志鸿优化系列丛书

丛书主编　任志鸿

高中同步测控

QUANYOUSHEJI · QUANYOUSHEJI · QUANYOUSHEJI · QUANYOUSHEJI

全优设计

QUANYOUSHEJI · QUANYOUSHEJI · QUANYOUSHEJI · QUANYOUSHEJI · QUANYO

- 问题探究
- 导学诱思
- 重难突破
- 同步练习

数学

高一下册

南方出版社

编读飞鸿

亲爱的读者朋友：

风雨十年，磨砺出“志鸿优化”系列精品图书，当您拿起本书时，我们的手就握在了一起，我们的心也就连在了一起。志鸿图书已与广大读者建立了足够的心理默契和情感依恋，但愿这种默契和依恋能够源远流长！

在使用本书的过程中，相信您一定会有许多收获和心得，也可能激发您一些灵感或想法，我们愿与您分享，比如：

在学习中发现了特别的思路和方法；

发现本书中的疏漏或问题；

对书中的内容有一些疑问；

遇到了喜欢的特色栏目和内容；

有关本书的更好的编写建议和方法；

……

欢迎您与我们联系，我们将虚心听取您的批评和建议，竭诚为您排忧解难，详细、耐心地解答您的问题，本书各学科指导教师时刻期待着与您沟通！

同时我们也希望您留下联系方法，以便及时与您联系交流。

科目	姓名	电话	电子邮箱
语文	高维章	13475514065	gaoweizhang@zhnet.com.cn
数学	全维臻		quanweizhen@zhnet.com.cn
英语	李雯绮		liwenqi@zhnet.com.cn
历史	宋爽		songshuang@zhnet.com.cn
政治	曹锦鹏		caojinpeng@zhnet.com.cn
地理	陈捍岳		chenhanyue@zhnet.com.cn
生物	许梦达		xumengda@zhnet.com.cn
物理	陈永明	13466697688	chenyongming@zhnet.com.cn
化学	秦天石		qintianshi@zhnet.com.cn

通讯地址：山东淄博高新区万杰路中段世纪天鸿书业有限公司　读者服务部　255086

我们愿与全国广大师生携手共勉、切磋探讨，在相互交流和沟通中建立友谊，共同打造“志鸿优化”系列精品图书。

志鸿优化，关注每个角落，每个人的教育！

竭诚希望您的学习将因为有她而变得更加精彩！

邮购热线

“全优设计”系列图书是志鸿优化隆重推出的最新研究成果，以其对教考信息的敏锐反映、科学实用的备考模式以及秉承不断创新的精品意识，在纷繁多杂的各类教辅用书中脱颖而出，独树一帜。

本书由山东世纪天鸿书业有限公司发行，为满足偏远地区读者的购书要求，我们特开通邮购图书服务热线，以期更方便、快捷地满足读者需求。

邮购书目简介

高中同步测控全优设计系列图书

丛书特点：

名师主笔　同步教学

双栏互动　形式新颖

全面优化　主次分明

例题经典　科学实效

主体栏目：

问题探索　导学诱思

重难突破　同步练习

高中同步测控全优设计

科目	装订开本	适用对象	定价（元）
语文	大16开精装	高一学生	14.50
数学	大16开精装	高一学生	15.00
英语	大16开精装	高一学生	17.50
物理	大16开精装	高一学生	14.50
化学	大16开精装	高一学生	15.00
历史	大16开精装	高一学生	16.50
政治	大16开精装	高一学生	15.00
地理	大16开精装	高一学生	15.50

本系列图书在全国各地均有销售，您也可以联系我们邮购。

咨询电话： 0533-3590033　0533-3590020

邮购地址： 山东淄博高新区万杰路中段世纪天鸿书业有限公司　邮购部　255086

邮购说明： 3本起订，3~10本加收书款10%的邮资，10本以上免收邮资。

汇款单上请务必写清详细地址、邮编和联系电话，以使图书迅捷、准确地送达，我们将在收到汇款的3个工作日内挂号寄出。

前言 Foreword

全程设计　全面优化

《高中同步测控全优设计》系列丛书是志鸿优化隆重推出的最新研究成果。该丛书根据新的课堂教学模式，采用了双栏互动的形式，以学生为主体，着力培养学生的学习兴趣，挖掘学习潜能。在学习过程中充分体现既"授人一鱼"，又"授人以渔"的教育理念，使学生在掌握基础知识的同时，基本技能也相应得到提高，而基本技能的提高又促进了对基础知识的掌握，使繁重的学习环节演变为一个螺旋上升的良性循环过程。该丛书具有以下特点：

全 内容全：知识覆盖全面，对考纲考点及相关热点问题讲解细致；过程全：结合中学教学的实际，对整个学习环节进行全程设计，科学组织内容，精心设计每个细微之处。

优 过程优：学无定法，但本丛书却能对繁杂的学习过程进行全面优化，科学把握，主次分明，组成一个科学、实用的学习过程；编者优：从全国各地名校中聘请一线教学骨干教师亲自执笔。

