21世纪 经济与管理规划教材

经济数学系列

# 微积分

# CALCULUS（上册）

金路 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

# 微积分

# CALCULUS（上册）

金路 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分(上册)/金路编著.—北京:北京大学出版社,2006.7
(21世纪经济与管理规划教材·经济数学系列)
ISBN 7-301-09508-2

Ⅰ.微… Ⅱ.金… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第092467号

**书　　　名:微积分(上册)**
著作责任者:金　路　编著
责 任 编 辑:朱启兵
标 准 书 号:ISBN 7-301-09508-2/O·0663
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn
电　　　话:邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62752926
　　　　　　出版部62754962
电 子 信 箱:em@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
　　　　　　730毫米×980毫米　16开本　13印张　248千字
　　　　　　2006年7月第1版　2006年7月第1次印刷
印　　　数:0001—4000册
定　　　价:22.00元

---

## 丛书学术顾问

| | |
|---|---|
| 陈继勇 | 武汉大学经济与管理学院 |
| 刘　伟 | 北京大学经济学院 |
| 刘志彪 | 南京大学商学院 |
| 杨瑞龙 | 中国人民大学经济学院 |
| 袁志刚 | 复旦大学经济学院 |
| 张　馨 | 厦门大学经济学院 |
| 周立群 | 南开大学经济学院 |

## 丛书执行主编

| | |
|---|---|
| 李军林 | 中国人民大学经济学院 |
| 林君秀 | 北京大学出版社 |

## 丛 书 编 委

| | |
|---|---|
| 蔡海鸥 | 中国人民大学信息学院 |
| 陈　莉 | 北京大学出版社 |
| 何　耀 | 武汉大学经济与管理学院 |
| 金　路 | 复旦大学数学科学学院 |
| 李军林 | 中国人民大学经济学院 |
| 李晓春 | 南京大学商学院 |
| 林君秀 | 北京大学出版社 |
| 文志雄 | 华中科技大学数学系 |
| 朱启兵 | 北京大学出版社 |

（以上姓名均按汉语拼音排序）

# 丛书序言

在最近二十多年中，我国社会生活的各个方面发生了巨大变化，经济建设取得了令世人瞩目的奇迹，经济体制正在全面地向市场经济体制转轨。经济与社会的全面转型产生了对市场经济知识的巨大需求，这又极大地推动了我国经济学教育水平的整体提高与进步。

今天，我国大学里的经济学教育已经越来越趋向规范化与国际化，一种更加有利于经济学理论发展的学术氛围已经形成，一大批拥有现代经济学知识与新型经济学理念的崭新人才正在脱颖而出。但是，不可否认的是，我国经济学教育和研究的整体水平与世界一流大学相比还有比较大的差距。突出表现在，我们自己培养的经济学博士很少能够在欧美一流大学任教；在国际著名的经济学期刊上，特别是顶级的经济学期刊上也不多见纯粹由国内经济学家完成的研究成果发表，这些都说明要想提高我国经济学教育和研究的水平并缩短这些差距，我们要走的路仍然很长！

近五十年来，经济学的研究与其成果越来越呈现出科学化的态势，其中一个突出的表现形式就是数学理论与经济学研究的紧密结合。具有严密逻辑的数学方法彻底改变了以往经济学分析中存在的一些缺点，如论证缺乏逻辑一致性以及所得出结论的模糊性。同时，随着数学方法在经济学中的广泛应用，不论是经济学研究方法还是经济学的研究成果，都越来越具有科学的特征。而且经济学家们所构建的经济学理论在很大程度上具有可检验性，这就避免了我们接受那些似是而非、模棱两可的结论。应该说，这是一种对传统社会科学，尤其是对经济学研究理念的根本性突破。随之而来的就是许多经济学领域的研究成果也逐渐被科学界所认可，一个最突出的现象就是，瑞典皇家科学院从 1969 年开始，特别为经济学领域内的那些具有开创性的成果设立了诺贝尔经济科学纪念奖，使经济学这一最具科学特征的社会科学也跻身于科学行列之中。

