

高等学校教材

信号与系统

(第2版)

徐亚宁 苏启常 编著

本教材第1版获
2003年广西普通本科院校
优秀教材一等奖

本教材第 1 版获 2003 年广西普通本科院校优秀教材一等奖

高等学校教材

信号与系统

(第 2 版)

徐亚宁 苏启常 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是在2003年电子工业出版社出版的《信号与系统》一书的基础上修订而成的。

本版结合近几年教学内容和教学方法改革的成果,在保留了第1版的基本结构层次下,全书内容做了较大更新,以适应当代信息科学和技术发展的需求。本书追求基本概念和基本方法的细致阐述,突出重点和难点的论述,增加了计算机应用的内容,便于教学和学生阅读。

全书内容包括:绪论、连续时间信号与系统的时域分析、连续时间信号与系统的频域分析、连续时间信号与系统的复频域分析、离散时间信号与系统的时域分析、离散时间信号与系统的 z 域分析、系统的状态变量分析及附录。各章配备了MATLAB语言的应用、关键概念的小结,以及丰富的习题和上机练习。

本书第1版获2003年广西优秀教材一等奖,可作为高等学校电子信息类和电气类各专业“信号与系统”课程的教材,也可供有关科技人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统 / 徐亚宁, 苏启常编著. — 2版. — 北京: 电子工业出版社, 2007. 2

高等学校教材

ISBN 978-7-121-03781-8

I. 信… II. ①徐…②苏… III. 信号系统—高等学校—教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第005604号

责任编辑: 龚立堇

印 刷: 北京牛山世兴印刷厂

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

经 销: 各地新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 20.5 字数: 523.2千字

印 次: 2007年2月第1次印刷

印 数: 4000册 定价: 27.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系。联系电话: (010) 68279077; 邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

第 2 版前言

本版结合近几年教学内容和教学方法改革的成果,在广泛听取并研究了教师和学生意见的基础上,在保留了第 1 版的基本结构层次下,全书在内容论述、材料组织和选取上做了较大更新,基本上属于重写和重新组织,并有较多补充。本版的目的是有助于适应当代信息科学和技术发展的需求,有助于教师讲授这门课程和学生更容易地学习和掌握这门课程。本书在内容表述时,追求基本概念和基本方法的细致阐述,突出重点和难点的论述,增强可读性。

要全面掌握这门课程,必须有足够数量的练习作保证。因此,在第 2 版中修订了例题、习题的数量和类别,以求用例题阐述具体的分析方法,用不同层次的习题加强与正文内容的密切配合,有利于读者更好地理解这门课程的基本内容和不断地提高分析计算能力。

MATLAB 在信号处理领域中已占据重要地位。为了学生能尽早认识和熟悉 MATLAB,本版增加了 MATLAB 在信号与系统分析中的初步应用,并配备一定数量的上机练习,便于学生尽快对 MATLAB 入门,提高学习兴趣。

基于上述目标,第 2 版的修订工作主要有以下几个方面:

(1)绪论中连续信号的运算与变换、典型信号、冲激信号和阶跃信号等内容移至第 2 章讲授,增加了对线性时不变因果系统的特性研究,以加强对系统物理含义的理解。

(2)第 2 章删除了与算子有关的内容,突出卷积积分的方法和应用。

(3)第 3 章基本保留了第 1 版的内容,增加信号频谱概念的阐述和举例。

(4)第 4 章增加了双边拉普拉斯变换的内容。

(5)第 5 章删除了与算子有关的内容,突出卷积和的方法和应用。

(6)第 6 章增加了双边 z 变换应用的内容。

(7)第 1 版中的第 7, 8 两章合为一章讲述,并增加了状态方程求解的内容。

(8)每章增加了 MATLAB 使用介绍和应用的实例。

(9)每章对关键概念做了详细小结。

(10)对全书例题、习题进行了补充和修订,增加了上机练习。

本书第 2 版由桂林电子科技大学徐亚宁、苏启常主编,其中第 1, 2, 3, 7 章由徐亚宁编写;第 4, 5, 6 章由苏启常编写,周茜编写全部习题;有关 MATLAB 的所有内容和上机练习由苏启常编写;全书由王应生教授统稿。在此必须指出,在编写过程中,与各位同事的研究和讨论,以及授课过程中与学生的密切交流,对本书的写作有很多启发和帮助。

