节，2.6 节；
  - 第 3 章(3.9～3.11 节为可选内容)；
  - 4.1 节，4.2 节，4.4 节(如需要，可选讲 4.7 节和 4.8 节)；
  - 5.1 节，5.2 节(如需要，可选讲 5.5 节和 5.6 节)；
  - 6.1 节，6.2 节；
  - 7.1～7.7 节；
  - 8.3 节(如需要，可选讲 8.1 节和 8.2 节).
- **强调工程应用的偏微分课程**. 将第 5 章的内容替换为下面任何一节即可：2.7 节，6.3 节，6.5 节，6.6 节和 6.7 节.
- **强调物理应用的偏微分课程**. 将第 7、8 章的小节替换为第 5、11 章的小节.
- **强调数学证明的偏微分课程**. 包含 2.8～2.10 节.

第 12 章关于格林函数的内容以及 4.9 节、6.6 节、6.7 节和 7.8～7.10 节，更适合给低年级研究生或高年级本科生讲授.

相关网站

作者的 Mathematica 文件和一本**学生解题手册**(Student Solutions Manual)，以及其他有关本书的补充材料，可以从作者的网站 http://www.math.missouri.edu/～nakhle 上下载，也可登录华章网站免费下载. 想得到**教师解题手册**(Instructor Solutions Manual)的教师可以直接通过电子邮件 nakhle@math.missouri.edu 与作者联系.

此外，希望扩充 12.5 节中的复变量内容的教师可以参考 N. Asmar 教授的另外一本书《Applied Complex Analysis with Partial Differential Equations》(在 G. Jones 帮助下完成)，由 Prentice Hall 出版社于 2002 年出版. 在教师的要求下，征得该书编辑同意，该书中的材料可以提供给学生.

致谢

Stephen Montgomery-Smith 教授(密苏里大学)向我提出了许多关于本书新版的建议，在此向他表示感谢. 我也非常感谢下面几位审稿人：Grant W. Hart 教授(杨百翰大学物理系)、Robert B. Israel 教授(英国哥伦比亚大学数学系)、David G. Retzloff(密苏里大学化学工程系)、Jun Yu(佛蒙特大学数学与统计系)，他们慷慨地与我分享了关于本书新版的一些思想. 我也很

高兴地感谢 Darryl Yong 教授(Harvey Mudd 学院数学系)和 Mark Lammers 教授(北卡罗来纳大学威尔明顿分校数学系).

对 Ghazi Asmar 教授(圣母玛利亚大学黎巴嫩分校机械工程系)在 2.7 节、6.4 节、6.6 节和 6.7 节中提供的帮助表示衷心的感谢. 同样感谢下面几位数学家: Mark W. Coffey(科罗拉多大学丹佛分校)、Richard Ford(加州州立大学奇科分校)、Stephen J. Greenfield(拉特格大学)、Mark Kon(波士顿大学)、William G. Margulies 和 Saleem Watson(加州州立大学长滩分校),他们是本书第 1 版的审稿人. 我很荣幸地向 Richard Winkel 在计算机技术上提供的帮助表示感谢.

本书的编辑——Prentice Hall 出版社的 George Lobell 向我提供了许多支持、建议和鼓励,在此向他表示感谢. 同时感谢 Prentice Hall 出版社的制作编辑 Barbara Mack 的帮助和建议.

我特别感谢家人对我的支持. 我很荣幸地将此书献给我的妻子 Gracia、我们的孩子 Julia 和 Thomas,以及我的双亲 Habib 和 Mounira.