经济学在近半个世纪已经取得了一大批突破性的研究成果，这些成果不仅加深了人类对现实经济问题的洞察，而且也影响着人类社会的进一步向前发展。几乎所有这些成果都是用数学方法或数学语言所完成的，它们的核心内容都是建立在完备的数学模型与严密的数学论证的基础之上的，而且相当数量成果本身就是由优秀数学家取得的。尤其是获得诺贝尔经济学奖的重大研究成果，更是如此。从最早获奖的计量经济学理论、一般均衡理论，到最近获奖的资产定价理论、信息经济学理论与博弈理论，其分析方法与内容都是建立在数学理论与方法的基础之上的。近十年来两度获得诺贝尔经济学奖的博弈理论的主要贡献者纳

什(Nash)与奥曼(Aumman)就是出色的数学家。因此,从某种意义上讲,这些成果在经济学理论上的突破,其实就是数学理论的研究应用及其分析方法的拓展。今天,数学已经融入经济学之中,成为了现代经济学最重要的分析工具与研究方法。

事实上,在人类文明的发展进程中,数学一直占据核心的位置,许多推动人类文明发展并影响人类生活的重大科学发现与科学理论,都离不开数学所起到的奠基性贡献。今天,不仅是在自然科学,而且在人文社会科学的诸多学科中,使用数学语言或数学模型进行理论分析和观点阐述的现象也非常普遍。而一些社会科学中的许多重大发展也源于数学工具的改进与数学思想的发展。因此,我们可以这样说,数学知识的进步在很大程度上是人类文明进步的一个重要标志。

在整个社会科学中,经济学应该说最具有科学的特征,这主要归功于数学在经济学中的广泛应用,我们相信,数学必将继续推动经济学理论不断地向前发展。因此,掌握现代经济学的一个必要前提条件就是要先学好数学的基础知识。

当前,国内许多高校的经济学院系也都根据现代经济学发展的需要,调整、修订并实施了新的数学教学计划,加大了数学课的教学时数,加深了数学课的难度,这就对经济管理专业学生的数学水平提出了更高的要求。正是在这种背景下,北京大学出版社策划出版了《21世纪经济与管理规划教材·经济数学系列》丛书。

本丛书主要是针对高等院校的经济学、管理学各专业学生所编写的。丛书的编著者分别是中国人民大学、复旦大学、南京大学、武汉大学和华中科技大学等著名高校的教师,他们中的多数都同时具有数学与经济学硕士以上的学位,他们不仅有深厚的数学功底,而且深谙现代经济学理论,所研究的课题也在经济学的前沿领域内。他们有多年为经济与管理专业本科生、研究生讲授微积分、线性代数、运筹学、概率论与数理统计等多门课程的教学经验,目前又承担着本科生、研究生的中高级微观经济学、中高级宏观经济学、计量经济学、数理经济学、金融经济学、博弈论与信息经济学等经济学理论课的教学工作。这是一支知识结构合理、教学经验丰富的写作团队。

在内容的选择上,每本教材都尽量考虑到不同层次、不同专业的教学需要,尽可能地使本系列教材在教学过程中为任课教师提供一个合理的选择空间。当然,不足之处难免存在,希望广大师生不吝赐教,以便本丛书今后不断修订完善。

在本丛书的策划、出版过程中,经北京大学中国经济研究中心姚洋老师推荐,中国人民大学经济学院的李军林老师做了大量的组织协调工作。丛书编委会在此对他们表示诚挚的感谢!

