全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

张义民 编　Zhang Yimin

机械振动习题解答

Mechanical Vibrations

Problems and Solutions

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

机械振动习题解答

Mechanical Vibrations

Problems and Solutions

张义民 编
Zhang Yimin

清华大学出版社
北京

内容简介

本书为全国工程硕士研究生教育核心教材《机械振动》(张义民编著,清华大学出版社,2007)全部习题的解答,具体内容包括机械振动(单自由度系统的振动、两自由度系统的振动、多自由度系统的振动、连续系统的振动)的基本理论、基本方法以及工程应用方面的各种类型的习题及解答。

本书可作为高等院校机械工程等学科的工程硕士研究生和工学硕士研究生以及高年级本科生必修课的教辅参考书,也可供有关科学技术人员和工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械振动习题解答/张义民编.—北京:清华大学出版社,2007.4
(全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材)
ISBN 978-7-302-14324-6

Ⅰ.机… Ⅱ.张… Ⅲ.机械振动—研究生—解题 Ⅳ.TH113.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 154470 号

责任编辑:庄红权 洪 英
责任校对:刘玉霞
责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社 **地 址**:北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn **邮 编**:100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机:010-62770175 **邮购热线**:010-62786544
投稿咨询:010-62772015 **客户服务**:010-62776969
印 刷 者:北京四季青印刷厂
装 订 者:三河市金元印装有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185×230 **印 张**:7.25 **字 数**:146 千字
版 次:2007 年 4 月第 1 版 **印 次**:2007 年 4 月第 1 次印刷
印 数:1～4000
定 价:13.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:023160-01

前 言

"机械振动"已经成为高等工科院校众多专业研究生教学的一门必修课程，也是众多工程技术人员在进行动态设计工作中所必需的基础知识。欲学好振动理论首先要注重理解和掌握有关概念、原理和方法，另一个重要环节就是要学习应用振动理论的概念、原理和方法分析解决问题，这一环节主要体现在学习过程中的习题解答和实际工作中的动态设计实践。

本书为全国工程硕士专业学位教育指导委员会批准立项的全国工程硕士研究生教育核心教材《机械振动》（张义民编著，清华大学出版社，2007）的教辅参考用书。原教材共有9章，本书包括原教材全部习题（即第2～6章的习题）的解答，具体内容包括机械振动（单自由度系统的振动、两自由度系统的振动、多自由度系统的振动、连续系统的振动）的基本理论、基本方法以及工程应用方面的各种类型的习题及解答，每章的习题尽可能按照不同性质由浅入深地安排。

对于工程硕士而言，自学能力就显得非常重要了。一定要仔细阅读教材，要注意体会教科书中关于概念、原理和方法的表述，教材的例题一般都是教材作者精心选择的具有典型意义的实例，要仔细研究其解答过程的思路与依据，并在自己解答习题时分析应用，重点放在巩固和深化基本概念、原理和方法以及提高分析问题和解决问题的能力上。如果课后解答习题时遇到困难，有必要参考本书的习题解答时，要真正弄懂解题思路，然后给出自己的解答。

