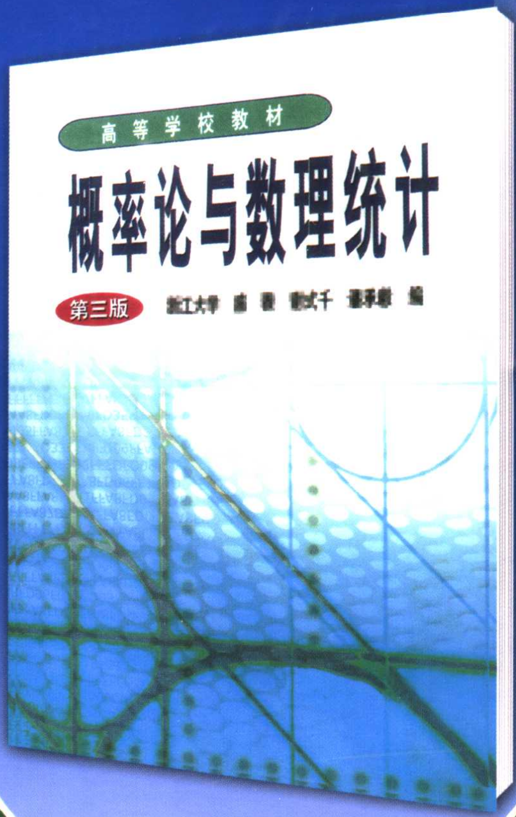
高等学校优秀教材辅导丛书
GAODENG XUEXIAO YOUXIUJIAOCAI FUDAOCONGSHU

主编 魏淑惠 李文赫

概率论与数理统计
知识要点与习题解析



哈尔滨工程大学出版社

高等学校优秀教材辅导丛书

概率论与数理统计
知识要点与习题解析

(配浙江大学第三版教材·高教版)

主　编　魏淑惠　李文赫
主　审　王玉学

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是针对浙江大学《概率论与数理统计》(第三版)而编写的辅导书,内容包括概率论、数理统计两部分,共九章,每章分为"知识要点"、"书后习题解析"、"同步训练题"、"同步训练题答案"四个版块,可作为理工科各专业的教辅用书,也可以用作硕士研究生入学考试的辅导材料。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计知识要点与习题解析/魏淑惠,李文赫主编.
—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2006
ISBN 7-81073-839-9

Ⅰ.概… Ⅱ.①魏…②李… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—数学参考资料 Ⅳ.o21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 129425 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 12.5
字 数 250 千字
版 次 2006 年 12 月第 1 版
印 次 2006 年 12 月第 1 次印刷
印 数 1—3 000 册
定 价 16.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

概率论与数理统计是高等院校理工科专业和经济管理专业一门重要的基础课程，也是许多专业硕士研究生入学考试的必考科目。作为大学生在大学期间所学习的第一门系统地研究随机现象及其统计规律的数学学科，概率论与数理统计的思想、方法有其独到之处，初学者往往感到其基本概念难懂、习题难做，找不到规律；另一方面，由于受教学学时限制，教师在讲授本课程时往往很难做到讲授方法与演算习题兼顾，权衡利弊，只好采取“以讲清思想方法为主，演算适量习题为辅”的原则来安排课堂教学，因此，学生们在学习概率论与数理统计时通常的反映之一是“上课听得懂，下课习题做不出”。基于以上原因，为了帮助广大学生克服学习中的困难，扎实掌握概率论与数理统计的知识要点，提高解题能力，我们精心编写了本书，本书与浙江大学编写的《概率论与数理统计》(第三版)教材完全同步，可作为该教材的同步配套辅导用书。本书内容包括概率论、数理统计两部分，共九章，每章分为“知识要点”，“书后习题解析”，“同步训练题”，“同步训练题答案”四个版块。

“知识要点”以节为单位，列出本章节应掌握的基本概念、重要公式和定理，既突出必须掌握的核心知识，又有针对性地对一些重要概念、公式、定理作了解释，帮助读者加强对知识要点的理解，同时提高应用能力。