丛书编委会

2006年6月

# 前　言

高等数学(微积分)是经济类、管理类等专业的重要基础课。随着科学技术的迅速发展和计算机技术的广泛应用,数学的思想、方法和技术不但在自然科学、工程技术等领域发挥着越来越重要的作用,而且已经广泛深入到社会科学的各个领域,特别是在经济学和管理学方面,这也对高等数学的教学提出了更高的要求。大学数学的教学要能够在不增加或少增加教学学时的前提下,使学生学到更丰富、更有用的现代数学知识,具有更强的运用数学工具和技术的能力,以适应时代发展的需要。本教材就是在这种形势之下,广泛征求了我校教师和兄弟院校同行的意见,查阅了大量资料,并结合自己的教学经验编写的。

本教材在教学内容的深度与广度上与经济类、管理类等专业的微积分课程教学基本要求相当,并与教育部颁布的研究生入学考试数学三和数学四的考试大纲中的微积分内容相衔接。

我们认为,大学数学教育的目标不但在于为学生提供学习专业知识的基础和工具,而且在于引导学生掌握一种现代科学的语言,学到一种理性思维的模式,接受包括归纳、分析、演绎等各项数学素质的训练。根据这一理解,我们在编写过程中特别注意了以下几点:

1. 继承和保持传统的微积分知识体系,力求做到线索清楚、组织科学、叙述准确、详简适当。同时更加重视数学的系统性和科学性,注意恰当地运用严格的数学语言与推理,使学生有机会适度接触精彩的数学抽象,积累逻辑思维的经验,锻炼理性思维和科学辨析能力,这是提高学生数学素质的重要环节。

2. 注重数学概念的物理学等背景以及几何的直观引入,把形式逻辑推导所掩盖的背景来源、解决问题的思想方法以及所讲授的内容与其他内容、概念之间的内在联系等生动而又直接地揭示出来,强调数学思想的发展线索、来龙去脉,引导学生逐步理解数学的本质和发展规律,力求避免刻板枯燥讲授数学的教学方式。

3. 强调数学在经济学等领域的应用,更加注重后继课程中的数学准备。增加应用实例一方面在于提高学生的学习兴趣,另一方面在于使学生初步具备数学来自实践、用于实践的认识。虽然由于课程性质的限制,教材中的例子并不能全面反映数学在经济学等领域应用的广泛性与深入性,但本教材对于这些例子的讲述方式更加强调数学建模的思想和方法,注重培养学生的实际应用能力和

创新意识。教学实践证明这是增强高等数学课程活力的有效途径。

4. 在每章最后一节增加了综合性例题，试图帮助学生复习、联络已学过的内容，提高知识的应用水平，增强学生融会贯通地分析问题、解决问题的能力。本教材还兼顾了各个层次学生的不同需要，将习题分为 A、B 两类。A 类相对容易，符合教学大纲对学生的基本要求。B 类相对难一些，适合有兴趣的学生深入学习。

我们认为，大学教材并非教师照本宣科的脚本。同一本教材可以使用于不同的对象，教出不同的风格。由于各高校、各专业方向对数学基础的要求有一定差异，有关教师可根据不同情况，对教学内容进行适当取舍。

在本教材的编写过程中，得到了复旦大学数学科学学院教学指导委员会主任童裕孙教授、全国普通高校教学名师陈纪修教授的支持、鼓励和帮助；武汉大学的何耀教授、中国人民大学的李军林副教授和蔡海鸥副教授、南京大学的李晓春副教授与作者共同讨论了编写计划，提出了宝贵意见，在此表示衷心的感谢。同时，感谢北京大学出版社林君秀、陈莉和张迎新同志的大力支持和帮助，感谢编辑朱启兵同志的认真负责与帮助，由于他们的辛勤工作，本书才得以尽快与读者见面。

囿于学识，本书不妥和谬误之处在所难免，殷切期望专家、同行和广大读者提出宝贵的批评和建议。

编 者

2006 年 6 月于复旦大学

# 目　录


**第一章　极限与连续** …… (1)

§1　函数 …… (1)

区间和邻域 …… (1)

函数的概念 …… (3)

函数的分段表示、隐式表示和参数表示 …… (4)

反函数 …… (6)

复合函数 …… (8)