在本书撰写过程中，作者参考了一些国内外资料，限于篇幅，在参考文献中只列出其中的一部分。在此，谨向原作者、编者表示衷心感谢。

在本书编著过程中，得到了清华大学出版社和东北大学研究生院的热情鼓励和大力支持，在此一并深表谢意。

限于水平，时间又很仓促，因此缺漏和不当之处在所难免，敬请读者不吝批评指正。

张义民

2006年7月于东北大学

Foreword

目录

Contents

第2章

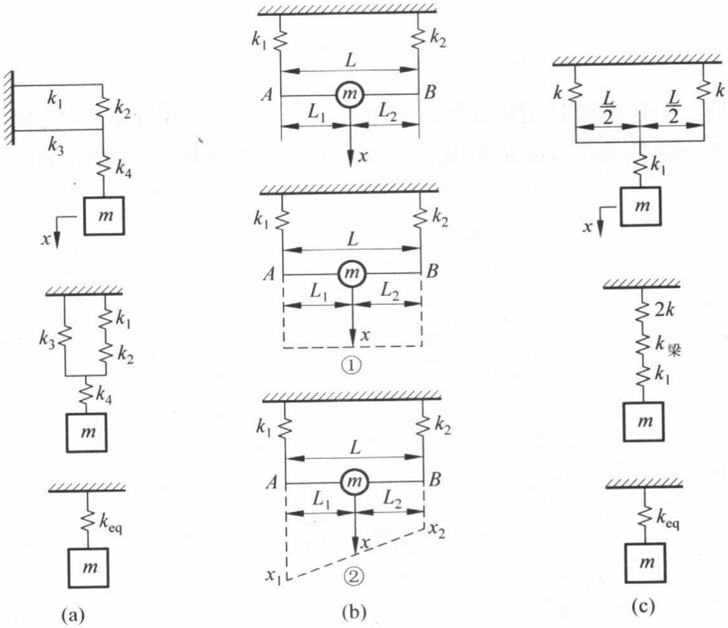
单自由度系统的自由振动

2.1 求习题图 2-1(a),(b),(c)所示系统的固有频率。

图(a)所示的系统悬臂梁的质量可以忽略不计,其等效弹簧刚度分别为 k_1 和 k_3。

图(b)所示的系统为一质量 m 连接在刚性杆上,杆的质量忽略不计。

图(c)所示的系统中悬挂质量为 m,梁的质量忽略不计,梁的挠度 δ 由式 $\delta = PL^3/48EJ$ 给出,梁的刚度为 $k_{梁}$。



习题图 2-1

解：(a) 系统简化过程如习题图 2-1(a)所示。

k_1 和 k_2 串联：$k_{eq1}=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

k_{eq1} 和 k_3 并联：$k_{eq2}=k_{eq1}+k_3$

k_{eq2} 和 k_4 串联：$k_{eq}=\dfrac{k_{eq2}k_4}{k_{eq2}+k_4}$

即

$$k_{eq}=\frac{(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1)k_4}{k_1k_2+(k_1+k_2)(k_3+k_4)}$$

所以固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

(b) 习题图 2-1(b)所示系统可能有下面两种运动情况：①在 m 垂直振动的整个过程中，杆被约束保持水平位置(见图(b)-①)；②在悬挂的铅垂面内，杆可以自由转动(见图(b)-②)。

① 在杆保持水平的情况下，弹簧 k_1 和 k_2 并联，有

$$k_{eq}=k_1+k_2$$

所以固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

② 当杆可以自由转动时，杆和质量 m 的运动会出现非水平的一般状态。设 A 点的位移为 x_1，B 点的位移为 x_2，m 的位移为 x，则静力方程和静力矩方程为

$$k_1x_1+k_2x_3=k_{eq}x$$

$$k_1x_1L_1=k_2x_2L_2$$

几何关系

$$\frac{x_1-x}{L_1}=\frac{x-x_2}{L_2}$$

又

$$L_1+L_2=L$$

由以上方程解得

$$k_{eq}=\frac{k_1k_2L^2}{k_1L_1^2+k_2L_2^2}$$

所以固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

(c) 系统简化过程如习题图 2-1(c)所示。等效弹簧刚度为

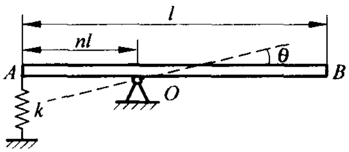
$$\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{k_{梁}}+\frac{1}{k_1}$$

其中

$$k_{梁}=\frac{48EJ}{L^3}$$

所以固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$



习题图 2-2

2.2 如习题图 2-2 所示的系统中均质刚杆 AB 的质量为 m,A 端弹簧的刚度为 k。求 O 点铰链支座放在何处时系统的固有频率最高。

解:设 θ 坐标如习题图 2-2 所示。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{2}-nl\right)^2\right]\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{1}{2}m(nl)^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}\right)\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m_{eq}(nl\dot{\theta})^2 \quad (1)$$

等效质量 m_{eq} 可以表示为

$$m_{eq}=m\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}\right) \quad (2)$$