Nakhlé H. Asmar
nakhle@math. missouri. edu

有用的公式

三角恒等式

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\qquad$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ $\qquad$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$\cos\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin a$ $\qquad$ $\sin\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos a$

$\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ $\qquad$ $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $\qquad$ $\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\cos a+\sin a=\sqrt{2}\cos\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $\cos a+\sin a=\sqrt{2}\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\alpha\cos a+\beta\sin a=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(a-b)$，其中 $\cos b=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，$\sin b=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

复数

$z=x+\mathrm{i}y$ $\qquad$ $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ $\qquad$ $\mathrm{Re}(z)=x$，$\mathrm{Im}(z)=y$

$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)=2x$ $\qquad$ $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)=2\mathrm{i}y$ $\qquad$ $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

$|z|^2=z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$ $\qquad$ $z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$ $\qquad$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}(z\neq 0)$

三角形不等式：如果 z 和 w 是复数，则

$$|z\pm w|\leqslant|z|+|w| \quad \text{和} \quad ||z|-|w||\leqslant|z\pm w|$$

欧拉恒等式及相关恒等式：如果 x 是任意实数，则

$e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ $\qquad$ $e^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x$ $\qquad$ $e^{-\mathrm{i}x}=\overline{(e^{\mathrm{i}x})}$ $\qquad$ $|e^{\mathrm{i}x}|=1$

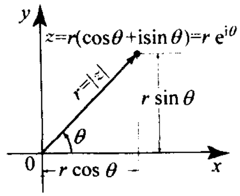
$\cos x=\dfrac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}$ $\qquad$ $\sin x=\dfrac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ $\qquad$ $(\cos nx+\mathrm{i}\sin nx)^n=e^{\mathrm{i}nx}=\cos nx+\mathrm{i}\sin n$

复数的极坐标表示

$z=x+\mathrm{i}y=re^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$



泰勒级数展开：设 z 是实数或复数，则

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad (\text{任意 } z)$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{任意 } z)$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{任意 } z)$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z|<1)$$

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{任意 } z)$$

$$\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{任意 } z)$$

有用的积分公式($a\neq 0$，b 是实数，m 和 n 是整数)

涉及三角函数的积分

$$\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$$

$$\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

$$\int \cos^2(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4a}\sin(2(ax+b))+C$$

$$\int \sin^2(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin(2(ax+b))+C$$

$$\int x\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{x}{a}\sin ax+C$$

$$\int x\sin ax\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\sin ax-\frac{x}{a}\cos ax+C$$

$$\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{2x\cos ax}{a^2}+\frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin ax+C$$

$$\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x=\frac{2x}{a^2}\sin ax-\frac{a^2x^2-2}{a^3}\cos ax+C$$

$$\int x^m\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{x^m\sin ax}{a}-\frac{m}{a}\int x^{m-1}\sin ax\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^m\sin ax\,\mathrm{d}x=-\frac{x^m\cos ax}{a}+\frac{m}{a}\int x^{m-1}\cos ax\,\mathrm{d}x$$

$$\int \cos ax\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)}+\frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)}+C \quad (a^2\neq b^2)$$

$$\int \sin ax\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)}-\frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)}+C \quad (a^2\neq b^2)$$

$$\int \cos ax\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)}-\frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}+C \quad (a^2\neq b^2)$$

涉及指数函数的积分

$$\int x\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax+b}}{a^2}(ax-1)+C$$

$$\int x^m\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{x^m\mathrm{e}^{ax+b}}{a}-\frac{m}{a}\int x^{m-1}\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C \quad (a^2+b^2\neq 0)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C\quad(a^2+b^2\neq 0)$$

涉及贝塞尔函数的恒等式($p\geqslant 0$，$a\neq 0$，$n=0$，1，…)

$$\frac{d}{dx}[J_0(x)]=-J_1(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)]=x^pJ_{p-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)]=-x^{-p}J_{p+1}(x)$$

$$xJ'_p(x)+pJ_p(x)=xJ_{p-1}(x)$$

$$xJ'_p(x)-pJ_p(x)=-xJ_{p+1}(x)$$

$$J_{p-1}(x)-J_{p+1}(x)=2J'_p(x)$$

$$J_{p-1}(x)+J_{p+1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x)$$

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta$$

$$\int x^{p+1}J_p(x)\,dx=x^{p+1}J_{p+1}(x)+C$$

$$\int x^{-p+1}J_p(x)\,dx=-x^{-p+1}J_{p-1}(x)+C$$

$$\int J_1(x)\,dx=-J_0(x)+C$$

$$\int xJ_0(x)\,dx=xJ_1(x)+C$$

$$\int J_{p+1}(x)\,dx=\int J_{p-1}(x)\,dx-2J_p(x)$$

$$xJ_{p+1}(x)+p\int J_{p+1}(x)\,dx=\int xJ_p(x)\,dx$$

$$\int J_{2n+1}(x)\,dx=-J_0(x)-2\sum_{k=1}^{n}J_{2k}(x)+C$$

$$\int_0^a x^{p+1}J_p\left(\frac{\alpha}{a}x\right)dx=\frac{a^{p+2}}{\alpha}J_{p+1}(\alpha)$$