函数的简单特性 …… (9)

初等函数 …… (10)

经济学中常用的函数 …… (14)

§2　数列的极限 …… (16)

数列极限的概念 …… (16)

数列极限的性质与四则运算法则 …… (20)

单调有界数列 …… (25)

数列的子列 …… (27)

§3　函数的极限 …… (27)

自变量趋于有限值时函数的极限 …… (27)

函数极限的性质与四则运算法则 …… (30)

单侧极限 …… (36)

自变量趋于无限时函数的极限 …… (36)

无穷小量 …… (39)

无穷大量 …… (42)

§4　连续函数 …… (43)

连续函数的概念 …… (43)

函数的间断点 …… (46)

连续函数的性质 …… (47)

闭区间上连续函数的性质 …… (49)

连续复利 …… (51)

§5　综合型例题 …… (52)

习题一 …… (55)

**第二章 导数与微分** …… (60)

§1 导数的概念 …… (60)

两个实例 …… (60)

导数的概念 …… (61)

导数的几何意义 …… (62)

单侧导数 …… (62)

可导性与连续性的关系 …… (63)

导函数 …… (64)

§2 求导法则 …… (66)

求导的四则运算法则 …… (66)

反函数求导法 …… (69)

复合函数求导法 …… (71)

对数求导法 …… (73)

隐函数求导法 …… (74)

参数形式的函数的求导法 …… (75)

§3 高阶导数 …… (76)

高阶导数的概念 …… (76)

高阶导数的运算法则 …… (79)

§4 微分 …… (81)

微分的概念 …… (81)

微分的几何意义 …… (83)

基本初等函数的微分公式 …… (83)

微分的四则运算法则 …… (84)

一阶微分的形式不变性 …… (84)

微分在近似计算中的应用 …… (85)

§5 边际与弹性 …… (86)

边际的概念 …… (86)

弹性的概念 …… (88)

常见函数的弹性公式 …… (91)

弹性的四则运算法则 …… (91)

§6 综合型例题 …… (92)

习题二 …… (95)

第三章　微分中值定理及其应用…………（100）
§1　微分中值定理…………（100）
费马(Fermat)定理…………（100）
罗尔(Rolle)定理…………（101）
拉格朗日(Lagrange)中值定理…………（103）
柯西(Cauchy)中值定理…………（105）
§2　洛必达法则…………（106）
$\frac{0}{0}$待定型的洛必达法则…………（106）
$\frac{\infty}{\infty}$待定型的洛必达法则…………（108）
其他待定型的极限…………（108）
§3　利用导数研究函数性态…………（111）
函数的单调性…………（111）
函数的极值…………（113）
函数的最值…………（115）
函数的凸性…………（117）
曲线的拐点…………（120）
§4　函数作图…………（121）
曲线的渐近线…………（121）
函数作图…………（123）
§5　泰勒公式…………（127）
带佩亚诺(Peano)余项的泰勒公式…………（127）
带拉格朗日余项的泰勒公式…………（129）
几个常见初等函数的泰勒公式…………（130）
泰勒公式的应用…………（134）
§6　导数在经济学中的应用举例…………（136）
需求弹性与总收益…………（137）
利润最大化问题…………（138）
库存问题…………（139）
§7　综合型例题…………（140）
习题三…………（145）

第四章　不定积分…………（150）
§1　不定积分的概念和运算法则…………（150）
不定积分的概念…………（150）
基本不定积分公式…………（152）

不定积分的线性性质 …… (153)

§2 换元积分法和分部积分法 …… (155)

第一类换元积分法 …… (155)

第二类换元积分法 …… (158)

分部积分法 …… (162)

§3 有理函数和三角函数有理式的不定积分 …… (166)

有理函数的积分 …… (166)

一些无理函数的积分 …… (169)

三角函数有理式的积分 …… (171)

§4 综合型例题 …… (173)

习题四 …… (176)

