数学类

21世纪高职高专系列教材

高等数学

（下册）

■ 湖北省教育厅组编

■ 主　编　朱永银　童吉春

■ 主　审　高成修　安志鹏

全国优秀出版社
武汉大学出版社

数学类

21世纪高职高专系列教材

高等数学

（下册）

■ 湖北省教育厅组编

■ 主　编　朱永银　童吉春

■ 主　审　高成修　安志鹏

■ 副主编　冯兴山　肖业胜
　　　　　潘玉恒　沈　萍

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/湖北省教育厅组编;朱永银,童吉春主编;高成修,安志鹏主审.—武汉:武汉大学出版社,2004.6

(21世纪高职高专系列教材)

ISBN 7-307-04143-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①湖… ②朱… ③童… ④高… ⑤安… Ⅲ.高等数学—高等数学:技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第023428号

责任编辑:李汉保　　责任校对:王　建　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉大学出版社印刷总厂

开本:880×1230　1/32　印张:6.75　字数:188千字

版次:2004年6月第1版　2004年6月第1次印刷

ISBN 7-307-04143-X/O·291　　定价:12.00元

内容简介

21世纪高职高专《高等数学》教材内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数的积分学、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数等。全书分上、下两册，共有10章，各章后附有历史的回顾与评述，主要介绍数学发展史与相关数学大师。全书约40万字。

本教材主要体现了以下特点:

一是教材注意了与高中数学知识的衔接，加强了幂函数、指数函数、对数函数和三角函数的教学，并在书后附有初等数学公式简表，便于学生复习和自学。对于书中所涉及到的若干定理、推论、命题等，既不追求详细的证明，又不失数学理论的严谨。

二是注意将数学建模的思想融入到教学中，加强与实际结合，使学生能灵活运用数学知识解决实际问题，从而提高了学生的创新能力，将来能更好地为建设社会主义祖国服务。

三是注意将新的教学手段和新的教育思想贯穿到教学实践中，利用数学软件计算积分，并在附录中列出 Mathematica 软件及其用法，使学生掌握现代计算机技术。教师改革教学方法，用现代多媒体技术进行教学，从而提高教学质量。

出版说明

教材建设,“双师型”教师队伍建设和实践教学基地建设是高等职业教育教学工作的三大基本建设工作,是实现高职高专教育人才培养目标的重要保证,是办好高等职业教育、办出高等职业教育特色的最为紧迫的任务之一。最近几年,高职高专教育以迅猛之势发展。相对而言,教材建设仍滞后于高职高专教育的发展需要,还存在不少问题,如对高职高专教育教材建设工作的重要性认识不足;对高职高专教育教材的编写形式、体系、体例等缺乏深入研究,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,高职高专学校选用的教材没有充分体现职业技术教育的特色;教材建设缺少行业专家的帮助与指导,缺乏科学的理论支持,适应不了知识经济和现代高新技术发展的要求;与专业教材配套的实践、实训教材建设严重滞后,等等。高职高专教育教材建设存在的这些问题,严重影响着高等职业教育的质量和人才的培养。随着高等职业教育的飞速发展和教育教学改革的不断深化,要办出高职高专教育特色,提高人才培养质量,高职高专学校必须加强自身体系的教材建设。

为做好我省高职高专学校教材建设工作,在充分调查论证的基础上,今年,湖北省教育厅启动了湖北省高职高专教育专业系列教材建设工作。总的原则是,遵循高等教育规律,突出高等职业教育的特点,充分吸取近年来高职高专学校在培养高等技术应用型专门人才和教学改革方面取得的成功经验,结合湖北省高职高专院校专业建设和教学工作的实际,以专业系列教材为重点,组织省内相关院校的专业课教师,分期分批编写相关专业的系列教材。教材编写强调面向行业,增强针对性和实用性,体现适应、实用、简明的要求,重视学生实践能力的培养,同时,教材建设不仅要注重内容和体系的改革,

创新体系结构和编写形式，还要注意方法和手段的改革，紧扣时代脉搏，以跟上科技发展和经济建设工作对各层次人才的实际需要。

参加《21世纪高职高专系列教材》编写的教师是经过各高校推荐并经湖北省教育厅严格遴选的，他们长期从事高职高专教育，熟悉专业教学工作，有较为丰富的教学实践经验。武汉大学出版社对省编高职高专专业系列教材工作给予了极大的支持。我们期望，通过省编教材的建设，最终形成有我省特色的、门类比较齐全的高职高专教育专业课程系列教材，促进专业建设，推进高职高专教育人才培养模式改革，提高人才培养质量。