全书承桂林电子科技大学欧阳缮教授审阅,提出许多指导意见并给以支持,作者表示衷心感谢。

限于水平,书中难免有不妥或错误之处,恳请读者指正。E-mail: xuyaning@gliet.edu.cn

编者

2006 年 9 月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 信号与系统	1
1.2 信号的描述与分类	2
1.2.1 确定信号与随机信号	2
1.2.2 连续时间信号与离散时间信号	2
1.2.3 周期信号与非周期信号	3
1.2.4 能量信号与功率信号	3
1.2.5 一维信号与多维信号	4
1.3 系统的描述与分类	4
1.3.1 连续时间系统及其描述	5
1.3.2 离散时间系统及其描述	7
1.4 LTI 系统的特性	9
1.4.1 线性	9
1.4.2 时不变性	11
1.4.3 因果性	11
1.4.4 稳定性	11
1.5 信号与系统分析方法概述	11
1.6 MATLAB 基本知识	12
1.6.1 MATLAB 简介	12
1.6.2 MATLAB 快速入门	13
关键概念小结	16
习题	17
第 2 章 连续时间信号与系统的时域分析	19
2.1 常用信号及信号的基本运算	19
2.1.1 常用信号	19
2.1.2 信号的基本运算	21
2.2 单位阶跃信号和单位冲激信号	25
2.2.1 单位阶跃信号	25
2.2.2 单位冲激信号	26
2.2.3 冲激信号与阶跃信号的关系	28
2.2.4 冲激信号的性质	28
2.3 连续系统的零输入响应	31
2.4 冲激响应和阶跃响应	32

2.5 连续系统的零状态响应——卷积积分	34
2.5.1 卷积积分	35
2.5.2 卷积积分的图解法	36
2.5.3 卷积积分的性质	39
2.6 连续系统的时域分析	45
2.7 MATLAB应用举例	47
2.7.1 连续信号的 MATLAB 表示	47
2.7.2 信号基本运算的 MATLAB 实现	48
2.7.3 利用 MATLAB 进行系统的时域分析	49
关键概念小结	53
习题	53
上机练习	65
第3章 连续时间信号与系统的频域分析	66
3.1 周期信号的傅里叶级数分析	66
3.1.1 三角函数形式的傅里叶级数	66
3.1.2 指数形式的傅里叶级数	69
3.1.3 周期信号频谱的特点	72
3.2 非周期信号的傅里叶变换分析	74
3.2.1 从傅里叶级数到傅里叶变换	74
3.2.2 频谱函数 $F(j\omega)$ 的特性	75
3.2.3 典型非周期信号的傅里叶变换	76
3.3 傅里叶变换的性质	80
3.3.1 线性特性	80
3.3.2 对称特性	81
3.3.3 时移特性	82
3.3.4 频移特性	84
3.3.5 时频展缩特性	85
3.3.6 时域微分特性	86
3.3.7 频域微分特性	87
3.3.8 时域积分特性	87
3.3.9 卷积特性(卷积定理)	88
3.3.10 能量定理(帕斯瓦尔定理)	91
3.4 周期信号的傅里叶变换	92
3.4.1 一般周期信号的傅里叶变换	92
3.4.2 周期信号的傅里叶级数与单脉冲信号的傅里叶变换	94
3.5 连续时间系统的频域分析	96
3.5.1 系统频域分析法	96
3.5.2 系统频域分析法举例	97
3.6 连续系统频域分析应用举例	101
3.6.1 无失真传输系统	101