**答案与提示** …… (180)

**索引** …… (191)

**参考文献** …… (195)

# 第一章　极限与连续

数学是人类历史上最早诞生的科学之一，它研究的对象是现实世界中的数量关系和空间形式.数学起源于计数、测量和贸易等活动，在它发展的很长一段时期内，人们研究的主要对象是常量和固定的图形，使用的方法也基本上是静止的、孤立的.但在永恒运动着的现实世界中，变化无处不在，关于连续的变化、生长或运动的直观概念，一直在向科学的见解挑战.直到17世纪，随着物理学、力学和工业技术等的发展和推动，数学也迅速发展起来.笛卡儿(Descartes)引入了坐标系并建立了解析几何的观念，它沟通了数学中的两个基本研究对象：数与形之间的联系，用代数方法处理几何问题，这一发现为处理一般变量之间的依赖关系提供了几何模型.之后，牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)在前人研究的基础上发明了微积分，创立了一套行之有效的研究连续变量和变化图形的方法，更生动地反映出因变量在一个短暂瞬间相对于自变量的变化率，以及在自变量的变化过程中因变量的整体积累，前者称为导数，后者称为积分.这一划时代的贡献，极大地促进了数学的发展.目前数学的研究领域广泛而又深刻，并且成为自然科学、工程技术、经济管理等领域必不可少的工具.

微积分主要研究连续变量的变化性态，研究它们之间的依赖关系.为了利用变量的变化趋势、变化速度以及变化累积等要素刻画变化过程，人们提出并发展了极限的理论和方法，有了这个理论和方法，对上述问题的研究才从模糊、近似变得严格、精确.实际上，导数是一类特殊的极限，定积分则是另一类型的极限，极限的理论与方法构成了整个微积分的基础.本章介绍极限的基本概念、基本性质和基本运算，并且利用极限来描述函数的连续性.连续函数是最常见的一类函数，是微积分中重点讨论的对象.

## §1　函　　数

### 区间和邻域

有理数和无理数的全体称为**实数**.**数轴**是一条取定了原点 $O$，规定了正方向和单位长度的直线.实数与数轴上的点之间具有一一对应关系，即每个实数对应数轴上唯一的一个点；而数轴上的每个点也对应唯一的一个实数.这样，实数充

满了整个数轴且没有“空隙”，这就是实数的连续性. 在本书中，我们研究的数都是实数，并常常将一个实数与其在数轴上的对应点不加区别.

我们用 $\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数的集合，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合，$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合，$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合.

为了刻画实数中两点之间的距离，我们引入以下的概念.

**定义 1.1.1** 设 $x$ 为实数，$x$ 的**绝对值** $|x|$ 定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

从几何上看，绝对值 $|x|$ 就是数轴上点 $x$ 与原点 $O$ 之间的距离，而 $|x-y|$ 则就是数轴上点 $x$ 与 $y$ 之间的距离.

绝对值具有以下性质：对于任何实数 $x,y$ 成立

(1) $|x| \geqslant 0$，而 $|x|=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) $|x-y|=|y-x|$；

(3) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$；

(4) $|xy|=|x||y|$；

(5) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$.

第(3)个不等式称为**三角不等式**，它在很多地方起着重要作用.

设 $a,b$ $(a<b)$ 是两个实数，则满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 $x$ 所成的集合，称为以 $a,b$ 为端点的**开区间**，记为 $(a,b)$，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$.

满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 $x$ 所成的集合，称为以 $a,b$ 为端点的**闭区间**，记为 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

满足不等式 $a<x \leqslant b$（或 $a \leqslant x<b$）的所有实数 $x$ 所成的集合，称为以 $a,b$ 为端点的**半开半闭区间**，记为 $(a,b]$（或 $[a,b)$），即 $(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$（或 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$）.