由于固有频率与质量的平方根成反比,即 $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m_{eq}}}$,欲得最高的固有频率,必须使 m_{eq} 为最小,即

$$\frac{dm_{eq}}{dn}=\frac{3n-2}{3n^3}=0 \quad (3)$$

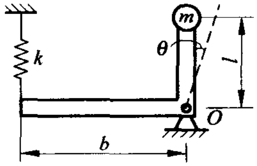
得

$$n=\frac{2}{3} \quad (4)$$

代入二阶导数,得

$$\frac{d^2m_{eq}}{dn^2}=\frac{2(1-n)}{n^4}>0 \quad (5)$$

是极小值,故铰链应放在距 A 端 $\frac{2}{3}L$ 处。



习题图 2-3

2.3 如习题图 2-3 所示为一个测低频振幅用的测振仪的倒置摆。

(1) 试导出系统的静态稳定平衡条件。

(2) 已知整个系统对转动轴 O 的转动惯量 $I_O=1.725\times10^{-3}\ \mathrm{N\cdot m\cdot s^2}$ 及 $k=24.5\ \mathrm{N/m}$，$m=0.0856\ \mathrm{kg}$，$l=4\ \mathrm{cm}$，$b=5\ \mathrm{cm}$。求系统的固有频率。

解：(1) 设 θ 坐标如习题图 2-3 所示。系统的势能为

$$U=\frac{1}{2}k(b\theta)^2-mgl(1-\cos\theta) \tag{1}$$

由理论力学可知，一个系统的静态平衡是稳定的还是不稳定的，决定于它的势能是极小值还是极大值。由

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}=kb^2\theta-mgl\sin\theta=0 \tag{2}$$

得

$$\theta=0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=0}&=(kb^2-mgl\cos\theta)_{\theta=0}=kb^2-mgl\\&=0.027\,694\,8(\mathrm{N\cdot m})>0\end{aligned} \tag{4}$$

故 $\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=0}=kb^2-mgl>0$ 时为稳定平衡。

在振动理论中，也可以由等效刚度的正负来判断。因为系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 \tag{5}$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(T+U)=0$，得系统的振动微分方程

$$I_O\ddot{\theta}+(kb^2-mgl)\theta=0 \tag{6}$$

由此得固有频率

$$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{kb^2-mgl}{I_O}} \tag{7}$$

式中 $k_{\mathrm{eq}}=kb^2-mgl>0$ 为静态稳定平衡条件，即等效刚度为正值时，系统是静态稳定平衡的；反之，等效刚度为负值(称为负刚度)时，将导致系统静态不稳定平衡。

(2) 系统的频率为

$$f=\frac{\omega_{\mathrm{n}}}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kb^2-mgl}{I_O}}=0.6377(\mathrm{Hz}) \tag{8}$$

2.4 某测振仪结构如习题图 2-4 所示。摆重量为 Q，由扭转刚度为 k_φ 的弹簧连接，并维持与铅垂方向成 α 角的位置。摆对 O 点的转动惯量为 I，摆的重心到转动轴 O 点的距离为 s。求此测振仪的自振周期。

解：设坐标 φ 如习题图 2-4 所示。在静平衡时

$$k_\varphi\varphi_s=Qs\sin\alpha \tag{1}$$

式中 φ_s 为弹簧 k_φ 的初始转角。微振动时，由动量矩定理，有

$$I\ddot{\varphi} = -k_{\varphi}(\varphi - \varphi_s) - Qs\sin(\alpha + \varphi) \tag{2}$$

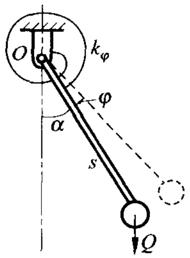
将式(1)代入式(2),并使 $\cos\varphi \approx 1, \sin\varphi \approx \varphi$ 得

$$I\ddot{\varphi} + (k_{\varphi} + Qs\cos\alpha)\varphi = 0 \tag{3}$$

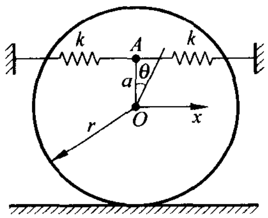
故

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{\varphi} + Qs\cos\alpha}{I}} \tag{4}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k_{\varphi} + Qs\cos\alpha}} \tag{5}$$



习题图 2-4



习题图 2-5

2.5 用能量法求习题图 2-5 所示均质圆柱体的固有频率。已知圆柱体的质量为 m,半径为 r,与固定水平面无相对滑动,弹簧刚度为 k,连接点 A 距圆柱体质心 O 的距离为 a。

