Selected Papers of Guo Boling

Volume 3

郭柏灵论文集

第三卷

华南理工大学出版社

郭柏灵论文集

（第三卷）

郭柏灵 著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

郭柏灵论文集.第三卷/郭柏灵著.—广州:华南理工大学出版社,2006.12
ISBN 7-5623-2481-6

Ⅰ.郭… Ⅱ.郭… Ⅲ.①郭柏灵-文集②非线性方程-文集 Ⅳ.O175-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 157363 号

总 发 行:华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)
营销部电话:020-87113487 87110964 87111048(传真)
E-mail:scutc13@scut.edu.cn http://www.scutpress.com.cn
责任编辑:詹志青 胡 元
印 刷 者:广东省农垦总局印刷厂
开 本:787mm×1092mm 1/16 **印张**:23 **插页**:2 **字数**:577 千
版 次:2006 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
定 价:52.00 元

郭柏灵院士

序

今年是恩师郭柏灵院士70寿辰，华南理工大学出版社决定出版《郭柏灵论文集》。郭老师的弟子，也就是我的师兄弟，推举我为文集作序。这使我深感荣幸。我于1985年考入北京应用物理与计算数学研究所，师从郭柏灵院士和周毓麟院士。研究生毕业后我留在研究所工作，继续跟随郭老师学习和研究偏微分方程理论。老师严谨的治学作风和对后学的精心培养与殷切期望，给我留下了深刻的印象，同时老师在科研上的刻苦精神也一直深深地印在我的脑海中。

郭老师1936年生于福建省龙岩市新罗区龙门镇，1953年从福建省龙岩市第一中学考入复旦大学数学系，毕业后留校工作。1963年，郭老师服从祖国的需要，从复旦大学调入北京应用物理与计算数学研究所，从事核武器研制中有关的数学、流体力学问题及其数值方法研究和数值计算工作。他全力以赴地做好了这项工作，为我国核武器的发展做出了积极的贡献。1978年改革开放以后，他又在非线性发展方程数学理论及其数值方法领域开展研究工作，现为该所研究员、博士生导师，中国科学院院士。迄今他共发表学术论文300余篇、专著9部，1987年获国家自然科学三等奖，1994年和1998年两度获得国防科工委科技进步一等奖，为我国的国防建设与人才培养做出了巨大贡献。

郭老师的研究方向涉及数学的多个领域，其中包括非线性发展方程的数学理论及其数值解、孤立子理论、无穷维动力系统等，其研究工作的主要特点是紧密联系数学物理中提出的各种重要问题。他对力学及物理学等应用学科中出现的许多重要的非线性发展方程进行了系统深入的研究，其中对Landau－Lifshitz方程和Benjamin－Ono方程的大初值的整体可解性、解的唯一性、正则性、渐近行为以及爆破现象等建立了系统而深刻的数学理论。在无穷维动力系统方面，郭老师研究了一批重要的无穷维动力系统，建立了有关整体吸引子、惯性流形和近似惯性流形的存在性和分形维数精细估计等理论，提出了一种证明强紧吸引子的新方法，并利用离散化等方法进行理论分析和数值计算，展示了吸引子的结构和图像。下面我从这几个方面介绍郭老师的一些学术成就。

Landau－Lifshitz方程（又称铁磁链方程）由于其结构的复杂性，特别是强耦合性和不带阻尼时的强退化性，在20世纪80年代之前国内外几乎没有从数学上进行理论研究的成果出现。最先进行研究的，当属周毓麟院士和郭老师，他们在1982年到1986年间，采用Leray－Schauder不动点定理、离散方法、Galerkin方法证明了从一维到高维的各种边值问题整体弱解的存在性，比国外在1992年才出现的同类结果早了将近10年。

20世纪90年代初期，周毓麟、郭柏灵和谭绍滨，郭柏灵和洪敏纯得到了两个在国内外至今影响很大的经典结果。第一，通过差分方法结合粘性消去法，利用十分巧妙的先验估计，证明了一维Landau－Lifshitz方程光滑解的存在唯一

性，对于一维问题给出了完整的答案，解决了长期悬而未决的难题。第二，系统分析了带阻尼的二维 Landau - Lifshitz 方程弱解的奇性，发现了 Landau - Lifshitz 方程与调和映照热流的联系，其弱解具有与调和映照热流完全相同的奇性。现在，国内外这方面的文章基本上都引用这个结果。调和映照的 Landau - Lifshitz 流的概念，即是源于此项结果。

20 世纪 90 年代中期，郭老师对于 Landau - Lifshitz 方程的长时间性态、Landau - Lifshitz 方程耦合 Maxwell 方程的弱解及光滑解的存在性问题进行了深入的研究，得到了一系列的成果。铁磁链方程的退化性以及缺少相应的线性化方程解的表达式，对研究解的长时间性态带来很大困难。郭老师的一系列成果克服了这些困难，证明了近似惯性流形的存在性、吸引子的存在性，给出了其 Hausdorff 和分形维数的上、下界的精细估计。此外，我们知道，与调和映照热流比较，高维铁磁链方程的研究至今还很不完善。其中最重要的是部分正则性问题，其难点在于单调不等式不成立，导致能量衰减估计方面的困难。另外一个是 Blow-up 解的存在性问题，至今没有解决；而对于调和映照热流来说，这样的问题的研究是比较成熟的。