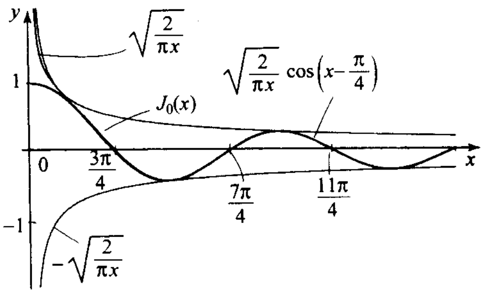
$$\int xJ_{2n}(x)\,dx=xJ_{2n+1}(x)-2nJ_0(x)-4n\sum_{k=1}^{n}J_{2k}(x)+C$$

贝塞尔函数的零点和渐近线($n=0$，1，2，…)

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

如果 $\alpha_k=J_n(x)$ 的第 k 个正零点，则对较大的 k

$$\alpha_k\approx\frac{\pi}{4}+\frac{(n+1)\pi}{2}+k\pi$$



广义积分公式($a\neq 0$)

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{\pi}{2},若\ a>0;-\frac{\pi}{2},若\ a<0.$$

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2|a|}e^{-b^2/(4a^2)}\ (b\neq 0)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{a^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2|a|}e^{-|wa|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x^2)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

目　　录

第 1 章　应用与方法概述

一切都应该尽可能地简单，但是不要太简单.

——爱因斯坦

综述　本章是自封的，仅需微积分中的一些基本知识，如偏导数. 我们会偶尔引用一些常微分方程基础课程中的一些结论，而这些结论我们汇总在附录 A 中，如需要可以查阅.

导读　本章旨在引入一些在偏微分方程及其边值问题研究中出现的基本记号. 1.1 节引入偏微分方程概念和一些基本而有用的求解技巧；1.2 节着重于偏微分方程发展中的一个简单而重要的例子——弦振动. 我们将带领读者一起纵览该领域的主要里程碑式成果. 本章概述清楚地表明第 2 章对傅里叶级数及其性质的系统研究是必要的.

偏微分方程产生于许多科学和工程技术建模的过程中. 本章我们预览本书中将要学习的思想和方法. 我们的目标是向读者展示偏微分方程及其应用的一些特点，而不是试图给出系统的推导. 特别地，仅以张紧的弦振动为例，我们展示偏微分方程是如何从物理现象建模中产生的，以及对偏微分方程解的解释如何帮助我们理解物理现象. 本章最后专门讲述了傅里叶级数的初步知识，以此显示傅里叶级数在研究偏微分方程应用中的重要性. 1

1.1　什么是偏微分方程

粗略地说，偏微分方程就是一个含有多个变量的未知函数及其偏导数的方程. 读者可以回忆描述特定类型的常微分方程所涉及的一些概念，如阶、次数、线性性和其他性质. 在偏微分方程分类和学习中还会出现其他概念，如自变量的个数和求解方程的区域等. 本书就是系统学习某些类偏微分方程，特别是强调它们的应用. 本节我们仅仅给出几个初等例子，以向读者展示该课程的特点.