解:系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

$$U = 2\left[\frac{1}{2}k(x + a\sin\theta)^2\right] \approx 2\left[\frac{1}{2}k(r+a)^2\theta^2\right] \tag{2}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + U) = 0 \tag{3}$$

得

$$\frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2k(r+a)^2\theta\dot{\theta} = 0 \tag{4}$$

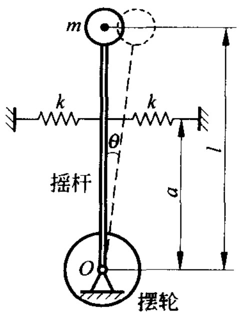
或

$$\ddot{\theta} + \frac{4k(r+a)^2}{3mr^2}\theta = 0 \tag{5}$$

由此得固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k(r+a)^2}{3mr^2}} \tag{6}$$

2.6 如习题图 2-6 所示为测量低频振幅所用传感器中的一个元件——无定向摆的示意图。无定向摆的摆轮上铰接一个摇杆，摇杆另一端有一敏感质量 m。在摇杆离转动轴 O 距离为 a 的位置左右各连接一个刚度为 k 的平衡弹簧，以保持摆在垂直方向的稳定位置。设已知整个系统对转动轴 O 的转动惯量 $I_O=1.76\times10^{-2}$ N·cm·s^2 及 $k=0.03$ N/cm，$W=mg=0.0856$ N，$l=4$ cm，$a=3.54$ cm。求系统的振动频率。



习题图 2-6

解：以摇杆偏离静平衡位置的角位移 θ 为参数，并设

$$\theta = \Theta\sin(\omega t+\varphi) \quad \theta_{\max}=\Theta$$

$$\dot\theta = \Theta\omega\cos(\omega t+\varphi) \quad \dot\theta_{\max}=\Theta\omega$$

在摇杆摆过静平衡位置时，系统具有最大动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2}I_O\dot\theta_{\max}^2 = \frac{1}{2}I_O\Theta^2\omega^2$$

在摇杆摆到最大角位移 $\theta_{\max}$ 处时，系统的最大势能包括两部分。弹簧变形后储存的弹性势能为

$$U_{1\max} = 2\times\frac{1}{2}ka^2\theta_{\max}^2 = ka^2\Theta^2$$

质量块 m 的重心下降后的重力势能为

$$U_{2\max} = -mgl(1-\cos\theta_{\max}) \approx -mgl\frac{\theta_{\max}^2}{2} = -mgl\frac{\Theta^2}{2}$$

由 $T_{\max}=U_{\max}$，有

$$\frac{1}{2}I_O\Theta^2\omega^2 = ka^2\Theta^2 - \frac{1}{2}mgl\Theta^2$$

得

$$\omega = \sqrt{\frac{2ka^2-mgl}{I_O}}$$

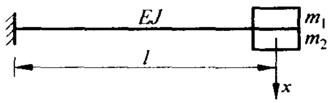
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2ka^2-mgl}{I_O}}$$

代入数据，得

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\times0.03\times3.54^2-0.0856\times4}{1.76\times10^{-2}}} = 0.767\,69\ (\text{Hz})$$

由此看到传感器的敏感系统的固有频率很低，因而可以用来测量约在 2～80 Hz 频率范围的低频振动。

2.7 某仪器中一元件为等截面的悬臂梁，质量可以忽略不计，如习题图 2-7 所示。在梁的自由端有两个集中质量 m_1 与 m_2，由电磁铁吸住。若在梁静止时打开电磁铁开关，使 m_2 突然释放。试求 m_1 的振幅。



习题图 2-7

解：方法 1 把梁自由端只有 m_1 时的静平衡位置设为原点，设 x 坐标如习题图 2-7 所示。振动微分方程为

$$m_1\ddot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

式中

$$k = \frac{3EJ}{l^3} \tag{2}$$

系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3EJ}{m_1 l^3}} \tag{3}$$

方程(1)的解为

$$x(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \tag{4}$$

由初始条件

$$t = 0,\quad x_0 = \frac{m_2 g}{k},\quad \dot{x}_0 = 0 \tag{5}$$

可得

$$A_1 = \frac{m_2 g}{k},\quad A_2 = 0 \tag{6}$$

初始条件的响应为

$$x(t) = \frac{m_2 g}{k}\cos\omega_n t \tag{7}$$

振幅为

$$A = \frac{m_2 g}{k} = \frac{m_2 g l^3}{3EJ} \tag{8}$$

方法 2 以未释放 m_2 前的静平衡位置为原点，则振动微分方程为

$$m_1\ddot{x} + kx = -m_2 g \tag{9}$$

其解为

$$x(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t - \frac{m_2 g}{k} \tag{10}$$