新 理念新：吸收最新教研成果，以人为本，帮助学生全面发展；内容新：以最新教改精神为依据、以最新教材为蓝本，及时吸收新材料、新背景，全面提高内容的新颖性；形式新：在呈现方式上，一改老面孔，以双栏互动、彩版设计的全新形式展现在广大读者面前，一对一地展示知识与学法，直接高效地指导教学与备考。

丛书主要栏目：各学科根据自己的特点略有不同。

问题探索 有针对性地创设适量问题，引导学生自主学习、自我探索。使学生在整体上把握教材知识的同时，培养学习的自觉性、主动性。

名师诠释 由知名教师对左栏问题进行专门解答，帮助学生更好地掌握所学知识。

导学诱思 系统梳理知识框架，将知识要点或重要规律以问题、填空的形式出现，由学生在预习的基础上归纳完成，以便更好地掌握所学知识。

精巧点拨 该部分由老师进行精心解答和点拨，使学生对所学知识更加清晰、明了。

重难突破 对学习中的重点和难点进行精讲专练，帮助学生正确理解课文的基本理论，夯实基础知识，搬开学习中的障碍，轻松过关。

解读示例 选取典型、新颖的例题，从设计意图、思路分析、解题规律、知识迁移等方面，采用“解剖麻雀”的方式，对相关例题进行全解全析，起到巩固知识、夯实基础的作用。

同步练习 针对本节的内容，结合学习实际，进行专项训练，使学生在巩固基础知识的前提下，能力和技巧得到进一步提升，做到学以致用，知能过关。

考查明释 由一线骨干教师对相关习题进行指导性点拨，使学生在实战中得到提升，轻松过关。

由于时间、水平所限，书中难免存在一些疏漏和不足之处，恳请广大读者批评指正。

编 者

2006 年 1 月

目录

Contents

第四章　三角函数

第五章　平面向量

第四章　三角函数

4.1　角的概念的推广

第一课时

问题探索　　**名师解读**

1. 角的概念推广后，怎样理解“0°到90°的角”“锐角”“第一象限的角”“小于90°的角”等概念？“0°到360°的角”和“周角”有何区别？

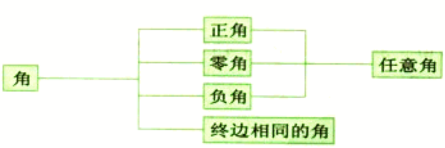
答案：“0°到90°的角”的集合为$\{\theta|0°\leqslant\theta\leqslant90°\}$，“锐角”的集合为$\{\theta|0°<\theta<90°\}$；“第一象限的角”的集合为$\{\theta|k\cdot360°<\theta<90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，“小于90°的角”的集合为$\{\theta|\theta<90°\}$．“0°到360°的角”是$[0°,360°]$内的角，而周角指360°这一个角．

2. 终边相同的角有________个，相等的角的终边一定________，但终边相同的角不一定________．

解析：与α终边相同的角$\beta=k\cdot360°+\alpha,k\in\mathbf{Z}$．当$k$取不同的整数时，$\beta$得到不同的值．

答案：无数　相同　相等

导学诱思　　**问题解答**



1. 角可以看成由一条射线绕其端点旋转而形成的，规定按逆时针方向旋转形成的角叫________；按顺时针方向旋转形成的角叫________；如果一条射线没有作任何旋转，称它形成的角叫________．

2. 在直角坐标系中讨论角时，使角的顶点与________________，角的始边与________________，这时角的终边（端点除外）在第几象限，就说这个角是____________；如果角的终边在坐标轴上，则认为此角________________．

1. 正角　负角　零角

2. 坐标原点重合　x轴非负半轴重合　第几象限角　不在任何象限

重难突破

本节的重点是任意角的概念和象限角的概念；难点是把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来.

1. 正确理解角的概念

首先，要紧紧抓住"旋转"二字，用运动的观点来看待角的概念，一是要明确旋转的方向，二是要明确旋转的大小，三是要明确射线未作任何旋转时的位置，从而得到正角、负角、零角的定义；其次，不能忽略实际问题的意义，可通过钟表时(或分)针的逆时、顺时的转动以及体操中的转体等实例来理解角的大小、正负的含义.

2. 象限角

(1)如果角的顶点不与坐标原点重合，或者角的始边不与 x 轴非负半轴重合，则不能判断角在哪一个象限，也就是它不能称作象限角.

(2)引入直角坐标系来研究角，体现了数形结合的思想，为后面研究任意角的三角函数埋下了伏笔，同时渗透了基本的数学方法(通法)——坐标法.