例 1　**一阶偏微分方程**

考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{1}$$

其中 $u=u(x, t)$是未知函数. 如果 f 是任意一个单变量可微函数，令

$$u(x,t)=f(x-t),$$

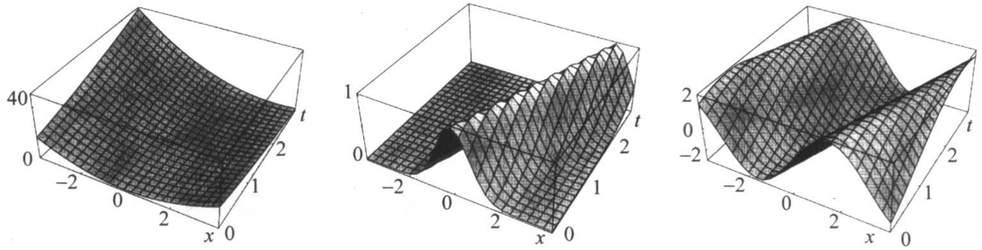
则 u 是方程(1)的解. 事实上，由链式法则，计算得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-f'(x-t) \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial x}=f'(x-t),$$

所以(1)成立. 方程(1)的一些显式解是

$$(x-t)^2,\quad e^{-(x-t)^2},\quad 3\sin(x-t),\quad 2\cos(x-t),\quad e^{(x-t)},\cdots$$

前面三个函数如图 1 所示.



a) $u(x,t)=(x-t)^2$　b) $u(x,t)=e^{-(x-t)^2}$　c) $u(x,t)=3\sin(x-t)$

图 1　方程(1)的一些显式解. 注意函数 u 在任意直线 $x-t=c$ 上取常值,

2 因为 u 是形如 $u=f(x-t)$ 的解 ■

我们所考虑的方程称为平流方程, 它来源于流体动力学(有关该方程的一个有趣应用, 请参阅 1.2 节习题 27). 这是一个一阶线性齐次偏微分方程. 这里一阶是指方程中所出现的导数的最高阶数, 线性齐次是指方程解的任意线性组合仍然是方程的解(在第 3 章, 我们将更详细地讨论这些概念). 由图 1 可知, 方程(1)解的范围可以是很广泛的, 方程(1)还是一个比较简单的偏微分方程. 作为比较, 你可以回忆一下一阶线性常微分方程, 其解族可以比较简单地描述出来. 例如, 下面方程

$$y'-y=0 \tag{2}$$

的解族是函数族

$$y=Ae^x.$$

如图 2 所示, 其解都是常数乘以解 e^x 的形式. 为选出方程(2)的某个特解, 我们需要加上一个初始条件, 比如 $y(0)=2$, 可以得到解为 $y=2e^x$.

由图 1 显然可以看出, 为选出偏微分方程(1)的某个特解, 我们需要更多信息. 一般地, 我们将加上一个确定 u 沿 xt 平面上某条曲线取值的条件, 如 u 沿 x 轴取值, 这些条件称为**边界条件**或**初始条件**.

例 2　边界条件或初始条件

在方程(1)的所有解当中, 哪个解满足沿 x 轴 $u=e^{-x^2}$ 的条件? 这里我们寻求满足 $u(x,\ 0)=e^{-x^2}$ 的解. 用例 1 中的解 $u(x,\ t)=f(x-t)$, 我们求出

$$u(x,0)=f(x)=e^{-x^2}.$$

所以满足条件的解为 $u(x,\ t)=e^{-(x-t)^2}$(参见图 1b). 我们可以将 t 看作时间变量, 从而得到一种有趣而形象地解读方程解的方法: 对任意固定的时刻 t, $u(x,\ t)$作为 x 的函数, 其图像就是一个波的图形(参见图 3). 注意到, 波形从左向右运动, 其形状不改变.