对于高维问题，20 世纪 90 年代后期至今，郭老师和陈韵梅、丁时进、韩永前、杨干山一道，得出了许多成果，大大地推动了该领域的研究。首先，证明了二维问题的能量有限弱解的几乎光滑性及唯一性，这个结果类似于 Freire 关于调和映照热流的结果。第二，得到了高维 Landau - Lifshitz 方程初边值问题的奇点集合的 Hausdorff 维数和测度的估计。第三，得到了三维 Landau - Lifshitz - Maxwell 方程的奇点集合的 Hausdorff 维数和测度的估计。第四，得到了一些高维轴对称问题的整体光滑解和奇性解的精确表达式。郭老师还开创了一些新的研究领域。例如，关于一维非均匀铁磁链方程光滑解的存在唯一性结果后来被其他数学家引用并推广到一般流形上。其次，率先讨论了可压缩铁磁链方程测度值解的存在性。最近，在 Landau - Lifshitz 方程耦合非线性 Maxwell 方程方面，也取得了许多新的进展。

多年来，郭老师还对一大批非线性发展方程解的整体存在唯一性、有限时刻的爆破性、解的渐近性态等开展了广泛而深入的研究，受到国内外同行的广泛关注。研究的模型源于数学物理、水波、流体力学、相变等领域，如含磁场的 Schrödinger 方程组、Zakharov 方程、Schrödinger - Boussinesq 方程组、Schrödinger - KdV 方程组、长短波方程组、Maxwell 方程组、Davey - Stewartson 方程组、Klein - Gordon - Schrödinger 方程组、波动方程、广义 KdV 方程、Kadomtsev - Petviashvili(KP) 方程、Benjamin - Ono 方程、Newton - Boussinesq 方程、Cahn - Hilliard 方程、Ginzburg - Landau 方程等。其中不少耦合方程组都是郭老师得到了第一个结果，开创了研究的先河，对国内外同行的研究产生了深远的影响。

郭老师在无穷维动力系统方面也开展了广泛的研究，取得了丰硕的成果。

对耗散非线性发展方程所决定的无穷维动力系统，研究了整体吸引子的存在性、分形维数估计、惯性流形、近似惯性流形、指数吸引子等问题。特别是在研究无界域上耗散非线性发展方程的强紧整体吸引子存在性时所提出的化弱紧吸引子成为强紧吸引子的重要方法和技巧，颇受同行关注并广为利用。对五次非线性 Ginzburg－Landau 方程，郭老师利用空间离散化方法将无限维问题化为有限维问题，证明了该问题离散吸引子的存在性，并考虑五次 Ginzburg－Landau 方程的定态解、慢周期解、异宿轨道等的结构。利用有限维动力系统的理论和方法，结合数值计算得到具体的分形维数（不超过 4）和结构以及走向混沌、湍流的具体过程和图像，这是一种寻求整体吸引子细微结构新的探索和尝试，对其他方程的研究也是富有启发性的。1999 年以来，郭老师集中于近可积耗散的和 Hamilton 无穷维动力系统的结构性研究，利用孤立子理论、奇异摄动理论、Fenichel 纤维理论和无穷维 Melnikov 函数，对于具有小耗散的三次到五次非线性 Schrödinger 方程，证明了同宿轨道的不变性，并在有限维截断下证明了 Smale 马蹄的存在性，目前，正把这一方法应用于具小扰动的 Hamilton 系统的研究上。他对于非牛顿流无穷维动力系统也进行了系统深入的研究，建立了有关的数学理论，并把有关结果写成了专著。以上这些工作得到国际同行们的高度评价，被称为“有重大的国际影响”、“对无穷维动力系统理论有重要持久的贡献”。最近，郭老师及其合作者又证明了具耗散的 KdV 方程 L^2 整体吸引子的存在性，该结果也是引人注目的。

郭老师不仅自己辛勤地搞科研，还尽心尽力培养了大批的研究生（硕士生、博士生、博士后），据不完全统计，有 40 多人。他根据每个人不同的学习基础和特点，给予启发式的具体指导，其中的不少人已成为了该领域的学科带头人，有些人虽然开始时基础较差，经过培养，也得到了很大提高，成为了该方向的业务骨干。

《郭柏灵论文集》按照郭老师在不同时期所从事的研究领域，分成多卷出版。文集中所搜集的都是郭老师正式发表过的学术成果。把这些成果整理成集出版，不仅系统地反映了他的科研成就，更重要的是对于从事这方面学习、研究的学者无疑大有裨益。这本文集的出版得到了多方面的帮助与支持，特别要感谢华南理工大学校长李元元教授、华南理工大学出版社范家巧社长和华南理工大学数学科学学院吴敏院长的支持。还要特别感谢华南理工大学的李用声教授、华南师范大学的丁时进教授、北京应用物理与计算数学研究所的苗长兴研究员等人在论文的搜集、选择与校对等工作中付出了辛勤的劳动。感谢华南理工大学出版社的编辑对文集的精心编排工作。

谭绍滨

2005 年 8 月于厦门大学

目　　录

1992 年

1993 年

1994 年

1995 年

Hirota 型非线性发展方程的整体光滑解*

郭柏灵 谭绍滨

摘 要

本文研究如下 Hirota 型非线性发展方程

$$i\partial_t\psi + \alpha\partial_x^2\psi + i\beta\partial_x^2\psi + i\gamma\partial_x(|\psi|^2\psi) + \delta|\psi|^2\psi = 0,$$

Cauchy 问题整体光滑解的存在性、唯一性及解的收敛性与衰减估计.