湖北省教育厅

2003年8月

前　言

为了推动高职高专教材建设，提高高职高专教育质量，湖北省教育厅根据国家教育部高教司[2000]19 号文件的精神，特组织全省高职高专一大批具有较高理论水平和丰富教学经验的骨干教师，对若干专业和基础课程的教材进行系统建设。《高等数学》就是其中首批重点建设的系列教材之一。

本套教材是湖北省教育厅委托湖北省数学学会高职高专数学研究会、武汉工业与应用数学学会和武汉大学出版社，组织全省部分高职高专院校的数学骨干教师经过近两年的努力编写而成的。在编写过程中力求做到以应用为目的，以“必需、够用”为度，以讲清概念、强化应用为重点。本套教材的主要特点是:(1)在保持传统体系的基础上，力求有所创新；(2)注意与中学数学知识的衔接，在复习初等数学知识的基础上加以提高，并将初等数学常用公式附在书后，以便读者学习时查阅；(3)体现数学建模思想，注重数学软件应用的训练；(4)为了增加可读性，提高学生学习数学的兴趣和积极性，每章后附有阅读材料。本套教材包括《高等数学》(上册)、《高等数学学习指导》(上册)、《高等数学》(下册)、《高等数学学习指导》(下册)。《高等数学》上、下册共有 10 章和 9 个附录，每节后有习题，书后附有参考答案。打“*”号的内容供选学。本教材可供高职高专各类专业选用。

本套教材由朱永银、童吉春、叶子祥、张敏担任主编，由朱永银教授负责总策划，拟订编写大纲，对全书进行统稿。武汉大学高成修教授，武汉职业技术学院安志鹏副院长担任主审，他们对全套书提出了宝贵的修改意见，编者不胜感激。

《高等数学》(下册)由朱永银、童吉春担任主编，高成修、安志鹏担任主审。由冯兴山、肖业胜、潘玉恒、沈萍担任副主编。参加编写的还有魏莹、肖海华、李爱平、周松林、肖斌、卢开富、张国梁、郭炳艳等老师。

武汉职业技术学院、武汉生物工程职业技术学院、华中师范大学职业技术学院、襄樊职业技术学院、恩施职业技术学院、武汉工程职业技术学院、湖北轻工职业技术学院、十堰职业技术学院、随州职业技术学院、宜昌职业技术学院、郑州工程职业技术学院、荆州职业技术学院、湖北财经高等专科学校等对本套教材顺利出版给予了大力支持。本套教材还参考吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢！

由于编者水平所限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者不吝赐教，提出批评建议，以便再版时修订，使本套教材日臻完善。

编　者

2004 年 6 月

目　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

在学习一元函数微积分之前，我们学习了平面解析几何的知识.同样地，为了学习多元函数的微积分，在此之前，必须先对空间解析几何的知识作一个简要的介绍.由于向量在实际中的广泛应用，加之要用向量这个工具来研究空间的平面和直线，所以本章主要讨论向量代数与空间解析几何的有关知识.

§7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间点的直角坐标

过空间一定点 O，作三条互相垂直的直线 Ox、Oy、Oz，指定正向(它的正向符合右手法则)并选定单位长度后，即在空间建立了直角坐标系.O 点称为坐标原点，Ox、Oy、Oz 称为坐标轴(分别称为 x 轴或横轴、y 轴或纵轴、z 轴或竖轴)，如图 7-1 所示．每两条坐标轴所确定的平面称为坐标平面．三个坐标平面将空间分为八个部分，每个部分称为一个卦限，八个卦限的顺序如图 7-2 所示．

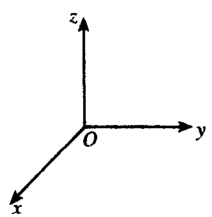

图 7-1

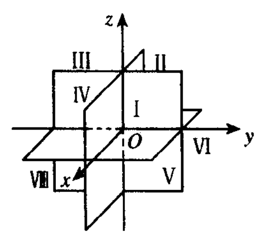

图 7-2

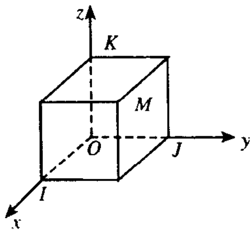

图 7-3

建立空间直角坐标系以后，空间内的一个点就可以用坐标来表示：设 M 是空间内一点，过 M 点作三个平面分别垂直于坐标轴，记它们与 Ox、Oy、Oz 轴的交点依次为 I、J、K 三点，如图 7-3 所示．若 I、J、K 在对应坐标轴上的坐标分别为 x、y、z，则把 (x,y,z) 称为 M 点的直角坐标，记为 $M(x,y,z)$；x 称为横坐标，y 称为纵坐标，z 称为竖坐标．这样，空间内任意一点 M 都惟一地确定了一组有序数 (x,y,z)；反之，任意给定一组有序实数 (x,y,z)，在空间也惟一地确定一点 M，其坐标是 (x,y,z).