3.6.2	理想低通滤波器	102
3.6.3	调制与解调	103
3.7	抽样及抽样定理	105
3.7.1	信号的抽样	105
3.7.2	时域抽样定理	107
3.8	MATLAB 应用举例	109
3.8.1	周期信号的分解与合成	109
3.8.2	非周期信号频谱的 MATLAB 求解	111
3.8.3	用 MATLAB 计算连续系统的频率响应	112
	关键概念小结	113
	习题	114
	上机练习	127
第 4 章	连续时间信号与系统的复频域分析	128
4.1	拉普拉斯变换	128
4.1.1	双边拉普拉斯变换	128
4.1.2	双边拉普拉斯变换的收敛域	129
4.1.3	单边拉普拉斯变换	132
4.1.4	常用信号的拉普拉斯变换	133
4.2	单边拉普拉斯变换的性质	134
4.2.1	线性特性	134
4.2.2	时移特性	134
4.2.3	复频移(s 域平移)特性	135
4.2.4	尺度变换(时—复频展缩)特性	136
4.2.5	卷积定理	136
4.2.6	微分定理	138
4.2.7	积分定理	139
4.2.8	初值定理和终值定理	141
4.3	拉普拉斯逆变换	143
4.3.1	极点为实数且无重根	144
4.3.2	极点为复数且无重根	145
4.3.3	极点为多重极点	147
4.4	连续时间系统的复频域分析	149
4.4.1	微分方程的拉普拉斯变换求解	149
4.4.2	电路网络的复频域模型分析法	152
4.4.3	系统函数(转移函数)	156
4.5	系统特性与系统函数的关系	158
4.5.1	系统的因果性	158
4.5.2	系统的稳定性	158
4.5.3	由系统函数 $H(s)$ 确定频率响应	160
4.6	双边拉普拉斯变换	163

4.6.1	双边拉普拉斯变换的特性	164
4.6.2	系统函数与系统的稳定性	164
4.6.3	双边拉普拉斯逆变换	165
4.7	MATLAB 应用举例	167
4.7.1	用 MATLAB 计算拉普拉斯正反变换	167
4.7.2	利用 MATLAB 实现部分分式展开	167
4.7.3	$H(s)$ 的零极点图	168
	关键概念小结	169
	习题	170
	上机练习	180
第 5 章	离散时间信号与系统的时域分析	181
5.1	离散时间信号与离散系统	181
5.1.1	离散时间信号概述	181
5.1.2	典型的离散信号	182
5.1.3	离散信号的基本运算	184
5.1.4	离散系统响应的求解方法	186
5.2	离散系统的零输入响应	187
5.3	离散系统的单位样值响应	189
5.3.1	单位样值响应的定义	189
5.3.2	单位样值响应的求解	189
5.4	离散系统的零状态响应——卷积和	191
5.4.1	卷积和	192
5.4.2	卷积和的性质	193
5.4.3	卷积和的计算	194
5.5	离散系统响应的时域分析	197
5.6	MATLAB 应用举例	200
5.6.1	用 MATLAB 表示离散信号	200
5.6.2	离散信号运算的 MATLAB 实现	200
5.6.3	离散系统单位样值响应的求解	201
5.6.4	离散系统零状态响应的求解	202
5.6.5	卷积和的计算	203
	关键概念小结	204
	习题	205
	上机练习	211
第 6 章	离散时间信号与系统的 z 域分析	213
6.1	离散信号的 z 变换	213
6.1.1	z 变换的定义	213
6.1.2	z 变换的收敛域	214
6.1.3	常用离散信号的单边 z 变换	217
6.1.4	z 平面与 s 平面的映射关系	218