初始条件为

$$t = 0,\quad x_0 = 0,\quad \dot{x}_0 = 0 \tag{11}$$

代入解(10)可得

$$A_1 = \frac{m_2 g}{k}, \quad A_2 = 0 \tag{12}$$

初始条件的响应为

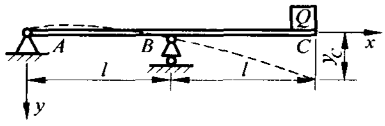
$$x(t) = -\frac{m_2 g}{k}(1 - \cos \omega_n t) \tag{13}$$

振幅为

$$A = \frac{m_2 g}{k} \tag{14}$$

可见响应的表达式对于选取的不同坐标是不同的，但振幅与所选取的坐标无关。

2.8 在计算习题图 2-8 所示的梁 ABC 的横向振动的固有频率时，该梁均布重量需要加到自由端重量 Q 上的部分是多少？梁的单位长度的重量为 w，假设以 C 处载荷产生的静力挠度曲线作为振动过程中梁的形状曲线。



习题图 2-8

解：将梁向自由端 C 简化为悬挂质量-弹簧系统，再利用 C 处载荷 Q 产生的静力挠度曲线计算梁的动能，从而求得等效系统的等效质量。

由材料力学公式求得由自由端载荷产生的该点静挠度及梁的挠曲方程。

$$y_C = \frac{2Ql^3}{3EJ} \tag{1}$$

$$y_1(x) = -\frac{Qx}{6EJ}(l^2 - x^2) = -\frac{x(l^2 - x^2)}{4l^3} y_C \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

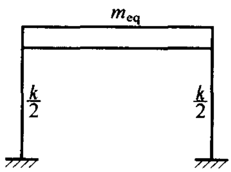
$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{Q(x-l)}{6EJ}[l(3x-l) - (x-l)^2] \\ &= \frac{(x-l)[l(3x-l) - (x-l)^2]}{4l^3} y_C \qquad (l \leqslant x \leqslant 2l) \end{aligned} \tag{3}$$

则梁的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{w}{2g}\int_0^l \left[\frac{x(l^2 - x^2)}{4l^3}\right]^2 \dot{y}_C^2 \mathrm{d}x + \frac{w}{2g}\int_l^{2l} \left\{\frac{(x-l)[l(3x-l) - (x-l)^2]}{4l^3}\right\}^2 \dot{y}_C^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{wl}{210g}\dot{y}_C^2 + \frac{1}{2} \times \frac{47wl}{168g}\dot{y}_C^2 = \frac{239}{840}\frac{wl}{2g}\dot{y}_C^2 \end{aligned} \tag{4}$$

故需要将该梁重量的 239/840（≈2/7）加到自由端处的重量 Q 上。

2.9 一个 10 t 龙门起重机，在纵向水平振动时要求在 25 s 内振幅衰减到最大振幅的 5%。起重机可简化如习题图 2-9 所示，等效质量 m_{eq}=24 500 kg。实测得对数减幅 δ=0.10。问起重



习题图 2-9

机水平方向的刚度至少应达何值？

解：衰减次数

$$j = \frac{1}{\delta}\ln\frac{A_1}{A_{j+1}} = \frac{1}{0.10}\ln\frac{100}{5} = 30(\text{次}) \tag{1}$$

衰减时间

$$t \approx jT = 2\pi j\sqrt{\frac{m_{eq}}{k}} \tag{2}$$

故

$$k = \frac{4\pi^2 j^2}{t^2}m_{eq} = \frac{4\pi^2 \times 30^2 \times 24\,500}{25^2} = 139.28 \times 10^4(\text{N/m}) \tag{3}$$