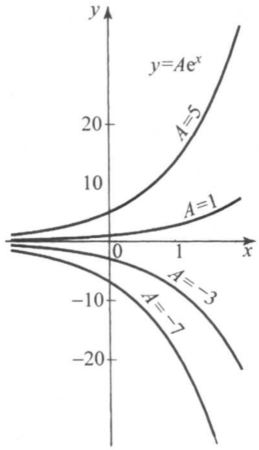


图 2　方程(2)的解

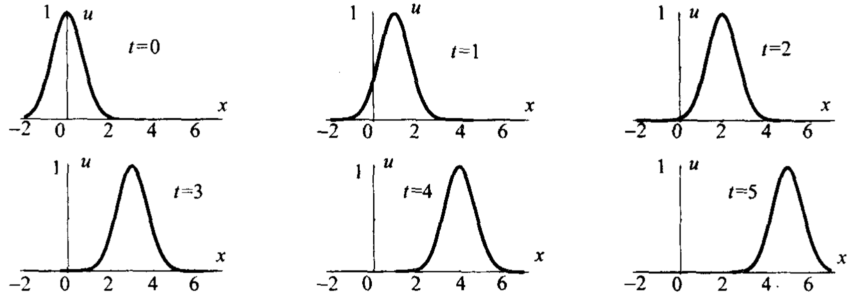


图 3　波形从左向右运动，其形状不改变 ■ 3

在例 1 中，我们提到许多解，但是没有讲如何推导出这些解；同时，我们并不清楚是否得到了所有解．下面的推导将告诉我们，事实上我们确实得到了所有解，也将显示出适当的变量代换可以简化所考虑的问题．

例 3　方程(1)的通解

我们的方案是通过作线性变量代换

$$\alpha = ax + bt, \quad \beta = cx + \mathrm{d}t,$$

将偏微分方程(1)化简成一个常微分方程，其中 a，b，c 和 d 将适当选定．由二维链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

类似地，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

代入(1)，并化简得

$$(a+b)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (c+d)\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

现在，我们选取 a，b，c 和 d 以消去某一个偏导数．比如选取

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = -1,$$

则消去 $\partial u/\partial\beta$．这样，原方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

这是一个关于 α 的简单常微分方程，其解为 $u=C$，这里 C 是 β 的函数(相对于 α 而言，是常数)．所以原方程的通解为 $u=C(\beta)=C(x-t)$，这与例 1 的答案相符．最后，注意到 a，b，c 和 d 的其他选取方式也可以得到解(参见习题 4)． ■

例 3 表明了偏微分方程是如何产生许多解的，当我们对关于两个自变量的方程求积分时，积分常数必须是一个依赖于另一个自变量的函数．所以在对方程求积分以后，我们得到一个依赖于另一个自变量的任意函数，而不像在常微分方程情形，仅仅得到一个任意常数．

例 3 中的变量代换将偏微分方程化为更容易求解的常微分方程，本书中经常用到这种将偏 4
微分方程化简为常微分方程的方法(习题 10 是另一个例证)．

习题 1.1

1. 设 u_1 和 u_2 是(1)的解，试证 $c_1u_1+c_2u_2$ 也是(1)的解，其中 c_1 和 c_2 为常数.（这表明(1)是线性方程.）
2. (a)(1)的哪个解在 x 轴上等于 xe^{-x^2}？

   (b)绘出这个解作为 x 和 t 的函数时的图像，描述 x 轴的像.
3. (a)求(1)的解，使其在 t 轴上等于 t.

   (b)绘出这个解作为 x 和 t 的函数时的图像，描述 t 轴的像.
4. 参考例 3，求(1)的解，取 $a=1$，$b=1$，$c=1$，$d=-1$.

   如例 3 所做，适当选取变量代换，求习题 5～8 的通解.
5. $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.
6. $2\dfrac{\partial u}{\partial t}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.
7. $\dfrac{\partial u}{\partial t}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}=2$.
8. $a\dfrac{\partial u}{\partial t}+b\dfrac{\partial u}{\partial x}=u,\quad a,\ b\neq 0$.
9. (a)求习题 5 的解，使其在 x 轴上等于 $\dfrac{1}{1+x^2}$.

   (b)绘出这个解作为 x 和 t 的函数时的图像.

   (c)当 t 增加时，波形向哪个方向运动？

特征线法. 利用特征线法，我们可以求解形如

$$\frac{\partial u}{\partial x}+p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{3}$$

的一阶线性变系数偏微分方程，其中 $p(x,y)$是 x 和 y 的函数. 我们首先回顾多元微积分和常微分方程的两个重要概念.

假设 $v=(v_1,v_2)$是单位向量，$u(x,y)$是二元函数，函数 u 在点(x_0,y_0)处(关于方向 v)的**方向导数**为

$$v_1\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+v_2\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

方向导数刻画了函数 u 在点(x_0,y_0)处沿方向 v 运动时的变化率. 从而，如果(a,b)是任意一个非零向量，则关系式

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

表明 u 沿方向(a,b)的取值不变.