6.2	z 变换的基本性质	220
6.2.1	线性	220
6.2.2	移位特性	221
6.2.3	尺度变换特性	222
6.2.4	时间翻转特性	222
6.2.5	z 域微分(时域线性加权)	223
6.2.6	卷积定理	223
6.2.7	初值定理和终值定理	224
6.3	逆 z 变换	226
6.4	离散系统的 z 域分析	228
6.4.1	差分方程的变换解	228
6.4.2	系统函数	229
6.4.3	离散系统因果性, 稳定性与 $H(z)$ 的关系	231
6.4.4	应用双边 z 变换分析离散系统举例	231
6.5	离散系统的频率响应	232
6.5.1	序列的傅里叶变换	233
6.5.2	离散系统的频率响应	233
6.5.3	离散系统的稳态响应	235
6.6	MATLAB 应用举例	237
6.6.1	利用 MATLAB 计算 z 变换和逆 z 变换	237
6.6.2	部分分式展开的 MATLAB 实现	237
6.6.3	利用 MATLAB 求解离散系统的频率响应	238
6.6.4	系统函数的零极点	239
	关键概念小结	240
	习题	241
	上机练习	249
第 7 章	系统的状态变量分析	251
7.1	系统的信号流图	251
7.1.1	信号流图	251
7.1.2	系统的信号流图模拟	255
7.2	系统的状态变量分析	258
7.2.1	状态和状态变量	258
7.2.2	连续系统的状态方程和输出方程	258
7.2.3	连续系统状态方程和输出方程的建立	260
7.2.4	连续系统状态方程和输出方程的求解	265
7.2.5	离散系统的状态方程和输出方程的建立	268
7.2.6	离散系统的状态方程和输出方程的求解	270
7.3	MATLAB 应用举例	271
7.3.1	由系统的其他模型到状态变量描述的转换	271
7.3.2	状态方程的求解	272

关键概念小结	273
习题	274
上机练习	284
部分习题答案	285
附录 A 部分分式展开	308
A.1 $F(s)$ 的 $D(s)$ 中都是单实根	308
A.2 $F(s)$ 的 $D(s)$ 中有重根	309
A.3 $F(s)$ 的 $D(s)$ 中有共轭复根	310
附录 B 卷积积分表	311
附录 C 常用周期信号的傅里叶系数表	312
附录 D 常用信号的傅里叶变换及其频谱图	314
附录 E 常用序列单、双边 z 变换对	317
参考文献	318

第 1 章 绪 论

内 容 提 要

本章介绍信号与系统的基本概念。内容包括：信号与系统的概念；信号的描述和分类；系统的描述和分类；LTI 系统的特性；信号与系统的分析方法概述等。

1.1 信号与系统

在人类认识和改造自然的过程中都离不开获取自然界的**信息**。所谓**信息**，是指存在于客观世界的一种事物形象。千万年来，人类用自己的感觉器官从客观世界获取各种信息，如语言、文字、图像、声音、自然景物等等。可以说，我们是生活在信息的海洋之中，因此获取信息的活动是人类最基本的活动之一。

信息和消息密切相关，所谓**消息**，是指用来表达信息的某种客观对象，如电报中的电文、电话中的声音，电视中的图像等都是消息。通常我们把欲传输的语言、图像、文字、数码等统称为**信息**。

很久以来，人类曾寻求各种方法来传递信息(消息)。从利用手势、声音、光这类非语言传播发展到语言传播，是人类信息传播史上的第一次革命；文字的出现，印刷术、纸张的发明和推广使用，是人类信息传播史上的第二次革命；第三次信息传播革命是与电磁波传播媒介联系在一起的，如电报、电话、无线电广播、电视乃至通信卫星等一系列现代电磁波传播媒介的发现，这是人类信息传播史上具有划时代意义的革命。可见，消息的传送一般不是直接的，而必须借助于一定形式的信号才便于传输和处理。所以，信号是指消息的表现形式，如电信号、光信号和声音信号等。本课程着重研究电信号的分析、传输和处理。由于信号是带有信息的某种物理量，这些物理量的变化包含着信息，因此更具体地将信号定义为带有信息的随时间变化的物理量。

为了实现某些特定的功能(如能量转换或处理信息)，人们把若干个部件有机地组合成一个整体，这样的整体就是一个系统。所以，我们将系统定义为由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。如通信系统、控制系统、电力系统、机械系统等。系统的概念不仅适用于自然科学领域，还适用于社会科学领域。图 1-1 就是一个典型的通信系统示意图。