2.10 如习题图 2-10 所示的系统由一质量为 m、长为 l 的均匀杆及弹簧 k、阻尼器 c 组成。试导出系统的自由振动微分方程，并求出其衰减振动时的频率。

解：设 θ 为从静平衡位置摆动的角度。对铰支点 O 取矩，用动量矩定理导出振动微分方程

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + cl^2\dot{\theta} + ka^2\theta = 0 \tag{1}$$

或

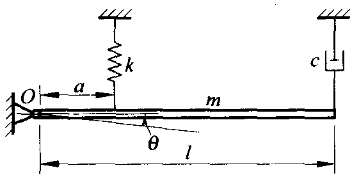
$$\ddot{\theta} + \frac{3c}{m}\dot{\theta} + \frac{3ka^2}{ml^2}\theta = 0 \tag{2}$$

于是

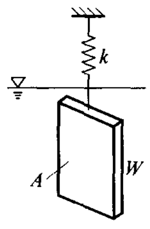
$$\omega_n = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{3}$$

故

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \frac{3c^2 l^2}{4kma^2}} \tag{4}$$



习题图 2-10



习题图 2-11

2.11 利用习题图 2-11 所示装置测某液体的粘度系数 μ。一等厚薄板重量为 W，面积为 A，悬挂于弹簧 k 上。先使系统在空气中自由振动，测得周期为 T_1（空气阻力忽略不

计)。然后放入被测液体中作衰减振动,测得周期为 T_2,已知薄板受到的阻力 $F=2\mu Av$(v 为相对速度),试证明

$$\mu = \frac{2\pi W}{gAT_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$$

解:在空气中

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}} \tag{1}$$

在液体中

$$\frac{W}{g}\ddot{x} + 2\mu A\dot{x} + kx = 0 \tag{2}$$

从中得

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{kg}{W} - \left(\frac{\mu Ag}{W}\right)^2}} \tag{3}$$

结合(1)和(3)两式,即得

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 - \left(\frac{\mu Ag}{W}\right)^2}}$$

$$\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2\left[\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 - \left(\frac{\mu Ag}{W}\right)^2\right] = 1$$

$$\left(\frac{\mu Ag}{W}\right)\left(\frac{T_1T_2}{2\pi}\right) = \sqrt{T_2^2 - T_1^2}$$

$$\mu = \frac{2\pi W}{gAT_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2} \tag{4}$$

2.12 一重为 5 N 的重物,挂于刚度系数为 2 N/cm 的弹簧上,由于系统具有粘性阻尼,故重物经过 4 次振动后,振幅减到原来的 $\frac{1}{12}$。试求该系统的对数减幅系数和周期。

解:对数减幅系数 δ、固有频率 ω_n、相对阻尼系数 ζ、衰减振动的周期 T_d 可以分别表示为

$$\delta = \zeta\omega_n T_d = \frac{1}{j}\ln\frac{A_1}{A_{j+1}} = \frac{1}{4}\ln\frac{A_1}{A_5} = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{1/12} = \frac{1}{4}\ln 12 = 0.621 \tag{1}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\times 9.8}{5}} = \sqrt{392} = 19.799$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} = \frac{2\pi}{19.799\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2}$$

联立式(1)和式(2),解得衰减振动的周期为

$$T_d = \frac{2\pi}{19.799\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{19.799\sqrt{1-\left(\frac{0.621}{\omega_n T_d}\right)^2}}$$

$$= \frac{2\pi}{19.799\sqrt{1-\left(\frac{0.621}{19.799 T_d}\right)^2}} = \frac{0.317}{\sqrt{1-\left(\frac{0.031}{T_d}\right)^2}}$$

得

$$T_d^2\left[1-\left(\frac{0.031}{T_d}\right)^2\right] = 0.317^2$$

$$T_d^2 - 0.000\,961 T_d - 0.100\,489 = 0$$

$$T_d = \frac{0.000\,961 + \sqrt{(0.000\,961)^2 + 4\times 0.100\,489}}{2}$$

$$= \frac{0.000\,961 + 0.634}{2} = 0.317(\mathrm{s})$$

2.13 一个质量-弹簧系统，当无阻尼时，固有振动频率为 f，试计算当粘性阻尼系数 $c=\frac{c_c}{2}$时（c_c为临界阻尼系数）的频率 f_d。

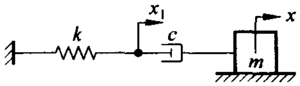
解：由 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega_n}{2\pi}$，$f_d=\frac{1}{T_d}=\frac{\omega_d}{2\pi}$，$\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ 知

$$\frac{f_d}{f} = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \sqrt{1-\zeta^2}$$