“书后习题解析”针对教材前九章所有书后习题给出了详细解答，有些习题给出了多种解法，并对一些重点及稍有难度的习题作了解析。解析过程中，主要分析解题思想、总结解题方法，希望帮助读者达到举一反三、触类旁通的目的。这部分应是本书最有特色的部分。

“同步训练题”是作者根据自己多年的教学经验，紧扣各章知识要点并结合历年考研教学试题而精心设计的，它完全与教材同步。其目的是为了方便读者检验自己对每章知识的掌握程度，查漏补缺，进一步消化知识，夯实基础，提高解题能力。由于同步训练题选取了绝大多数考研真题，因此准备考研的同学可以以此来熟悉考研题型，把握考点，为今后考研打好基础。

Preface

“同步训练题答案”针对同步训练题中的每道题都给出了详细的解答，并对一些重点的方法进行了系统的介绍。

本书由魏淑惠(概率论部分)、李文赫(数理统计部分)主编，魏淑惠、王玉学统稿。在编写过程中，参考了多本同类书籍，借鉴众家之长，在此向这些书的作者表示感谢。

由于作者水平所限，书中不足、疏漏之处在所难免，恳请广大读者、专家和同行们批评指正。

编　者

2006 年 7 月

Contents 目录

第1章 概率论的基本概念

知识要点

1. 了解随机试验的特征;理解样本空间、随机事件等概念;掌握随机事件之间的关系及运算.

2. 了解频率的概念;理解概率的概念,掌握概率的性质;理解古典概型的概念,掌握古典概型的概率计算方法.

3. 理解条件概率的定义及性质;掌握乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式,会利用上述公式进行概率计算.

4. 理解事件独立性的概念及性质;能利用事件独立性进行概率计算.

1.1 随机试验

在概率论中,我们将具有以下三个特点的试验称为随机试验,简称试验,通常用 E 表示:

(1)可以在相同的条件下重复进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

1.2 样本空间、随机事件

1.2.1 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S.样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点.

1.2.2 随机事件

试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件，常用大写英文字母 A,B,C 等表示.在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

由一个样本点组成的单点集，称为基本事件.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件.

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它作为 S 的子集，在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

1.2.3 事件间的关系与事件的运算

1.事件间的关系与事件的运算

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

(1)包含　若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

(2)相等　若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(3)和事件　事件 $A\cup B$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件.当且仅当 A,B 中至少有一个发生时，称事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件的和事件.

(4)积事件　事件 $A\cap B$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件.当且仅当 A,B 同时发生时，称事件 $A\cap B$ 发生.$A\cap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件的积事件.

(5)互不相容(互斥)　若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容(互斥)的，即事件 A 与事件 B 不能同时发生.

(6)逆事件(对立事件)　若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件)，指的是对每次试验而言，事件 A,B 中必有一个发生，且仅有一个发生.A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

(7)差事件　事件 $A-B$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件.当且仅当 A 发生、B 不发生时，称事件 $A-B$ 发生.$A-B$ 也记作 $A\overline{B}$.

2.事件的运算规律

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$

(3)分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$

(4)德·摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$

1.3　频率与概率

1.3.1　概率的定义

设 E 是随机试验,S 是它的样本空间.对 E 的每个事件,规定一个实数 $P(A)$ 与之对应,若集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件.

(1)非负性:对于每个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$.

(2)规范性:对于必然事件 S,有 $P(S)=1$.

(3)可列可加性　设 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

称 $P(A)$为事件 A 的概率.

1.3.2　概率的性质

(1)$P(\varnothing)=0$.

(2)有限可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

(3)逆事件的概率:$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4)加法公式:对于任意两事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

对于任意三个事件 A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

(5)减法公式:对于任意两事件 A,B,有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

特别当 $A\subset B$ 时,有 $P(B-A)=P(B)-P(A);P(B)\geqslant P(A)$.