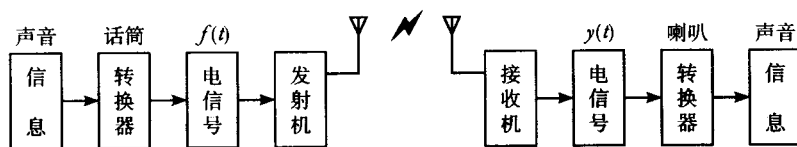


图 1-1 典型的通信系统

信号、电路与系统之间有着十分密切的联系。信号作为运载信息的工具，而电路或系统

则作为传送信号或对信号进行加工处理的组合。所以，离开了信号，电路与系统将失去意义。再看电路与系统之间的区别。研究系统主要看它具有怎样的功能和特性，能否满足所给定的信号形式的传输和处理的要求；而研究电路问题主要研究电路结构和元件参数。系统问题注重全局，而电路问题则关心局部。所以，电路与系统之间的主要差异是处理问题的角度不同。近年来，由于大规模集成技术的发展，使电路与系统的区分很难明确。所以，在本书中，电路与系统二者通用。

1.2 信号的描述与分类

描述信号的基本方法是建立信号的数学模型，即写出信号的数学表达式。一般地，我们描述信号的数学表达式都以时间为变量，即数学表达式都是时间的函数，绘出函数的图像称为信号的波形。本书中信号的描述采用两种方法：函数表达式和波形。所以，在下面的叙述中，信号与函数两词不加区分。

按照信号的不同性质和数学特征，可以有多种不同的分类方法。下面的五种分类方法，是目前常用的方法。

1.2.1 确定信号与随机信号

若信号被表示为一确定的时间函数，对于指定的某一时刻，可确定一相应的函数值，这种信号称为确定信号或规则信号。例如我们所熟知的正弦信号。

但是，实际传输的信号往往具有未可预知的不确定性，如果信号不是自变量(时间)的确定函数，即对某时刻 t ，信号值并不确定，而只知道某一数值的概率。此类具有统计规律的信号称为无规则信号或随机信号。无线信道中的干扰和噪声就是这类随机信号。

本书仅讨论确定信号。但应该指出，随机信号及其通过系统的研究，是以确定信号通过系统的理论为基础的。

1.2.2 连续时间信号与离散时间信号

按照时间函数取值的连续性与离散性可将信号划分为连续时间信号与离散时间信号(简称连续信号与离散信号)。

如果在所考虑的时间区间内，除有限个间断点外，对于任意时间值都有确定的函数值与之对应，这样的信号称为连续信号，通常用 $f(t)$ 表示。例如

$$f_1(t) = 10\sin\pi t$$
$$f_2(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

或可用波形表示连续信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ ，如图 1-2 所示。

实际上，连续信号就是函数的定义域是连续的。至于值域，可以是连续的，也可以不是。如果函数的定义域和值域都是连续的，则该信号称为模拟信号。但在实际应用中，模拟信号和连续信号两词往往不作区分。

如果只在某些不连续的时间瞬时才有确定的函数值对应，而在其他时间没有定义，这样的

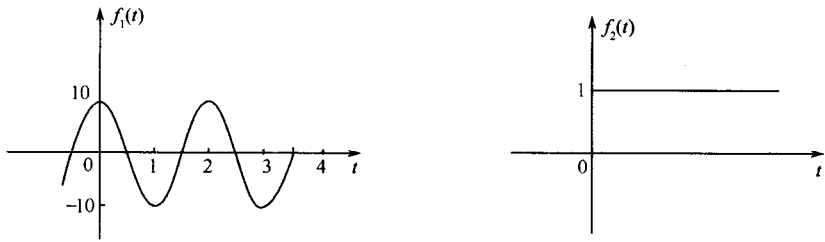


图 1-2 连续时间信号

信号称为离散信号，通常用 $f(n)$ 表示。有定义的离散时间间隔可以是均匀的，也可以不均匀。一般都采用均匀间隔，将自变量用整数序号 n 表示，即仅当 n 为整数时 $f(n)$ 才有定义。例如

$$f_1(n) = \begin{cases} 0, & n \leq 0 \\ 1, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ 0, & n > 2 \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