上述几类区间的长度是有限的，称为**有限区间**，$b-a$ 称为**区间的长度**. 除此以外，还有下述几类**无限区间**：

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}; \quad [a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}; \quad (-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\};$$

和

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \text{ 为任意实数}\} \quad (\text{即实数集 } \mathbf{R}).$$

当考虑一点附近的点所构成的实数集合时，常用到以下的概念.

**定义 1.1.2** 设 $x_0$ 为实数，$\delta>0$. 实数集合

$$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

称为 $x_0$ 的 $\delta$ **邻域**，记为 $O(x_0,\delta)$. $x_0$ 称为**邻域中心**，$\delta$ 称为**邻域半径**.

实数集合$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$，即$O(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$，称为$x_0$的**空心$\delta$邻域**，常简称**空心邻域**.

在数轴上，$O(x_0,\delta)$就是以点$x_0$为中心，长度为$2\delta$的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

**函数的概念**

所谓变量就是变化的量. 在自然界和日常生活中，我们常常可以注意到变量的存在. 例如，行星围绕太阳转动时，相对位置的改变；城市人口数逐年的波动；生产成本和产品销售量随时间的增减；国际贸易中逆差的变化等，它们都可以用数学上的变量来描述. 同时，人们注意到在同一种自然现象、社会现象、生产实践或科学实验过程中，往往同时有几个变量相互联系、相互依赖、相互影响地变化着，其变化遵循着一定的客观规律. 例如，在物体的匀速直线运动中，如果物体的速度为$v$，那么它所走过的路程$s$与时间的关系就是$s=vt$. 函数就是变量之间变化关系的最基本的数学描述.

**定义 1.1.3**　设$D$是实数集$\mathbf{R}$上的一个子集，如果按某种规则$f$，使得对$D$中的每个数$x$，均有唯一确定的实数$y$与之对应，则称$f$是以$D$为**定义域**的(**一元**)**函数**. 且称$x$为**自变量**，$y$为**因变量**. 这个函数关系记做

$$f: D \to \mathbf{R},$$
$$x \mapsto y, \quad x \in D.$$

又记$y=f(x)$，并称

$$R=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

为函数$f$的**值域**，也常将它记为$f(D)$. 称平面点集

$$G=\{(x,f(x)) \mid y=f(x), x \in D\}$$

为函数$f$的**图像**.

以上定义的函数也常记为

$$y=f(x), \quad x \in D.$$

由$x=x_0$按对应规则$f$确定的$y$的值，记做$f(x_0)$或$y\big|_{x=x_0}$，称它为当$x=x_0$时$f$的值. 有时为明确起见，记上述函数$f$的定义域为$D(f)$，值域为$R(f)$，图像为$G(f)$.

在函数定义中出现了两个变量：取值于定义域$D$的自变量$x$和取值于$\mathbf{R}$的因变量$y$，反映这两个变量联系的数学概念就是函数关系$f$. 由定义可见，确定函数有两个要素：定义域和对应规则. 如果两个函数$f_1$和$f_2$满足

$$D(f_1)=D(f_2)$$

和

$$f_1(x)=f_2(x), \quad x \in D(f_1),$$

才有$f_1=f_2$成立.

**例 1.1.1** 设三个函数 $f,g$ 和 $h$ 分别定义为

$$f(x)=x,\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$g(x)=\sqrt{x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$h(x)=\frac{x^2}{x},\quad x\in(-\infty,+\infty)\backslash\{0\}.$$

显然 $f\neq h$,因为它们的定义域不同.同样地,$g\neq h$.虽然 $f$ 和 $g$ 的定义域相同,但它们的对应规则不同,因此 $f\neq g$.函数 $f,g$ 和 $h$ 的图像见图 1.1.1.