关键词 Hirota 方程、偏微分方程、存在唯一性

1 引 言

Hirota 方程[1]是孤立子问题研究中的重要非线性发展方程.它包含了相当丰富的物理内容,其中有众所周知的 KdV 方程、非线性 Schrödinger 方程、非线性导数 Schrödinger 方程,特别包含了导数非线性 Schrödinger－KdV 方程,它在等离子体物理中表现为大振幅低混杂波和有限频率密度扰动的相互作用.现已有大量文献[2~8]研究了它们的物理性质和孤立子问题.本文研究如下 Hirota 型非线性发展方程的 Cauchy 问题:

$$i\partial_t\psi + \alpha\partial_x^2\psi + i\beta\partial_x^3\psi + i\gamma\partial_x(|\psi|^2\psi) + \delta|\psi|^2\psi = 0, \tag{1.1}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbf{R}^1,\ t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

其中,$i=\sqrt{-1}$;$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为实常数.

通过较复杂的推导,得到了该问题的守恒律及高阶导数的恒等式.在此基础上,利用细致的先验估计方法,首次得到了该方程 Cauchy 问题整体光滑解的存在性、唯一性,以及当方程中某些项的系数趋于零时,解的收敛性和解依空间方向的衰减性估计.

2 主 要 结 果

定理 1(整体存在唯一性) 设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为实常数,满足 $\beta\gamma\neq 0$,初值 $\psi_0(x)\in H^k(\mathbf{R})$,则对任意常数 $T>0$,Cauchy 问题(1.1),(1.2)存在唯一解 $\psi(t,x)\in W(k,T)$,这里

$$W(k,T) = \left\{u(t,x)\,|\,\partial_t^s u \in L^\infty(0,T;H^{k-3s}(\mathbf{R}));s,k \text{ 为非负整数,满足 } k\geqslant 3, s\leqslant\frac{k}{3}\right\}. \tag{2.1}$$

定理 2(收敛性) 在定理 1 的条件下,有

(ⅰ)记 ψ_δ 为问题(1.1),(1.2)的唯一整体解,则存在函数 $\psi\in W(K,T)$,使得 $\psi_s\to\psi$

* 国家自然科学基金资助项目
本文刊于《中国科学(A辑)》1992 年第 8 期第 804～811 页.

在$W(k,T)$中弱 * 收敛($\delta\to 0$),而 ψ 为如下非线性 Schrödinger-KdV 方程相应 Cauchy 问题的唯一整体解:

$$i\partial_t\psi+\alpha\partial_x^2\psi+i\beta\partial_x^3\psi+i\gamma\partial_x(|\psi|^2\psi)=0. \tag{2.2}$$

(ⅱ)记 $\psi_{\alpha\delta}$ 为问题(1.1),(1.2)的唯一整体解,存在函数 $\psi\in W(k,T)$,使得 $\psi_{\alpha\delta}\to\psi$ 在 $W(k,T)$中弱 * 收敛($\alpha,\delta\to 0$),而 ψ 为 MKdV 方程相应 Cauchy 问题的唯一整体解.

(ⅲ)设 $\alpha\neq 0,\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\delta}{\alpha}$,记 $\psi_{\beta\gamma}$ 为问题(1.1),(1.2)的唯一整体解,则存在函数 $\psi\in W^*(k,T)$,使得 $\psi_{\beta\gamma}\to\psi$ 在 $W^*(K,T)$ 中弱 * 收敛($\beta,\gamma\to 0$),而 ψ 为如下非线性 Schrödinger 方程相应 Cauchy 问题的唯一整体解:

$$i\partial_t\psi+\alpha\partial_x^2\psi+\delta|\psi|^2\psi=0, \tag{2.3}$$

其中空间 $W^*(k,T)$为

$$W^*(k,T)=\Big\{u\,|\,\partial_t^s u\in L^\infty(0,T;H^{k-2s}(\mathbf{R})),k,s \text{ 为非负整数,满足 } k\geqslant 3,s\leqslant\frac{k}{2}\Big\}. \tag{2.4}$$

定理 3(正则性与衰减估计) 在定理 1 的条件下,记 $\psi=\psi(t,x)$为 Cauchy 问题(1.1),(1.2)的整体光滑解,则有

(ⅰ)$\partial_t^r\psi\in L^2(0,T;H_{\mathrm{loc}}^{k+1-3r}(\mathbf{R}))$,其中 $r\leqslant\dfrac{k+1}{3}$.