由坐标的概念可以知道，原点的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$，坐标平面 xOy、yOz、xOz 上点的坐标依次为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$.

由平面解析几何中关于坐标轴的对称点的坐标和关于原点的对称点的坐标的特征，可以列出在空间直角坐标系下，关于坐标轴、坐标平面、原点对称的点的坐标，留给读者去思考．

点所在卦限不同，其坐标值的正负也不同，各卦限中点的坐标，其正负如表 7-1 所示．

表 7-1

卦　限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

例 1. 已知点 $M(3,-1,3)$，确定该点所在的卦限，并画出它在空间的位置．

解　依据表 7-1 可知，该点在第Ⅳ卦限，如图 7-4 所示．先在 xOy 平面画出横轴为 3，纵轴为 -1 的点 P，即 $P(3,-1,0)$．再由点 P 引垂线 PQ，在 PQ 上截取 PM 的长度为 3，所得点 $M(3,-1,3)$

即为所求 .

例 2. 写出点 $M(1,2,3)$ 关于原点、xOy 平面和 Ox 轴对称的点的坐标 .

解　点 M 关于原点对称的点坐标为 $(-1,-2,-3)$，关于 xOy 平面对称的点坐标为 $(1,2,-3)$，关于 Ox 轴对称的点坐标为 $(1,-2,-3)$.

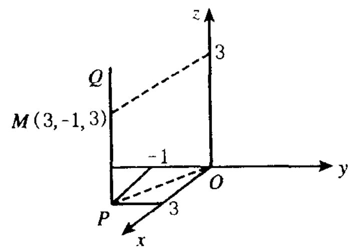

图 7-4

7.1.2　空间两点间的距离

已知空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$，求此两点间的距离 d.

如图 7-5 所示，$\triangle P_1AB$ 为直角三角形，所以由勾股定理，

有

$$|P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2. \tag{7-1}$$

同理，在直角三角形 P_1P_2B 中，有

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{|P_1B|^2+|P_2B|^2}. \tag{7-2}$$

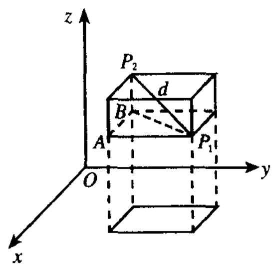

图 7-5

将式(7-1)代入式(7-2)，得

$$d=\sqrt{|P_1A|^2+|AB|^2+|P_2B|^2},$$

又因为

$$|P_1A|=|y_2-y_1|,\ |AB|=|x_2-x_1|,\ |P_2B|=|z_2-z_1|,$$

从而得到 P_1、P_2 两点间的距离公式为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7-3}$$

特别地，点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{7-4}$$

例 3. 求点 $M_1(0,1,-1)$、$M_2(2,3,-1)$ 之间的距离 .

解　由两点间的距离公式(7-3)，得

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2+(-1+1)^2}$$
$$=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

例 4. 在 z 轴上求与两点 $A(-2,-1,3)$、$B(2,4,-2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 z 轴上,故可设此点为 $M(0,0,z)$,依题意有 $|AM|=|BM|$,即

$$\sqrt{(0+2)^2+(0+1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(0-4)^2+(z+2)^2}.$$

两边去根号,化简,得 $10z=-10$,$z=-1$,所以所求的点为 $M(0,0,-1)$.

习题 7-1

1. 求点 $M(2,-3,-2)$ 关于各坐标平面的对称点的坐标,并指出这些点在哪一卦限.

2. 求点 $P(4,-3,5)$ 与原点及各坐标轴间的距离.

3. 证明以 $P_1(4,3,1)$、$P_2(7,1,2)$、$P_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

§7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的概念

在研究力学、物理学及其他应用科学时,常会遇到这样一类量,它们既有大小,又有方向,例如力、位移、速度等.这一类量叫做向量.