3. 终边相同的角

对于终边相同的角，应会分别用文字语言和符号语言加以描述.

注意：(1)α 为任意角.

(2)$k\cdot360°$ 与 α 之间是"+"，$k\cdot360°-\alpha$ 可理解为 $k\cdot360°+(-\alpha)$.

(3)相等的角，终边一定相同；终边相同的角不一定相等. 终边相同的角有无数个，它们相差 $360°$ 的整数倍.

(4)$k\in\mathbf{Z}$ 这一条件不可少.

通过与 α 角终边相同的角的集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$ 能将不在 $[0°,360°)$ 内的任意角 β 转化为用 $[0°,360°)$ 内的角表示的形式，即可以判定 $\beta=\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$ 为第几象限角，为以后证明恒等式、化简及利用诱导公式求三角函数值打下基础.

解读示例

【例1】给出下列3个命题：

①第一象限的角一定是锐角；②凡能表示成 $k\cdot360°+90°$ 形式的角一定是直角，其中 $k\in\mathbf{Z}$；③终边落在直线 $y=-x$ 上的角都可以表示成 $n\cdot180°-45°$ 的形式，其中 $n\in\mathbf{Z}$.

其中正确命题的个数是 ……………………………………………（　　）

A. 0　　　　B. 1

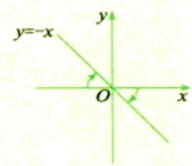
C. 2　　　　D. 3

解析：①不正确. 如 $361°$ 的角是第一象限的角，但它不是锐角.

②不正确. 如 $1\cdot360°+90°=450°$ 的角具有 $k\cdot360°+90°$ 的形式，此时 $k=1\in\mathbf{Z}$，但它不是直角.

③正确. 对于 $n\cdot180°-45°,n\in\mathbf{Z}$，

如图所示，当角的终边落在射线 $y=-x(x\geqslant0)$ 上时，它可以表示成 $k\cdot360°-45°$ 的形式；



当角的终边落在射线 $y=-x(x\leqslant0)$ 上时，它可以表示成 $(k\cdot360°+180°)-45°$ 的形式.

两种形式也即 $2k\cdot180°-45°$，$(2k+1)\cdot180°-45°$ 的形式，可一并写成 $n\cdot180°-45°$ 的形式，$n\in\mathbf{Z}$.

答案：B

点评：否定结论，举出一个反例即可. 如本例的第①②两命题的判定.

【例2】在角的集合 $\{\alpha|\alpha=k\cdot90°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$ 中，

(1)有几种终边不相同的角？

(2)有几个属于区间 $(-360°,360°)$ 内的角？

(3)写出其中是第三象限的角的一般表示法.

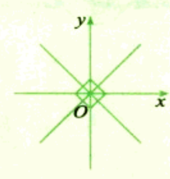
分析：本题主要考查对 $\alpha=k\cdot90°+45°(k\in\mathbf{Z})$ 所表示的角的认识，从代数角度看，取 $k=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ 可以得 α 为 $\cdots,-135°,-45°,45°,135°,225°,\cdots$，

从图形角度看 $\alpha=k\cdot90°+45°(k\in\mathbf{Z})$，

即以角 $45°$ 为基础，依次加上 $90°$ 的整数倍，

即依次按顺时针或逆时针方向旋转 $90°$，

所得各角如图所示.



解：(1)在给定的角的集合中终边不相同的角共有四种.

(2)由 $-360°<k\cdot90°+45°<360°$，

得 $-\frac{9}{2}<k<\frac{7}{2}$.

又 $k\in\mathbf{Z}$，

故 $k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$.

∴在给定的角集合中属于区间 $(-360°,360°)$ 的角共有 8 个.

(3)其中是第三象限的角可表示成 $k\cdot360°+225°,k\in\mathbf{Z}$.

点评：(1)把代数计算与对图形的认识结合起来，会使这类问题处理起来更容易些.

(2)在 $0°$ 到 $360°$ 角范围内找与任意一个角终边相同的角时，可根据实数的带余除法进行. 因为任意一个角 α 均可写成 $k\cdot360°+\alpha_1$，$(0°\leqslant\alpha_1<360°)$ 的形式.

同步练习

考查明释

1. 下面四个命题中，正确的是…………………………………………（　　）
A. 第一象限的角一定不是负角
B. 锐角是第一象限的角
C. 终边相同的角相等
D. 第二象限的角大于第一象限的角

← 考查任意角的概念.

2. 给出下列四个命题：① $-75°$ 是第四象限角；② $225°$ 是第三象限角；③ $475°$ 是第二象限角；④ $-315°$ 是第一象限角. 其中正确的命题有 ……………（　　）
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

← 考查象限角的概念.

3. 若角 α 与 β 的终边相同，则角 $\alpha-\beta$ 的终边 ………………………（　　）
A. 在 x 轴的非负半轴上　　B. 在 x 轴的非正半轴上
C. 在 y 轴的非负半轴上　　D. 在 y 轴的非正半轴上

← 考查终边相同的角的概念.