(ⅱ)设实数 $r\geqslant\dfrac{k-j}{2},0\leqslant j\leqslant k-3$,如果$|x|^r\partial_x^j\psi_0\in L^2(\mathbf{R})$,则有

$$\partial_x^j\psi(t,x)=O\left(|x|^{-\left[1-\frac{1}{2(k-j)}\right]r}\right),\quad(|x|\to\infty).$$

3 定理 1 的证明

关于 Cauchy 问题(1.1),(1.2)局部光滑解的存在唯一性,可采用标准的抛物正则方法或 Galerkin 方法证明其局部存在性.而光滑解的唯一性可利用通常的 L^2 能量估计证明.为了文章的简洁,省去这些证明步骤,读者可参阅文献[7,8].因此,为了将 Cauchy 问题(1.1),(1.2)的局部解 $\psi=\psi(t,x)$延拓到整个时间区间$[0,T]$,只需建立模$\|\partial_x^s\psi(t,\cdot)\|_2$ 关于时间 $t\in[0,T]$无关的一致估计.这里$\|\cdot\|_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$为通常的 $L^p(\mathbf{R})$范数.不失一般性,在该定理中不妨要求常数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in[-1,1]$.

引理 3.1 设 $\psi=\psi(t,x)$为 Cauchy 问题(1.1),(1.2)的光滑解,则有如下 L^2 模与能量守恒定律:

(ⅰ)
$$\|\psi(t,\cdot)\|_2=\|\psi_0\|_2, \tag{3.1}$$

(ⅱ)
$$E_1(\psi(t,\cdot))=E_1(\psi_0)(\beta\gamma\neq 0), \tag{3.2}$$

其中能量 $E_1(\psi)=\int_{\mathbf{R}}|\partial_x\psi|^2dx-\dfrac{\gamma}{2\beta}\int_{\mathbf{R}}|\psi|^4dx+\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}\psi\partial_x\bar{\psi}dx$,$\bar{\psi}$ 为复值函数ψ的复共轭,Im 表示复数的虚部.

推论 3.1 在上述引理条件下,有

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbf{R})} \leqslant C_1,\ \forall t \in \mathbf{R}^+, \tag{3.3}$$

其中常数 C_1 只依赖于 β,γ 和模 $\|\psi_0\|_{H^1(\mathbf{R})}$.

引理 3.2 设 $\psi=\psi(t,x)$ 为 Cauchy 问题(1.1),(1.2)的光滑解,则

$$E_2(\psi(t,\cdot)) = E_2(\psi_0) + \int_0^t F(\psi(t,\cdot))\mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

其中,

$$E_2(\psi) = \int_{\mathbf{R}} |\partial_x^2\psi|^2\mathrm{d}x - \frac{5\gamma}{3\beta}\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\psi^2(\partial_x\bar{\psi})^2\mathrm{d}x - \frac{10\gamma}{3\beta}\int_{\mathbf{R}}|\psi|^2|\partial_x\psi|^2\mathrm{d}x,$$

$$F(\psi) = -2\delta\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2\psi\partial_x^2(|\psi|^2\psi)\mathrm{d}x - \frac{10\gamma}{3\beta}\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}R_0[(\partial_x\psi)^2\psi -$$
$$\partial_x(\bar{\psi}^2\partial_x\psi)]\mathrm{d}x - \frac{20\gamma}{3\beta}\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}R_0[|\partial_x\psi|^2\bar{\psi} - \partial_x(|\psi|^2\partial_x\bar{\psi})]\mathrm{d}x,$$

这里 $R_0=\mathrm{i}\alpha\partial_x^2\psi-\gamma\partial_x(|\psi|^2\psi)+\mathrm{i}\delta|\psi|^2\psi$,Re 表示复数的实部.

证 注意到事实:$2\mathrm{Re}\{\bar{u}\partial_x u\}=\partial_x(|u|^2)$,并利用分部积分,得到

1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}|\partial_x^2\psi|^2\mathrm{d}x = 2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2\bar{\psi}\partial_x^2[\mathrm{i}\alpha\partial_x^2\psi - \beta\partial_x^3\psi - \gamma\partial_x(|\psi|^2\psi) + \mathrm{i}\delta|\psi|^2\psi]\mathrm{d}x$$
$$= -2\gamma\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2\bar{\psi}\partial_x^3(|\psi|^2\psi)\mathrm{d}x - 2\delta\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2\bar{\psi}\partial_x^2(|\psi|^2\psi)\mathrm{d}x,$$