而 $\zeta=\frac{c}{2m\omega_n}=\frac{c_c}{4m\omega_n}$，$c_c=2m\omega_n$，得 $\zeta=\frac{1}{2}$，所以有

$$f_d = \sqrt{1-\zeta^2} f = \sqrt{1-\frac{1}{4}} f = \frac{\sqrt{3}}{2} f$$

2.14 导出习题图 2-14 所示弹簧与阻尼串联的单自由度系统的运动微分方程，并求出其振动解。



习题图 2-14

解：设 x，x_1 坐标如习题图 2-14 所示，振动微分方程为

$$kx_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}) = 0 \qquad (1)$$

$$m\ddot{x} - c(\dot{x}_1 - \dot{x}) = 0 \qquad (2)$$

由方程(2)得

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{c}(m\ddot{x} + c\dot{x}) \qquad (3)$$

对式(3)求微分，得

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{c}(m\dddot{x} + c\ddot{x}) \qquad (4)$$

然后将方程(1)对 t 微分，得

$$k\dot{x}_1 + c(\ddot{x}_1 - \ddot{x}) = 0 \qquad (5)$$

把式(3)和式(4)代入式(5)，重新排列后得到 $x(t)$的三阶微分方程

$$\dddot{x} + \frac{k}{c}\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0 \tag{6}$$

令

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{7}$$

代入式(1),得

$$\dddot{x} + \frac{\omega_n}{2\zeta}\ddot{x} + \omega_n^2\dot{x} = 0 \tag{8}$$

令 $x(t)=Ae^{st}$,可得特征方程

$$s^3 + \frac{\omega_n}{2\zeta}s^2 + \omega_n^2 s = 0 \tag{9}$$

这是 s 的三次方程,因而方程(9)有三个根,解之,得式(8)的解为

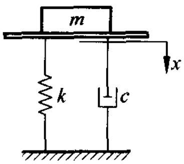
$$x = A_1 + e^{-\frac{1}{4\zeta}\omega_n t}\left[A_2 e^{\omega_n\sqrt{[1/(4\zeta)]^2-1}\,t} + A_3 e^{\omega_n\sqrt{[1/(4\zeta)]^2-1}\,t}\right] \tag{10}$$

由式(10)可见,只有在 $1/(4\zeta)<1$,即 $\zeta>0.25$ 时系统才有振动解,此时解为

$$x = A_1 + A_4 e^{-\frac{1}{4\zeta}\omega_n t}\sin\left[\omega_n\sqrt{1-[1/(4\zeta)]^2}\,t + \varphi\right] \tag{11}$$

常数 A_1,A_4 和 φ 可由初始条件 $x_1(0)$,$x(0)$,$\dot{x}(0)$决定。

2.15 一弹簧 k 与阻尼器 c 并联于无质量的水平板上,如习题图 2-15 所示,若将一质量 m 轻放在板上后立即释放,系统即作衰减振动。问质量 m 的最大振幅是多少?发生在何时?最大速度是多少?发生在何时?设 $\zeta<1$。



习题图 2-15

解:系统自由振动的微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

在 $t=0$,$x=x_0$,$\dot{x}=0$ 的初始条件下的响应为

$$x = x_0 e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) \tag{2}$$

式中

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \tag{3}$$

对式(2)取一次导数,有

$$\dot{x} = -x_0 e^{-\zeta\omega_n t}\frac{\omega_n^2}{\omega_d}\sin\omega_d t \tag{4}$$

最大振幅发生在 $\dot{x}=0$ 时,由式(4)可知,$t_m=0$ 时,质量 m 振幅最大,代入式(2)得

$$|x_{\max}| = |x_0| = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_n^2} \tag{5}$$

最大速度应发生在 $\ddot{x}=0$ 时,由式(4)可得

$$\cos\omega_d t_m - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\sin\omega_d t_m = 0 \tag{6a}$$