在数学上,通常用一条有方向的线段、即有向线段来表示向量:有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.向量常记为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、….起点为 A、终点为 B 的有向线段所表示的向量常记为 $\overrightarrow{AB}$.

表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小的数称为向量的模(或向量的长度),记为 $|\boldsymbol{a}|$.模等于零的向量称为零向量,记为 $\boldsymbol{0}$.零向量的方向可以看做是任意的,它表示空间一点.模等于1的向量称为单位向量.对于

非零向量$\boldsymbol{a}$,用$\boldsymbol{a}^0$表示和向量$\boldsymbol{a}$同向的单位向量，简称为$\boldsymbol{a}$的单位向量．在空间直角坐标系中，如果以坐标原点为起点，向一个点M引向量$\overrightarrow{OM}$，这个向量称为点M对于起点O的向径，常用r表示．于是，空间每一点M，对应一个向径$\overrightarrow{OM}$；反之，每一个向径$\overrightarrow{OM}$对应着一个确定的点M，如图 7-6 所示．

当两个向量的方向相同、模相等时，称它们为相等的向量，如图 7-7 中的$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$,记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 因此,任意一个向量经过平移后与原向量相等．与$\boldsymbol{a}$的模相等而方向相反的向量叫做$\boldsymbol{a}$的负向量，如图 7-7 中的$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$，记为$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}$.

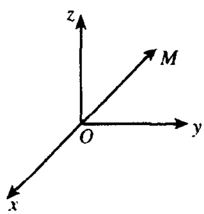

图 7-6

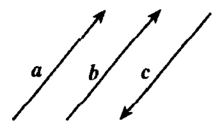

图 7-7

7.2.2　向量的线性运算

1. 向量的加法与减法

(1) 向量的加法　两向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的和是以这两向量作相邻两边的平行四边形的对角线向量$\overrightarrow{OC}$(如图 7-8 所示),记为

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

或

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这一方法称为向量加法的平行四边形法则．

还可以这样作出两向量的和:作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以$\overrightarrow{OA}$的终点$A$为起点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,连接$OC$，就得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$,如图 7-9 所示．这一方法称为向量加法的三角形法则．由

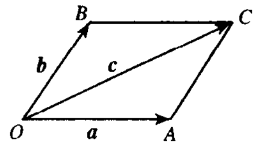

图 7-8

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC} \tag{7-5}$$

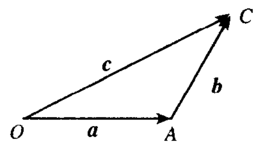

图 7-9

可以推广到更多向量相加的情形，即

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}. \tag{7-6}$$

向量加法满足交换律、结合律．如设有向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，即有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \tag{7-7}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{7-8}$$

特别地，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行或在同一直线上)，则规定它们的和是这样一个向量：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 指向相同时，和向量的方向与原来向量方向相同，其模等于两向量的模的和；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的指向相反时，和向量的方向与模较大的向量的方向相同，而模等于较大向量的模减去较小向量的模．

(2) 向量的减法　由负向量的概念，规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}), \tag{7-9}$$

特别地 $$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \tag{7-10}$$

如图 7-10 所示，由三角形法则可以看出：要从 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$，只要将与 $\boldsymbol{b}$ 长度相等而方向相反的向量 $-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上去即可．

也可以用这样的方法作出两个向量的差．将向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 移到公共起点 O，设向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为 B，向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为 A，从 A 向 B 引向量 $\overrightarrow{AB}$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}. \quad (7\text{-}11)$$

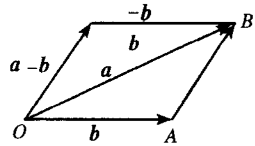

图 7-10

事实上不必画图，如果用两个大写字母表示向量，可以直接从式(7-5)或式(7-11)对向量进行加减运算．

2. 向量与数的乘法

设 λ 是个数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 规定如下：

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，如图 7-11 所示．

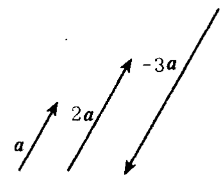

图 7-11

向量与数的乘积满足下述运算律：

结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

分配律　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

其中 λ、μ 都是实数．

例 1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}$.

解　$2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

例 2. 在平行四边形 $ABCD$ 内，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$AD=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$. 这里，M 是平行四边形对角线的交点，如图 7-12 所示．

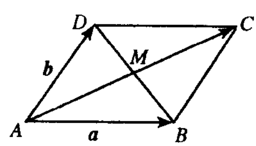

图 7-12

解　由于平行四边形对角线互相平分，所以有