其中,

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2\bar{\psi}\partial_x^3(|\psi|^2\psi)\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2\bar{\psi}[|\psi|^2\partial_x^3\psi + 3\partial_x(|\psi|^2)\partial_x^2\psi + 3\partial_x^2(|\psi|^2)\partial_x\psi + \partial_x^3(|\psi|^2)\psi]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{5}{2}\int_{\mathbf{R}}\partial_x(|\psi|^2)|\partial_x^2\psi|^2\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2(|\psi|^2)\partial_x(|\partial_x\psi|^2)\mathrm{d}x,$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}|\partial_x^2\psi|^2\mathrm{d}x = -5\gamma\int_{\mathbf{R}}\partial_x(|\psi|^2)|\partial_x^2\psi|^2\mathrm{d}x - 5\gamma\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2(|\psi|^2)\partial_x(|\partial_x\psi|^2)\mathrm{d}x -$$
$$2\delta\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2\psi\partial_x^2(|\psi|^2\psi)\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}|\psi|^2|\partial_x\psi|^2\mathrm{d}x = 2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}|\psi|^2\partial_x\bar{\psi}\partial_x\partial_t\psi\mathrm{d}x + 2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}|\partial_x\psi|^2\bar{\psi}\partial_t\psi\mathrm{d}x$$
$$= 2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}[|\partial_x\psi|^2\bar{\psi} - \partial_x(|\psi|^2\partial_x\bar{\psi})](-\beta\partial_x^3\psi + R_0)\mathrm{d}x$$
$$= 2\beta\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^3\psi[\partial_x(|\psi|^2\partial_x\psi) - |\partial_x\psi|^2\bar{\psi}]\mathrm{d}x +$$
$$2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}R_0[|\partial_x\psi|^2\psi - \partial_x(|\psi|^2\partial_x\bar{\psi})]\mathrm{d}x,$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^3\psi[\partial_x(|\psi|^2\partial_x\psi)-|\partial_x\psi|^2\bar{\psi}]\mathrm{d}x\\
&=-\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2\psi[|\psi|^2\partial_x^3\bar{\psi}+2\partial_x(|\psi|^2)\partial_x^2\bar{\psi}+\partial_x^2(|\psi|^2)\partial_x\bar{\psi}-\\
&\quad|\partial_x\psi|^2\partial_x\bar{\psi}-\partial_x(|\partial_x\psi|^2)\bar{\psi}]\mathrm{d}x\\
&=-\frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}}\partial_x(|\psi|^2)|\partial_x^2\psi|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因此得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}|\psi|^2|\partial_x\psi|^2\mathrm{d}x\\
&=-3\beta\int_{\mathbf{R}}\partial_x(|\psi|^2)|\partial_x^2\psi|^2\mathrm{d}x+2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}R_0[|\partial_x\psi|^2\bar{\psi}-\partial_x(|\psi|^2\partial_x\bar{\psi})]\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{Re}[\psi^2(\partial_x\bar{\psi})^2]\mathrm{d}x&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\psi}[2\psi\partial_x\partial_x\bar{\psi}+\psi^2\partial_x^2\bar{\psi}]\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}|\psi|^2|\partial_x\psi|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}[\partial_x(|\psi|^2)]^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

其中右端第一项已由式(3.6)给出，因此，只需计算右端第二项. 由方程(1.1)有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}[\partial_x(|\psi|^2)]^2\mathrm{d}x&=-2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2(|\psi|^2)\bar{\psi}(-\beta\partial_x^3\psi+R_0)\mathrm{d}x\\
&=2\beta\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x\psi\partial_x^2[\partial_x^2(|\psi|^2)\bar{\psi}]\mathrm{d}x-2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}R_0\partial_x^2(|\psi|^2)\bar{\psi}\mathrm{d}x\\
&=-3\beta\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2(|\psi|^2)\partial_x(|\partial_x\psi|^2)\mathrm{d}x-2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}R_0\partial_x^2(|\psi|^2)\bar{\psi}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

于是，由式(3.7)，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{Re}[\psi^2(\partial_x\psi)^2]\mathrm{d}x&=3\beta\int_{\mathbf{R}}\partial_x(|\psi|^2)|\partial_x^2\psi|^2\mathrm{d}x-3\beta\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2(|\psi|^2)\cdot\\
&\quad\partial_x(|\partial_x\psi|^2)\mathrm{d}x+2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}R_0[(\partial_x\bar{\psi})^2\psi-\partial_x(\bar{\psi}^2\partial_x\psi)]\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

综合以上所推导的三个等式(3.5)，(3.6) 与(3.8)，消去其中的两个积分项：$\int_{\mathbf{R}}\partial_x(|\psi|^2)|\partial_x^2\psi|^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_{\mathbf{R}}\partial_x^2(|\psi|^2)\partial_x(|\partial_x\psi|^2)\mathrm{d}x$，然后关于时间 $t\geqslant 0$ 积分，立刻得到引理的结论.

推论 3.2 对任意实数 $T>0$，在引理 3.1 的条件下，有

$$
\|\psi(t,\cdot)\|_{H^2(\mathbf{R})}\leqslant C_2,\ t\in[0,T],
\tag{3.9}
$$

其中常数 C_2 只依赖于 $C_1,\dfrac{\gamma}{\beta},T$ 及模 $\|\psi_0\|_{H^2(\mathbf{R})}$.

证 注意到推论 3.1 的结论，利用 Hölder 不等式及 Gagliardo-Nirenberg 内插不等式，有

$$|F(\psi)| \leqslant C[\|\partial_x^2\psi\|_2^2 + \|\partial_x^2\psi\|_2\|\partial_x\psi\|_4^2 + \|\partial_x^2\psi\|_2 + \|\partial_x\psi\|_4^2] \leqslant C[1 + \|\partial_x^2\psi\|_2^2]$$

其中常数 C 只依赖于C_1, $\frac{\gamma}{\beta}$及模$\|\psi_0\|_{H^1(\mathbf{R})}$.