4. 终边在 y 轴的非正半轴上的角介于 $-360°\sim720°$ 之间的是 …………（　　）
A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$
B. $-90°,-270°,270°$
C. $-90°,270°,630°$
D. $-90°,-270°,540°$

← 考查终边相同的角的概念.

5. 与角 $1560°$ 终边相同的角的集合中，最小正角是________，最大负角是________.

← 考查角的概念及终边相同的角的概念.

6. 已知 $-990°<\alpha<-630°$，且 α 与 $120°$ 角的终边相同，则 $\alpha=$________.

← 考查终边相同的角的概念.

7. 已知与 $-1820°$ 终边相同的角的集合为 A，集合 $B=[-720°,360°]$，求 $A\cap B$.

← 考查集合的运算及终边相同的角的概念.

8. (1)写出终边落在 $y=x(x\geqslant0)$ 图象上的角 α 的集合 S；
(2)写出终边落在 $y=x(x\leqslant0)$ 图象上的角 α 的集合 M.

← 考查终边相同角的概念.

第二课时

问题探索　　名师解读

1. 任意角 α 的终边与 $-\alpha$ 终边、$180^\circ-\alpha$ 终边有什么关系？

答案：角 α 终边与 $-\alpha$ 终边关于 x 轴对称，角 α 终边与 $180^\circ-\alpha$ 终边关于 y 轴对称．

2. 在①$160^\circ$，②$480^\circ$，③-960°，④-1600° 这四个角中，属于第二象限的角是（　　）

A. ①

B. ①②

C. ①②③

D. ①②③④

解析：$480^\circ=360^\circ+120^\circ$，

$-960^\circ=-3\times360^\circ+120^\circ$，

$-1600^\circ=-5\times360^\circ+200^\circ$，

∴①②③是第二象限角，④是第三象限角．

答案：C

导学诱思　　问题解答

角的表示
- 坐标轴上的角
- 象限角
- 终边相同的角

1. 终边在 y 轴非正半轴上角的集合是____________；终边在 y 轴上角的集合是____________．

2. 象限角的集合

第二象限角的集合为____________；

第三象限角的集合为____________．

1. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ-90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

$\{\alpha|\alpha=k\cdot180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

2. $\{\alpha|k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

$\{\alpha|k\cdot360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

重难突破　　解读示例

1. 判断角终边所在位置

在直角坐标系中画出所给角，也可将所给角化为 $\alpha+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z},0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ)$ 的形式加以判断，初步体现了数形结合的思想．

2. 角 $\alpha+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}$，$\alpha+k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}$ 都可化为 $\alpha+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$ 的形式，进而可确定角终边所在的位置．

对于 $\alpha+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}$，转化的方法是分别设 $k=2m,2m+1,m\in\mathbf{Z}$，代入原式中即可．

对于 $\alpha+k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}$，转化的方法是分别设 $k=4m$，

$k=4m+1$，

$k=4m+2$，

$k=4m+3,m\in\mathbf{Z}$，代入计算．

同理，对于 $\alpha+k\cdot120^\circ,k\in\mathbf{Z}$，则分别设 $k=3m,3m+1,3m+2,m\in\mathbf{Z}$，代入即可．

【例1】终边在坐标轴上的角的集合是……（　　）

A. $\{\varphi|\varphi=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\varphi|\varphi=k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\varphi|\varphi=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\varphi|\varphi=k\cdot180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

解析：对于 $k、m\in\mathbf{Z}$，有 $k=4m,k=4m+1,k=4m+2,k=4m+3$．（分类讨论）

以下代入答案 C 进行检验：

(1)若 $k=4m$，则 $\varphi=4m\cdot90^\circ=m\cdot360^\circ$；

(2)若 $k=4m+1$，则 $\varphi=(4m+1)\cdot90^\circ=m\cdot360^\circ+90^\circ$；

(3)若 $k=4m+2$，则 $\varphi=(4m+2)\cdot90^\circ=m\cdot360^\circ+180^\circ$；

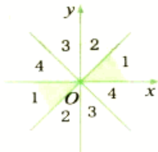
(4)若 $k=4m+3$，则 $\varphi=(4m+3)\cdot90^\circ=m\cdot360^\circ+270^\circ$．

3. 已知角 α 所在象限，求 2α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 所在象限问题

利用已知条件写出 α 的范围，由此确定 2α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 的范围，再根据范围确定象限. 如例 3.

对于 $\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 的判定还有另外一种方法——八卦图法.

例如，$\frac{\alpha}{2}$ 所在象限的判断方法：



第一步：画出直角坐标系. 如右图，将每一象限两等分.