转到常微分方程，考虑方程

5 $$\frac{dy}{dx}=p(x,y), \tag{4}$$

将(4)的解看成 xy 平面上的曲线. 方程(4)告诉我们解曲线在点(x_0,y_0)处切线的斜率等于 $p(x_0,y_0)$，或者说解曲线在点(x_0,y_0)沿向量$(1,p(x_0,y_0))$方向变化. 如果我们在很多点处画出向量$(1,p(x,y))$，就得到微分方程(4)的**方向场**. 方向场是一非常重要的概念，因为它能使我们快速地看出方程(4)解的定性特征. 特别地，连续不断地沿着方向场$(1,p(x,y))$的方向运动，我们可以画出过点(x,y)的解曲线.

现在我们可以叙述特征线法，回到(3)，该方程表明：在任意一点(x,y)处，u 关于向量$(1,p(x,y))$的方向导数为 0，所以当我们沿着向量$(1,p(x,y))$的方向运动时，函数 $u(x,y)$保持不变. 但是，向量

(1，$p(x,\ y)$)决定了方程(4)的方向场，也就是说，$u(x,\ y)$在(4)的解曲线上是常值．这些解曲线称为方程(3)的**特征线**(参见图4,下面将具体讨论 $p(x,\ y)=x$ 的情形)．为方便起见，我们将(4)的解(特征线)写成

$$\phi(x,y)=C$$

的形式，其中 C 是任意常数．因为 u 在每一条曲线上是常数，所以 u 的值只依赖于 C，即 $u(x,\ y)=f(C)$，其中 f 是任意函数，或

$$u(x,y)=f(\phi(x,y)),$$

这就得到了方程(3)的解．

作为例子，求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

此时我们有 $p(x,\ y)=x$，解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$，我们得到特征线 $y=\frac{1}{2}x^2+C$，或 $y-\frac{1}{2}x^2=C$．从而 $\phi(x,\ y)=y-\frac{1}{2}x^2$，偏微分方程的通解为 $u(x,\ y)=f(\phi(x,\ y))$，其中 f 是任意函数．把它们代回方程，直接验证，便知是解．

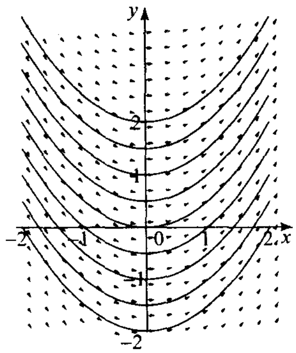


图 4 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$ 的方向场和特征线 $y-\frac{1}{2}x^2=C$

值得指出的是，运用特征线法求解偏微分方程(3)，我们只需求解常微分方程(4)，所以特征线法是另外一种将偏微分方程化简为常微分方程的方法．

10. 考虑方程 $a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$，其中 a，b 是非零常数．

(a)此方程说明 u 的方向导数是什么？

(b)试确定特征线．

(c)运用特征线法求解此方程．

在习题 11～14 中，(a)运用特征线法求解方程；(b)代入方程验证你的答案．

11. $\frac{\partial u}{\partial x}+x^2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

12. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

13. $\frac{\partial u}{\partial x}+\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

14. $e^{x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$ 6

1.2 求解并解释偏微分方程

17世纪后叶，牛顿力学的发现越来越表明，物理学和工程技术中的许多定律最好运用与变化率有关的关系式来描述．当翻译成数学语言时，这些关系式通常导出微分方程，因为变化率对应于导数．考察牛顿运动第二定律：$F=ma$，这个基本定律告诉我们：如果可以显式地表达外力，则我们就得到一个关于位置的微分方程(注意到，a 表示加速度，也就是位置的二阶导数．)

例如，在质点-弹簧系统中，质点受线性弹力作用，即 $F=-kx$(虎克定律)．此时，质点的运动由微分方程 $mx''+kx=0$ 决定，其中 x 表示质点的位置，它是时间 t 的函数．如果给定