利用上估计式,由式(3.4)得

$$E_2(\psi(t,\cdot)) \leqslant E_2(\psi_0) + C\int_0^t [1 + \|\partial_x^2\psi(\tau,\cdot)\|_2^2]\mathrm{d}\tau, \tag{3.10}$$

其中,

$$E_2(\psi) \geqslant \|\partial_x^2\psi\|_2^2 - \left|\frac{15\gamma}{3\beta}\right| \|\psi\|_\infty^2\|\partial_x\psi\|_2^2 \geqslant \|\partial_x^2\psi\|_2^2 - C.$$

从而由式(3.10),利用 Gronwall 引理,知推论结论成立.

引理 3.3(积分不等式) 设常数 $P>1$,函数 $f(x), g(x)\in H^s(\mathbf{R})$及 $B(y)\in C^s(\mathbf{R})$,这里整数 $s\geqslant 3$,则

$$\|\partial_x^s(fg) - f\partial_x^s g\|_P \leqslant C_s(\|\partial_x f\|_\infty\|\partial_x^{s-1}g\|_P + \|g\|_\infty\|\partial_x^s f\|_P),$$

$$\|\partial_x^s B(f)\|_P \leqslant C_s\sum_{j=1}^{s}(\|\partial_f^j B(f)\|_\infty\|f\|_\infty^{j-1})\|\partial_x^s f\|_P,$$

其中常数 C_s 仅依赖于 s 和 P.

引理 3.4 设 $k\geqslant 3$ 为整数,则在推论 3.2 条件下,有

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{H^k(\mathbf{R})} \leqslant C_3,\ t\in[0,T], \tag{3.11}$$

其中常数 C_3 只依赖于 C_2, T 及模$\|\psi_0\|_{H^k(\mathbf{R})}$.

证 由方程(1.1),可得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}|\partial_x^k\psi|^2\mathrm{d}x &= 2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^k\bar\psi\partial_x^k\partial_t\psi\mathrm{d}x \\ &= -2\delta\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^k\bar\psi\partial_x^k(|\psi|^2\psi)\mathrm{d}x - 2\gamma\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^k\bar\psi\partial_x^{k+1}(|\psi|^2\psi)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.12}$$

下面利用推论 3.2 的结论及引理 3.3 中积分不等式,分别估计式(3.12)中右端两项.

1)

$$\left|2\delta\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^k\bar\psi\partial_x^k(|\psi|^2\psi)\mathrm{d}x\right| \leqslant C\|\partial_x^k\psi\|_2\|\partial_x^k(|\psi|^2\psi)\|_2 \leqslant C\|\partial_x^k\psi\|_2^2, \tag{3.13}$$

其中常数 C 只依赖于C_2 及模$\|\psi_0\|_{H^2(\mathbf{R})}$.

2)

$$\begin{aligned}&\left|2\gamma\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^k\bar\psi\partial_x^{k+1}(|\psi|^2\psi)\mathrm{d}x\right| \\ =& \left|2\gamma\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^k\bar\psi\partial_x^k[\psi^2\partial_x\psi + 2|\psi|^2\partial_x\psi]\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant& \left|2\gamma\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^k\bar\psi[\partial_x^k(\psi^2\partial_x\bar\psi) - \psi^2\partial_x^{k+1}\bar\psi]\mathrm{d}x\right| + \left|2\gamma\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\psi^2\partial_x^{k+1}\bar\psi\partial_x^k\bar\psi\mathrm{d}x\right| + \\ & \left|4\gamma\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^k\bar\psi[\partial_x^k(|\psi|^2\partial_x\psi) - |\psi|^2\partial_x^{k+1}\psi]\mathrm{d}x\right| + \left|4\gamma\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}|\psi|^2\partial_x^{k+1}\psi\partial_x^k\bar\psi\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant& 2|\gamma|\|\partial_x^k\psi\|_2\|\partial_x^k(\psi^2\partial_x\bar\psi) - \psi^2\partial_x^{k+1}\bar\psi\|_2 + \left|2\gamma\int_{\mathbf{R}}\psi\partial_x\psi(\partial_x^k\bar\psi)^2\mathrm{d}x\right| +\end{aligned}$$

$$4|\gamma|\|\partial_x^k\psi\|_2\|\partial_x^k(|\psi|^2\partial_x\psi)-|\psi|^2\partial_x^{k+1}\psi\|_2+\left|2\gamma\int_{\mathbf{R}}\partial_x(|\psi|^2)|\partial_x^k\psi|^2\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant C\|\partial_x^k\psi\|_2^2, \tag{3.14}$$

其中常数 C 只依赖于 C_2 及模 $\|\psi_0\|_{H^2(\mathbf{R})}$.

最后,将(3.13),(3.14)两式代入式(3.12),并利用 Gronwall 引理,立刻得到引理的结论.