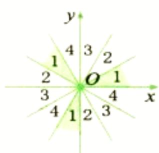
第二步：标号. 从靠近 x 轴正半轴的第一象限内区域开始，按逆时针方向，在图中依次标上 1、2、3、4、1、2、3、4.

第三步：选号. 因为 α 为第一象限角，在图中将数字 1 的范围画出. 可用阴影表示.

第四步：定象限. 阴影部分在哪一象限，$\frac{\alpha}{2}$ 的终边就落在哪一象限.

由以上步骤可知，若 α 为第一象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、三象限角.

(2)同理如图 $\frac{\alpha}{3}$ 所在象限判断方法：



第一步：画出直角坐标系. 如右图，将每一象限三等分.

第二步：标号. 从靠近 x 轴正半轴的第一象限内区域开始，按逆时针方向，在图中依次标上 1、2、3、4、1、2、3、4、1、2、3、4.

第三步：选号. 因为 α 为第一象限角，在图中将数字 1 所在的区域用阴影画出.

第四步：定象限. 阴影部分在哪一象限，则 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边就落在哪一象限.

由以上步骤可知，即当 α 为第一象限角时，$\frac{\alpha}{3}$ 为第一、二、三象限角.

注意：由角 α 确定角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在象限我们还有一种简便方法，即作角 α 的角平分线，角平分线所在象限即 $\frac{\alpha}{2}$ 角的终边所在象限，因而易知 α 角所在象限确定，则 $\frac{\alpha}{2}$ 可能落在两个象限内.

4. 终边对称的角的表达式

(1)若 α 角与 β 角的终边关于原点对称，

那么 $\alpha=k\cdot 360°+180°+\beta=(2k+1)\cdot 180°+\beta, k\in \mathbf{Z}$.

(2)若 α 角与 β 角的终边关于直线 $y=x$ 对称，

那么 $\alpha=k_1\cdot 360°+45°+\theta, k_1\in \mathbf{Z}$.

综上，终边在坐标轴上的角的集合是 $\{\varphi|\varphi=k\cdot 90°, k\in \mathbf{Z}\}$.

答案：C

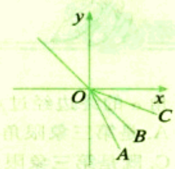
点评：(1)本例的解答过程运用了分类讨论的数学思想方法；

(2)终边在坐标轴上的角的写法与求三角函数的定义域和已知三角函数值求角有关，要做到熟练地掌握.

【例2】(1)若角 α、β 的终边关于直线 $x+y=0$ 对称，且 $\alpha=-60°$，则 β 的值是________.

(2)设角 α 的终边与 $252°$ 的角的终边关于 y 轴对称，且 α 在 $-360°\sim 360°$ 之间，则角 α 的值是________.

解析：(1)如右图，设 OA 是角 α 的终边，OC 是角 β 的终边.



∵ OA、OC 关于直线 $x+y=0$ 对称，且 $\alpha=-60°$，

∴ $\beta=k\cdot 360°-30°$，$k\in \mathbf{Z}$.

(2) ∵ 角 α 的终边与 $252°$ 的角的终边关于 y 轴对称，

∴ 在 $0°\sim 360°$ 之间的 $\alpha=288°$.

∴ 与 $288°$ 的角终边相同的角可写成 $\beta=k\cdot 360°+288°, k\in \mathbf{Z}$.

∴ 在 $-360°\sim 360°$ 之间，角 α 的值是 $-72°$ 和 $288°$.

答案：(1) $k\cdot 360°-30°, k\in \mathbf{Z}$ (2) $-72°$ 和 $288°$

点评：本题主要考查了终边相同角的应用，解决这类对称问题时，要注意借助图形，直观处理.

【例3】若 α 是第二象限的角，试判断 2α，$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$ 角各是第几象限的角.

解：∵ α 是第二象限的角，

∴ $k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°(k\in \mathbf{Z})$.

(1) ∵ $2k\cdot 360°+180°<2\alpha<2k\cdot 360°+360°$，故 2α 是第三或第四象限的角，或角的终边在 y 轴的非正半轴上.

(2) ∵ $k\cdot 180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+90°$ $(k\in \mathbf{Z})$，当 $k=2n(n\in \mathbf{Z})$ 时，$n\cdot 360°+45°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360°+90°$；当 $k=2n+1(n\in \mathbf{Z})$ 时，$n\cdot 360°+225°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360°+270°$，

∴ $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限的角.

(3) ∵ $k\cdot 120°+30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot 120°+60°$，

当 $k=3n(n\in \mathbf{Z})$ 时，$n\cdot 360°+30°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot 360°+60°$；

$\beta=k_2\cdot360°+45°-\theta,k_2\in\mathbf{Z}$.

则 $\alpha+\beta=(k_1+k_2)\cdot360°+90°=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}$.