或者可用波形表示离散信号 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ ，如图 1-3 所示。

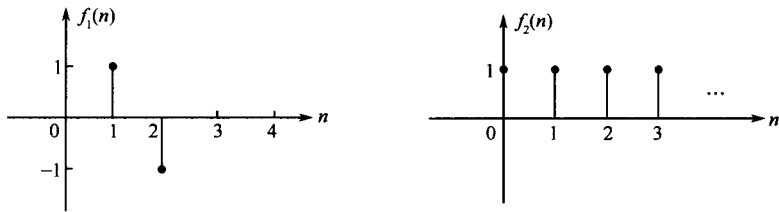


图 1-3 离散时间信号

同样，离散信号就是函数的定义域是离散的，只取规定的整数。若函数的值域也是离散的，则该信号称为数字信号。在实际中，离散信号和数字信号也不予区分。

1.2.3 周期信号与非周期信号

所谓周期信号就是依一定时间间隔周而复始，而且是无始无终的信号，它们的数学表达式满足

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

式中 T 为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程，便可确知它在任一时刻的数值。

非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期信号的周期 T 趋于无限大，则成为非周期信号。

1.2.4 能量信号与功率信号

为了知道信号能量或功率的特性，常常研究信号 $f(t)$ (电流或电压) 在 1Ω 电阻上所消耗的能量或功率。信号 $f(t)$ 在 1Ω 电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$ 。在时间间隔 $-T < t < T$ 内(这

里 T 不是周期) 消耗的能量为

$$W = \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-1)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, 信号 $f(t)$ 的总能量为

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-2)$$

信号的平均功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-3)$$

由于被积函数是 $f(t)$ 的绝对值的平方, 所以信号能量 W 和功率 P 都是非负实数, 即使 $f(t)$ 是复函数也一样。

应用式(1-2)、式(1-3) 计算信号在 1Ω 电阻上的总能量及平均功率时, 可能有三种情况: 一种是总能量为有限值而平均功率为零, 即 $0 < W < \infty$ 和 $P \rightarrow 0$; 另一种是总能量为无限大而平均功率为有限值, 即 $W \rightarrow \infty$ 和 $0 < P < \infty$ 。我们把能量有限的信号称为能量信号, 功率有限的信号称为功率信号。一般周期信号都是功率信号, 而非周期信号可以是能量信号, 也可以是功率信号。值得注意的是一个信号不可能既是能量信号, 又是功率信号, 但有少数信号, 既不是能量信号也不是功率信号。

1.2.5 一维信号与多维信号

从数学表达式上看, 信号可以表示为一个或多个变量的函数。语音信号可表示为声压随时间变化的函数, 这是一维信号, 而一张黑白图像每个点(像素) 具有不同的光强度, 任一点又是二维平面坐标中的两个变量的函数, 这是二维信号。实际上还可能出现更多维数变量的信号, 例如电磁波在三维空间中传播, 若同时考虑时间变量就构成四维信号。在以后的讨论中, 一般情况下只研究一维信号, 且自变量为时间。

1.3 系统的描述与分类

从 1.1 节中我们知道, 系统与信号密切相关, 用图 1-4 说明二者之间的关系。

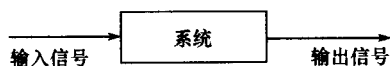


图 1-4 信号与系统的关系

从外部引入系统的量称为输入信号或激励信号; 在输入信号作用下, 系统的响应称为输出信号。系统分析, 就是要找出输入和输出信号之间的关系。为此, 首先要对系统进行描述, 即要建立系统的数学模型, 然后用数学方法进行求解, 并对所得结果进行物理解释, 并赋予物理含义。