推论 3.3 设 $k\geqslant 3$ 为整数,对任何常数 $T>0$,有

$$\|\psi\|_{W(k,T)}\leqslant C_4, \tag{3.15}$$

其中常数 C_4 只依赖于 C_3,T,k 及模 $\|\psi_0\|_{H^k(\mathbf{R})}$.

由推论 3.3 中先验估计(3.15)及 Cauchy 问题(1.1),(1.2)光滑解的局部性,定理 1 得证.

4 定理 2 的证明

在第 3 节中,注意到所得到的先验估计式(3.3),(3.9),(3.11)及(3.15)中估计常数 C_i $(i=1,2,3,4)$均与 α 及 $\delta\in[-1,1]$无关,因此,利用标准的紧性原理,令 $\alpha,\delta\to 0$,立刻得到定理 2 中结论(ⅰ)与(ⅱ).另外关于结论(ⅲ),由条件 $\alpha\neq 0,\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\delta}{\alpha}$,以及守恒律(3.1),(3.2)及恒等式(3.4),亦不难发现此时先验估计式(3.3),(3.9),(3.11)及(3.15)中估计常数 $C_i(i=1,2,3,4)$只与比值$\dfrac{\gamma}{\beta}\left(=\dfrac{\delta}{\alpha}\right)$有关.因而,令 $\beta\to 0\left(\text{亦有 }\gamma=\dfrac{\delta\beta}{\alpha}\to 0\right)$,得到(ⅲ)的结论.

定理 2 得证.

5 定理 3 的证明

(ⅰ)的证明:我们只需在空间 $L^2(0,T;H_{\mathrm{loc}}^{k+1}(\mathbf{R}))$中估计 Cauchy 问题(1.1),(1.2)的解,而相应的估计常数只依赖于初值的 $H^k(\mathbf{R})$模($k\geqslant 3$).为此,记函数 $a(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x},x\in\mathbf{R}$.不难验证,该正值函数 $a(x)$为 $\mathbf{R}$ 上严格递增的有界 $C^\infty(\mathbf{R})$函数,并且其任意阶导函数都在 $\mathbf{R}$ 上有界.

类似前面的计算,利用方程(1.1),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}a(x)|\partial_x^k\psi|^2\mathrm{d}x=-2\beta\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}a(x)\partial_x^k\bar{\psi}\partial_x^{k+3}\psi\mathrm{d}x-2\alpha\,\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}a(x)\partial_x^k\bar{\psi}\partial_x^{k+2}\psi\mathrm{d}x+$$
$$2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}a(x)\partial_x^k\bar{\psi}\partial_x^k[-\gamma\partial_x(|\psi|^2\psi)+\mathrm{i}\delta|\psi|^2\psi]\mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

利用分部积分,分别估计式(5.1)中右端项:

(ⅰ) $-2\beta\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}a(x)\partial_x^k\bar{\psi}\partial_x^{k+3}\psi\mathrm{d}x=-3\beta\int_{\mathbf{R}}a'(x)|\partial_x^{k+1}\psi|^2\mathrm{d}x+\beta\int_{\mathbf{R}}a'''(x)|\partial_x^k\psi|^2\mathrm{d}x,$

(ⅱ) $-2\alpha\,\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}} a(x)\partial_x^k\bar{\psi}\partial_x^{k+2}\psi\mathrm{d}x = 2\alpha\,\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}} a'(x)\partial_x^k\bar{\psi}\partial_x^{k+1}\psi\mathrm{d}x$.

考虑到解 ψ 在 $L^\infty(0,T;H^k(\mathbf{R}))$ 中的有界性,利用引理 3.3 中积分不等式,类似式(3.13)与式(3.14)的推导,可估计式(5.1)中右端第 3 项的有界性.最后,综合以上(ⅰ),(ⅱ)两式,由式(5.1)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}} a(x)|\partial_x^k\psi|^2\mathrm{d}x + 2\beta\int_{\mathbf{R}} a'(x)|\partial_x^{k+1}\psi|^2\mathrm{d}x \leqslant C,$$

其中常数 C 只依赖式(3.11)中常数 C_3.

上式关于 t 在$[0,T]$上积分,由解 ψ 在空间 $L^\infty(0,T;H^k(\mathbf{R}))$ 中的有界性及 $a'(x)$ 的严格单调性质知该定理中(ⅰ)成立.

(ⅱ)的证明:设实常数 $r\geqslant\frac{k}{2}$, $k\geqslant 3$. 由方程(1.1)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r}|\psi|^2\mathrm{d}x = -2\alpha\,\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r}\psi\partial_x^2\psi\mathrm{d}x - 2\beta\,\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r}\bar{\psi}\partial_x^3\psi\mathrm{d}x + 2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r}\bar{\psi}[-\gamma\partial_x(|\psi|^2\psi) + \mathrm{i}\delta|\psi|^2\psi]\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

下面分别估计上式中右端 3 项:

1)
$$\begin{aligned}-2\alpha\,\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r}\psi\partial_x^2\psi\mathrm{d}x &= 2\alpha\,\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}\partial_x\psi[|x|^{2r}\partial_x\bar{\psi} + 2r|x|^{2r-1}\mathrm{sgn}(x)\bar{\psi}]\mathrm{d}x\\ &= 4r\alpha\,\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r-1}\mathrm{sgn}(x)\bar{\psi}\partial_x\psi\mathrm{d}x\\ &\leqslant 4r|\alpha|(\||x|^{r-\frac{1}{2}}\psi\|_2^2 + \||x|^{r-\frac{1}{2}}\partial_x\psi\|_2^2),\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}-2\beta\,\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r}\bar{\psi}\partial_x^3\psi\mathrm{d}x &= -2\beta\,\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\partial_x\psi[|x|^{2r}\partial_x^2\bar{\psi} + 4r|x|^{2r-1}\mathrm{sgn}(x)\partial_x\bar{\psi} +\\ &\quad 2r(2r-1)|x|^{2r-2}\bar{\psi}]\mathrm{d}x\\ &= -6r\beta\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r-1}\mathrm{sgn}(x)|\partial_x\psi|^2\mathrm{d}x + 4\beta r(r-1)(2r-1)\cdot\\ &\quad\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r-3}\mathrm{sgn}(x)|\psi|^2\mathrm{d}x\\ &\leqslant 6r|\beta|\||x|^{r-\frac{1}{2}}\partial_x\psi\|_2^2 + 4|\beta|r(r-1)(2r-1)\||x|^{r-\frac{3}{2}}\psi\|_2^2,\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}&2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}|x|^{r}\bar{\psi}[-\gamma\partial_x(|\psi|^2\psi) + \mathrm{i}\delta|\psi|^2\psi]\mathrm{d}x\\ &= 3\gamma r\int_{\mathbf{R}}|x|^{2r-1}\mathrm{sgn}(x)|\psi|^4\mathrm{d}x\\ &\leqslant 3|\gamma|r\|\psi\|_\infty^2\||x|^{r-\frac{1}{2}}\psi\|_2^2.\end{aligned}$$

故由式(5.2),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\||x|^{2r}\psi\|_2^2 \leqslant C[\||x|^{r-\frac{3}{2}}\psi\|_2^2 + \||x|^{r-\frac{1}{2}}\psi\|_2^2 + \||x|^{r-\frac{1}{2}}\partial_x\psi\|_2^2]. \tag{5.3}$$

由定理的条件，利用定理1的结论，知式(1.1)，(1.2)的解

$$\psi(t,x)\in L_\infty(0,T;H^k(\mathbf{R})).$$

于是利用 Young 不等式(因为 $r\geqslant\frac{k}{2}\geqslant\frac{3}{2}$)有

$$\||x|^{r-\frac{3}{2}}\psi\|_2^2+\||x|^{r-\frac{1}{2}}\psi\|_2^2\leqslant C(1+\||x|^r\psi\|_2^2). \tag{5.4}$$

为了估计式(5.3)中最后一项，我们利用如下带权的 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式[9].

$$\||x|^{r-\frac{1}{2}}\partial_x\psi\|_2\leqslant C\|\partial_x^k\psi\|_2^{\alpha_0}\||x|^r\psi\|_2^{1-\alpha_0}, \tag{5.5}$$

其中 $\alpha_0=\frac{3}{2(k+r)}$.

最后，将式(5.4)，(5.5)代回不等式(5.3)中，并利用 Gronwall 引理，得

$$\||x|^r\psi\|_2\leqslant C,\ t\in[0,T], \tag{5.6}$$

其中常数 C 只依赖于 r,T 及模 $\|\psi_0\|_{H^k(\mathbf{R})}$，$\||x|^r\psi_0\|_2$.

完全同估计式(5.6)的证明，如果 $|x|^r\partial_x^j\psi_0\in L^2(\mathbf{R})$，$0\leqslant j\leqslant k-3$，$r\geqslant\frac{k-j}{2}$，则有

$$\||x|^r\partial_x^j\psi(t,\cdot)\|_2\leqslant C,\ t\in[0,T]. \tag{5.7}$$

最后，利用如下带权的 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式

$$\||x|^s\psi\|_\infty\leqslant C\|\partial_x^k\psi\|_2^{a'}\||x|^r\psi\|_2^{1-a'},$$

其中 $s=\left(1-\frac{1}{2k}\right)r$，$a'=\frac{1}{2k}$，以及先验估计式(5.7)，通过简单推导，不难发现结论(ⅱ)成立.

参 考 文 献

1 Hirota, R., J. Math. Phys., 1973, 14: 805～809

2 Spatschek, K. H., Shukla, P. K. & Yu, M. Y., Nuclear Fusion, 1978, 18: 290～293

3 Rogister, A., Phys. Fluids, 1971, 14: 2733～2739

4 Brambilla, M., Nucl. Fusion, 1974, 14: 327～331

5 Moralles, G. J., Lee, Y. C., Phys. Rev. Lett., 1975, 35: 930～933

6 Gebelman, W., Stenzel, R. L., ibid., 1975, 35: 1708～1710

7 Kato, J., Stud. Appl. Math., 1983, 8: 93～128

8 Zhou Yulin & Guo Boling, Scientia Sinica, A, 1986, 29: 375～390

9 Lin, C. S., Comm. Partial Diff. Equa., 1986, 11: 1515～1538