(3)若角 α、β 的终边关于 y 轴对称，

那么，$\alpha=k_1\cdot360°+90°+\theta,k_1\in\mathbf{Z}$，

$\beta=k_2\cdot360°+90°-\theta,k_2\in\mathbf{Z}$.

则有 $\alpha+\beta=(k_1+k_2)\cdot360°+180°=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}$.

(4)若角 α、β 的终边关于 x 轴对称，那么

$\alpha=k_1\cdot360°+\theta,k_1\in\mathbf{Z}$，

$\beta=k_2\cdot360°-\theta,k_2\in\mathbf{Z}$.

则有 $\alpha+\beta=(k_1+k_2)\cdot360°=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时，$n\cdot360°+150°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+180°$；

当 $k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$ 时，$n\cdot360°+270°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+300°$.

$\therefore\frac{\alpha}{3}$是第一或第二或第四象限的角.

点评：已知 α 在第几象限，要确定 $\frac{\alpha}{n}(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$ 所在的象限，常用的方法是分类讨论，并且按被 n 除所得的余数 $0,1,2,\cdots,n-1$ 分为 n 类.

同步练习

考查明释

1. 角 α 的终边经过点 $M(0,-3)$，则 α ……………………（　　）

A. 是第三象限角　　B. 是第四象限角

C. 既是第三象限角又是第四象限角　　D. 不是任何象限的角

← 考查象限角、象限界角.

2. 角 α 是第三象限角，则$\frac{\alpha}{2}$所在象限是……………………（　　）

A. 第二象限　　B. 第四象限

C. 第一、二象限　　D. 第二、四象限

← 考查$\frac{\alpha}{2}$角的判断.

3. 集合 $M=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$ 中，各角终边都在 ……………………（　　）

A. x 轴非负半轴上　　B. y 轴非负半轴上

C. x 轴或 y 轴的非正半轴上　　D. x 轴或 y 轴上

← 考查终边相同的角.

4. 若 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$，则下列关系中正确的是 ……………………（　　）

A. $A=B=C$　　B. $A=B\subsetneqq C$

C. $A\subseteqq B=C$　　D. $A\subsetneqq B\subsetneqq C$

← 考查集合与终边相同的角.

5. 若 $-180°<\alpha<-90°$，则 $180°-\alpha$ 与 α 的终边 ……………………（　　）

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 以上都不对

← 考查角的对称关系.

6. 已知角 α 和角 β 的终边互为反向延长线，问 α 和 β 之间满足怎样的关系？其结果是________.

← 考查终边相同的角的关系.

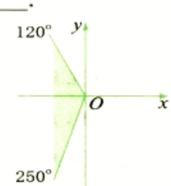
7. 若 $90°<\beta<\alpha<135°$，则 $\alpha-\beta$ 的范围是________，$\alpha+\beta$ 的范围是________.

← 考查角的运算关系.

8. 若将时钟拨慢 5 分钟，则分针转了________，时针转了________.

← 考查应用问题.

9. 如图所示，写出终边落在图中阴影部分(包括边界)的角的集合，并指出 $-950°12'$ 是否是该集合中的角.



← 考查终边相同的角的应用.

10. (1)已知角 α 终边与 $-50°$ 角终边关于 y 轴对称，求角 α 的集合 M；

(2)已知角 α 终边与 $-50°$ 角终边互相垂直，求角 α 的集合 N.

← 考查终边相同的角、垂直、对称.

4.2　弧度制

第一课时

问题探索

观察两个半径大小相同的圆，并各取长度等于半径长的弧以及长度等于各圆半径 2 倍长的弧，观察这些弧所对的圆心角大小，并依据观察的图形关系的结果回答问题：

(1)为什么规定“等于圆半径长的弧所对的圆心角为 1 弧度”？

(2)为什么可用弧长与圆的半径的比值来度量弧所对圆心角的弧度数？

(3)圆心角的弧度数与圆半径的大小有没有关系？

名师解读

答案：(1)通过观察发现，两个圆中，长度等于半径长的弧所对的圆心角大小相等，所以规定长度等于半径长的弧所对的圆心角为 1 弧度的角.

(2)长度等于各自圆的半径的 2 倍长的弧所对的圆心角也相等，并且大小都等于 2 弧度. 依次类推，以长为 $2\pi r$(圆周长)的弧所对的圆心角为 2π 弧度(周角)，即弧长与该圆的半径之比与圆心角大小成正比，所以可用弧长与圆的半径之比来度量弧所对圆心角的弧度数.

(3)没有关系. 只与弧长与半径的比值有关系.

导学诱思

角的度量 → 1度的角 → 角度制 → 应用

角的度量 → 1弧度的角 → 弧度制 → 应用

角度与弧度的换算

1. 角度制是用________的大小来度量角的大小的；我们规定周角的________为 1 度的角. 弧度制是用________的长度来度量角的大小的；把弧长等于半径的弧所对的圆心角叫做________的角.