本书中对系统采用两种描述方法: 数学模型和模拟框图。由于连续时间系统和离散时间系统的两种描述方式有所不同, 在此就不对系统的这两种描述方法进行详细叙述, 而放在 1.3.1 小节和 1.3.2 小节中详细介绍, 也作为本节的重点内容。

关于系统的分类, 也有许多划分方法。通常将系统分为: 连续时间系统与离散时间系统,

即时系统与动态系统, 集总参数系统与分布参数系统, 线性系统与非线性系统, 时变系统与时不变系统等。本书主要讨论线性时不变(Linear Time-Invariant, LTI) 系统, 包括连续时间 LTI 系统和离散时间 LTI 系统。

1.3.1 连续时间系统及其描述

若系统的输入和输出都是连续信号, 则称该系统为连续时间系统, 简称为连续系统, 如图 1-5 所示, 图中 $f(t)$ 是输入, $y(t)$ 是输出。

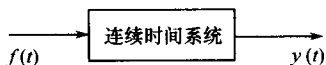


图 1-5 连续时间系统

描述连续系统的方法有数学模型和模拟框图两种。下面举例说明这两种方法。

【例 1-1】 图 1-6 所示 RC 电路, 求电容 C 两端的电压 $y(t)$ 与输入电压源的关系。

解:

根据 KVL 及元件的伏安关系写出方程

$$R \cdot C \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t)$$

整理为

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}f(t)$$

这是一个一阶线性微分方程。

【例 1-2】 图 1-7 所示电路, $f(t)$ 为激励电流源, 试写出响应电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 与激励的关系。

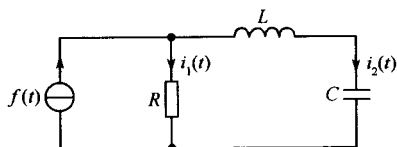


图 1-7 【例 1-2】的电路图

解:

由 KCL 可得

$$i_1(t) + i_2(t) = f(t) \quad ①$$

由 KVL 及元件伏安关系得

$$Ri_1(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau \quad ②$$

将式 ② 微分, 再将式 ① 代入并整理得

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_1(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} f(t)$$

和

$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_2(t) = \frac{R}{L} \frac{df(t)}{dt}$$

可见, 这是二阶线性微分方程。

一般而言, 描述一个 n 阶线性连续系统, 总可以用 n 阶线性微分方程描述, 即

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1f^{(1)}(t) + b_0f(t) \end{aligned} \quad (1-4)$$

其中, $y(t)$ 是所求的响应变量, $f(t)$ 是已知的激励变量, $a_0 \sim a_{n-1}$, $b_0 \sim b_m$ 为常数。微分方程即为描述连续系统的数学模型。

除了利用微分方程描述连续系统之外, 还可借助模拟框图(block diagram) 描述, 即用一

些基本运算单元,如标量乘法器(倍乘器)、加法器、乘法器、微分器、积分器、延时器等,构成描述系统的模拟框图。表 1-1 给出了这些常用基本运算单元的符号及其各自的输入输出关系。

表 1-1 常用的基本运算单元

运算单元	框图	输入输出关系
标量乘法器		$y(t) = af(t)$
微分器		$y(t) = \frac{d}{dt}f(t) = f'(t)$
积分器		$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$
延时器		$y(t) = f(t - \tau)$
加法器		$y(t) = f_1(t) + f_2(t)$
乘法器		$y(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$

【例 1-3】 某连续系统的模拟框图如图 1-8 所示,写出该系统的微分方程。

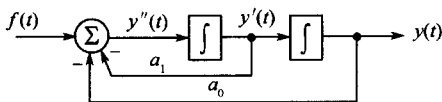


图 1-8 【例 1-3】的模拟框图

示。从加法器的输出可得

$$y''(t) = -a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t)$$

整理得

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

【例 1-4】 描述某连续系统的模拟框图如图 1-9 所示,写出该系统的微分方程。

解:

图 1-9 中含有两个积分器,仍然是二阶系统。因为响应 $y(t)$ 不是积分器的输出,故设中间变量 $x(t)$,如图 1-9 所示。

从加法器的输出可得

$$x''(t) = -3x'(t) - 2x(t) + f(t)$$

即

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = f(t) \quad \text{①}$$

和

$$y(t) = -x'(t) + 2x(t) \quad \text{②}$$

为求出响应 $y(t)$ 与激励 $f(t)$ 之间关系的微分方程,要消去中间变量 $x(t)$ 。由式 ② 得

$$2y(t) = -2x'(t) + 4x(t)$$

解:

系统的模拟框图中有两个积分器,所以描述该系统的是二阶微分方程。由积分器的输入输出关系可知,若输出设为 $y(t)$,则两个积分器的输入分别为 $y'(t)$ 和 $y''(t)$,如图 1-8 中所

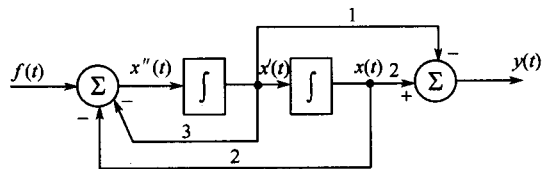


图 1-9 【例 1-4】的模拟框图

$$3y'(t) = -3x''(t) + 6x'(t)$$

$$y''(t) = -x'''(t) + 2x''(t)$$

将以上三式相加得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = -[x''(t) + 3x'(t) + 2x(t)]' + 2[x''(t) + 3x'(t) + 2x(t)]$$

考虑式①有

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = -f'(t) + 2f(t)$$

1.3.2 离散时间系统及其描述

若系统的输入和输出都是离散信号,则称该系统为离散时间系统,简称离散系统,如图1-10所示,图1-10中 $f(n)$ 是输入(激励), $y(n)$ 是输出(响应)。

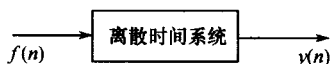


图1-10 离散时间系统

描述离散系统的方法也有两种:数学模型和模拟框图。下面就来讨论这两种描述方法。

【例1-5】某人从当月起每月初到银行存款 $f(n)$ (元),月息 $r=1\%$ 。设第 n 月初的总存款数为 $y(n)$ 元,试写出描述总存款数与月存款数关系的方程式。

解:

第 n 月初的总存款数应由三项组成,即第 n 月初之前的总存款数 $y(n-1)$ 、第 n 月初存入的存款数 $f(n)$ 和第 n 月初之前的利息 $ry(n-1)$ 。所以有

$$y(n) = (1+r)y(n-1) + f(n)$$

即

$$y(n) - (1.01)y(n-1) = f(n)$$

这是一个一阶常系数的差分方程。

事实上,一个 N 阶线性离散系统可以用 N 阶线性差分方程来描述。差分方程有前向差分方程和后向差分方程两种。 N 阶前向差分方程的一般形式为

$$y(n+N) + a_{N-1}y(n+N-1) + \cdots + a_0y(n) = b_Mf(n+M) + b_{M-1}f(n+M-1) + \cdots + b_0f(n) \quad (1-5)$$

N 阶后向差分方程的一般形式为

$$y(n) + a_1y(n-1) + \cdots + a_Ny(n-N) = b_0f(n) + b_1f(n-1) + \cdots + b_Mf(n-M) \quad (1-6)$$

其中 $a_0 \sim a_N, b_0 \sim b_M$ 都是常数。

后向差分方程和前向差分方程并无本质差异,用哪种方程描述离散系统都可以,但考虑到通常研究的LTI离散系统的输入、输出信号多为因果信号($f(n)=0, y(n)=0, n<0$),故在系统分析中一般采用后向差分方程。差分方程即为描述离散系统的数学模型。

除了利用差分方程描述离散系统之外,还可以借助模拟框图描述。与描述连续系统相类似,也是用一些基本运算单元构成描述系统的模拟框图。表1-2给出了描述离散系统的基本运算单元及其输入、输出关系。