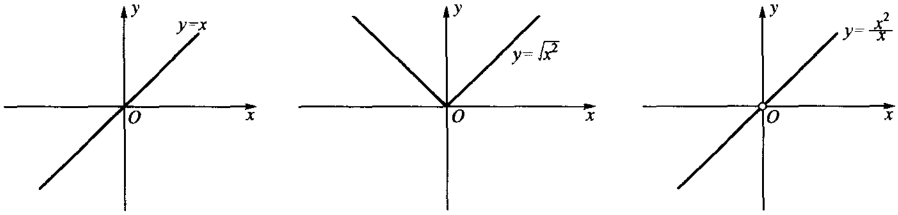


图 1.1.1

函数的定义域是多种多样的,它常随实际问题的性质而定.

**例 1.1.2** 已知存款的月利率为 $k\%$.现存入银行 $a$ 元(本金),按复利计算,记第 $n$ 个月后的存款余额为 $C(n)$,则

$$C(n)=a(1+k\%)^n.$$

它给出了存款余额与存款时间的关系,显然

$$D(C)=\{n|n\in\mathbf{N}^+\}.$$

### 函数的分段表示、隐式表示和参数表示

函数的表示法一般有三种:列表法、图示法和公式法(解析法).列表法就是将自变量与因变量的对应数据列成表格,它们之间的函数关系在表格上一目了然,例如商店里的销售量表.图示法就是用平面上的曲线来反映自变量与因变量的对应关系,例如气象站用仪表记录下的气温曲线,它描述了气温随时间的变化关系.公式法就是写出函数的数学表达式和定义域,此时对于定义域中每个自变量的值,可按照表达式中所给定的数学运算来确定因变量的值.这些表示法我们已经很熟悉,在此就不详述了.

在用公式法表示函数时,有一种分段表示的特别情形:一个函数在它的定义域的不同部分,其表达式不同,即用多个不同表达式分段表示同一个函数,这样的函数称为**分段函数**.

**例 1.1.3** 出租车运费的单价如下:不超过 3 千米为 10 元;3 千米到 10 千米为每千米 2 元;10 千米以上为每千米 3 元.那么运费 $s$ 与运载里程 $x$ 之间的函数关系为

$$s(x)=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3,\\ 10+2(x-3), & 3<x\leqslant 10,\\ 10+2\times 7+3(x-10), & 10<x.\end{cases}$$

它的定义域是$(0,+\infty)$,值域是$[10,+\infty)$.

**例 1.1.4　符号函数** $y=\operatorname{sgn} x$,其中

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$(见图 1.1.2).

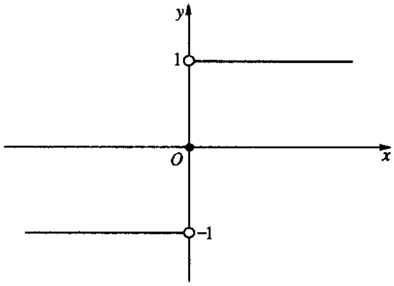


图　1.1.2

**例 1.1.5　取整函数** $y=[x]$,其中$[x]$为不超过 $x$ 的最大整数,即

$$[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

例如,$[2.15]=2$,$[\pi]=3$,$[-2.15]=-3$.

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是 $\mathbf{Z}$(见图 1.1.3).

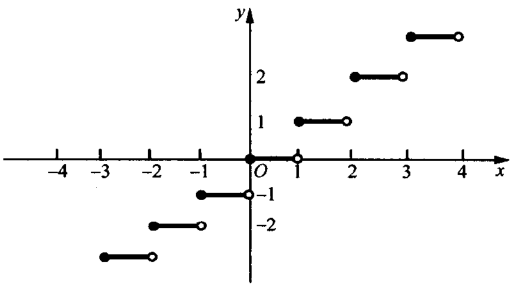


图　1.1.3

在用公式法表示函数时,还有一种隐式表示的特别情形.前面所举例子的共同特点是:因变量单独放在等式的一边,而等式的另一边是只含有自变量的表达式,它称为函数的显式表示.而所谓函数的隐式表示,是指通过方程 $F(x,y)=0$ 来确定变量 $y$ 与 $x$ 之间函数关系的方式,所确定的函数称为**隐函数**.即,如