2. 1 rad＝(________)°≈________；1°＝________ rad.

问题解答

1. 角　$\frac{1}{360}$　弧　1 弧度

2. $\frac{180}{\pi}$　57.30°　$\frac{\pi}{180}$

重难突破

本节的重点是理解弧度的意义，能正确地进行弧度与角度的换算．难点是弧度的概念及其与角度的关系．其中，准确理解1弧度的角的含义是建立弧度概念的关键．

1．角度制与弧度制中的单位不能混用

如$\frac{\pi}{6}+k\cdot 360^\circ$或$60^\circ+2k\pi$的写法是不允许的，尤其是当角用字母表示时更要注意，如角α是在弧度制下，就不能写成$k\cdot 360^\circ+\alpha$等．

2．用“度”作为单位度量角时，“度”(即“°”)不能省略

用“弧度”作为单位度量角时，“弧度”两字可以省略．如sin3是指sin(3 rad)，这时的弧度数3在形式上是一个不名数，应理解为名数．常常把弧度数写成多少π的形式，如无特别要求，不必把π写成小数的形式．

3．用角度制表示角时，总是十进制、六十进制混用

度与度之间、分与分之间、秒与秒之间是十进制的，例如10个6度是60度等，而度、分、秒之间的关系是六十进制的，计算起来不方便，因此学习弧度制具有一定的优越性．

【例】集合$A=\{x\mid k\pi+\frac{\alpha}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\alpha}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，集合$B=\{x\mid 6+x-x^2\geqslant 0\}$，求$A\cap B$．

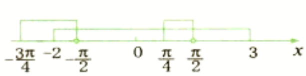
解：因为$6+x-x^2\geqslant 0$，即$x^2-x-6\leqslant 0$，
可得$-2\leqslant x\leqslant 3$．

对$k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2}$，

取$k=0$，有$\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$，

取$k=-1$，有$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$，

当k取其他值时，$[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2})$与$[-2,3]$没有公共元素．



故由图可得$A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\}$．

点评：引入弧度制后，就使得“弧度角”与“实数”之间建立了一一对应关系，这使得弧度角具有了实数的属性．

解读示例

【例1】把下列各角用另一种度量制表示出来：

$112^\circ 30'$；36°；$-\frac{5\pi}{12}$；3.5．

解：$112^\circ 30'=\frac{225}{2}\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{8}$；

$36^\circ=36\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{5}$；

$-\frac{5\pi}{12}=-\frac{5\pi}{12}\times(\frac{180}{\pi})^\circ=-75^\circ$；

$3.5=3.5\times(\frac{180}{\pi})^\circ\approx 200.55^\circ=200^\circ 33'$．

点评：对于常用的特殊角角度与弧度之间的换算，熟记下表是很有用的．

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
度	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
弧度	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

记忆方法是把360°分4份、分8份、分12份、分24份等，如分12份时，一份$30^\circ=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$；60°是30°的两倍，则$60^\circ=\frac{\pi}{6}\times 2=\frac{\pi}{3}$等．

【例2】已知角α的终边与$\frac{\pi}{3}$的终边相同，求角$\frac{\alpha}{3}$在$[0,2\pi)$内的值．

解：$\because\alpha$角的终边与$\frac{\pi}{3}$的终边相同，$\therefore\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$．$\therefore\frac{\alpha}{3}=\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{9}(k\in\mathbf{Z})$．又$\because 0\leqslant\frac{\alpha}{3}<2\pi$，$\therefore 0\leqslant\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{9}<2\pi(k\in\mathbf{Z})$．当$k=0$时，$\frac{\alpha}{3}=\frac{\pi}{9}$，在$[0,2\pi)$内；当$k=1$时，$\frac{\alpha}{3}=\frac{7\pi}{9}$，在$[0,2\pi)$内；当$k=2$时，$\frac{\alpha}{3}=\frac{13\pi}{9}$，在$[0,2\pi)$内．

$\therefore$在$[0,2\pi)$内，角$\frac{\alpha}{3}$的值有三个，即$\frac{\pi}{9},\frac{7\pi}{9},\frac{13\pi}{9}$．

点评：通过赋值解决数学问题，属于逻辑方法范畴．不仅在三角函数的研究讨论中可以赋值，还有许多数学问题可以通过赋值得到解决．赋值有它的原则性，也有它的灵活性．原则性——k在其本身的取值范围内取值，本例中$k\in\mathbf{Z}$；灵活性——给k赋值是需要试验的，这样的试验不能离题目提供的范围太远，如本例中若取$k=2004,2005,\cdots$，显然是不妥的．

同步练习　　考查明释

1. 下列诸命题中，假命题是……………………………………………………（　　）
   A. "度"与"弧度"是度量角的两种不同的度量单位
   B. 一度的角是周角的$\frac{1}{360}$，一弧度的角是周角的$\frac{1}{2\pi}$
   C. 根据弧度的定义，180°一定等于π弧度
   D. 不论是用角度制还是用弧度制度量角，都与圆的半径长短有关

考查弧度的概念.

2. 在半径不相等的圆中，1 rad的圆心角所对的 ……………………………（　　）
   A. 弦长相等　　B. 弧长相等
   C. 弦长等于所在圆半径　　D. 弧长等于所在圆半径

考查弧度的概念.

3. 下列各对角中终边相同的角是 ……………………………………………（　　）
   A. $\frac{\pi}{2}$和$-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　　B. $-\frac{\pi}{3}$和$\frac{22\pi}{3}$
   C. $-\frac{7\pi}{9}$和$\frac{11\pi}{9}$　　D. $\frac{20\pi}{3}$和$\frac{122\pi}{9}$

考查终边相同的角.

4. 若α是第四象限角，则$\pi-\alpha$一定在 ………………………………………（　　）
   A. 第一象限　　B. 第二象限
   C. 第三象限　　D. 第四象限

考查象限角的判定.

5. 已知$\alpha=2$，$\beta=90°$，$\gamma=-270°$，则三个角的大小关系是 ……………（　　）
   A. $\alpha<\beta=\gamma$　　B. $\alpha>\beta=\gamma$
   C. $\alpha>\beta>\gamma$　　D. 以上答案都不对

考查用弧度比较角的大小.

6. 设集合$M=\{x\mid x=(2n+1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=(4k\pm1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，则$M$与$N$的关系是 ……………………………………………………………………（　　）
   A. $M\subsetneqq N$　　B. $M\supsetneqq N$
   C. $M=N$　　D. $M\subseteq N$或$M\supseteq N$

考查弧度与集合的综合应用.

7. 和$\frac{3\pi}{4}$终边相同的角的集合中，最大的负角是__________.

考查终边相同的角.

8. 已知$\alpha=1690°$.
   (1)把α写成$2k\pi+\beta$(其中$k\in\mathbf{Z}$，$\beta\in[0,2\pi)$)的形式为__________；
   (2)求θ，使θ与α的终边相同，且$\theta\in(-4\pi,-2\pi)$，则$\theta=$__________.

考查终边相同的角.

9. 已知两个角的和是1 rad，它们的差为1°，求这两个角约等于多少分？

考查弧度与角度的换算及方程的思想.

10. 已知四边形的四个内角之比是1∶3∶5∶6，分别用角度和弧度将这些内角的大小表示出来.

考查弧度与角度的换算.

第二课时

问题探索

名师解读

1. 任意角 α，在平面直角坐标系中，使顶点与坐标原点重合，始边与 x 轴非负半轴重合后，都可以进行表示，请问：α 能否在数轴上表示？

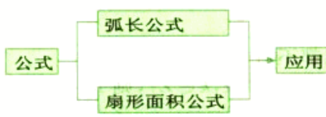
答案：能在数轴上表示，因为任意角集合与实数集之间可以建立一一对应关系，所以数轴上的点对应的实数可以表示一个角的弧度数.

2. 扇形面积公式与三角形面积公式在形式上有什么相似之处？

答案：三角形的面积公式为底与高的积的二分之一.在扇形中，若把弧长看成底，半径看成高，它的面积公式的形式就与三角形面积公式的形式相同.

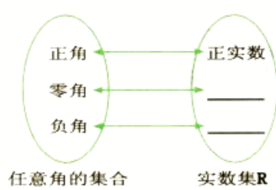
导学诱思

问题解答



1. 弧度制下的弧长公式为 $l=$________，扇形面积公式为 $S=$________$=$________. 角度制下的弧长公式为 $l=$________，扇形面积公式为 $S=$________.

2. 角的概念推广后，无论用角度制还是弧度制都能在角的集合与实数集之间建立一一对应关系：



1. $r\cdot|\alpha|$　$\frac{1}{2}rl$　$\frac{1}{2}r^2|\alpha|$　$\frac{n\pi r}{180}$　$\frac{n\pi r^2}{360}$

2. 零　负实数

重难突破

解读示例

本课时要求熟练掌握弧度制下的弧长公式和扇形的面积公式，搞清圆心角、半径、弧度、扇形面积之间的关系，以达到灵活应用的目的.

相比较，弧度制下的弧长公式和扇形面积公式具有更为简单的形式，记忆和应用更易操作，但使用公式时应注意：

(1)用公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 求圆心角时，应注意其结果是

【例题】如图，“十字形”公路的交叉处周围呈扇形形状，某市规划处拟在这块扇形土地上修建一个圆形广场. 怎样设计，广场的占地面积最大，其值是多少？（图中 $\angle AOB=60^\circ$，$\overset{\frown}{AB}=100\pi$ m）