1.4 等可能概型(古典概型)

1.4.1 等可能概型的定义

具有以下两个特点的试验称为等可能概型:

(1)试验的样本空间只包含有限个元素;

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同.

1.4.2 等可能概型中事件概率的计算公式

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件总数}}$$

1.5 条件概率

1.5.1 条件概率的定义

设 A,B 是任意两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

1.5.2 条件概率的性质

对于固定的事件 A,条件概率 $P(\cdot|A)$具有概率的一切性质,其中常用性质有

(1)$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$;

(2)$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$.

1.5.3 乘法公式

设 A,B 是任意两个事件,且 $P(A)>0$,则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$,且 $P(A_1,A_2,\cdots,A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1,A_2,\cdots,A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

1.5.4 全概率公式和贝叶斯公式

设 S 为试验 E 的样本空间,$B_1,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件.若

(1) $B_1,\cdots,B_n$ 两两互不相容；

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，

则称 $B_1,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则有

(1) 全概率公式 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$；

(2) 贝叶斯公式 $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$.

应用全概率公式和贝叶斯公式解题的关键是正确找出样本空间的一个划分，通常可将 $B_1,\cdots,B_n$ 看作是引起复杂事件 A 发生的若干个“原因”，当计算由若干“原因”引起的复杂事件 A 发生的概率时用全概率公式；而在已知复杂事件 A 已发生的条件下，求某一种“原因”B_i 发生的条件概率时，则用贝叶斯公式.

1.6 独 立 性

1.6.1 事件独立性的定义

对于两个事件 A,B，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A,B 相互独立.

对于三个事件 A,B,C，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

对于 $n(n\geqslant 2)$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件的积事件的概率，都等于各事件的概率之积，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

1.6.2 事件独立性的性质

(1) A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$，其中 $P(A)>0$.

(2)事件 A 与事件 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(3)若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也是相互独立的.

(4)若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍是相互独立的.

SHU HOU XI TI JIE XI 书后习题解析

1.写出下列随机试验的样本空间：

(1)记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2)生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

(3)对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

(4)在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

解 (1)$S=\left\{\dfrac{k}{n}\middle| k=0,1,2,\cdots,100n\right\}$，其中 n 为小班人数.

(2)$S=\{10,11,12,\cdots\}$.

(3)$S=\{00,100,0100,0110,0111,0101,1010,1011,1100,1101,1110,1111\}$，其中 0 表示次品，1 表示正品.

(4)$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

2.设 A,B,C 为三事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1)A 发生，B 与 C 不发生.

(2)A 与 B 都发生，而 C 不发生.

(3)A,B,C 中至少有一个发生.

(4)A,B,C 都发生.

(5)A,B,C 都不发生.

(6)A,B,C 中不多于一个发生.

(7)A,B,C 中不多于两个发生.

(8)A,B,C 中至少有两个发生.

解 (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(2)$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$.

(3)$A\cup B\cup C$.

(4)ABC.

(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$.

(7)$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

(8)$AB\cup AC\cup BC$.

3.A,B 是两事件,且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$.问(1)在什么条件下 $P(AB)$取到最大值,最大值是多少?(2)在什么条件下 $P(AB)$取到最小值,最小值是多少?

解 由 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$,又 $P(AB)\leqslant P(A)<P(B)\leqslant P(A\cup B)\leqslant 1$,知

(1)当 $A\subset B$ 时,$P(AB)$取到最大值,此时 $P(AB)=P(A)=0.6$.

(2)当 $A\cup B=S$ 时,$P(AB)$取到最小值,此时 $P(AB)=P(A)+P(B)-1=0.3$.

4.A,B,C 是三事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4,P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=1/8$.求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解 A,B,C 至少有一个发生,可表示为 $A\cup B\cup C$.又

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0\Rightarrow P(ABC)=0$$

故
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

5.在一标准英语字典中有 55 个由两个不相同的字母所组成的单词.若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列,求能排成上述单词的概率.

解 从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列,共有 $A_{26}^2=26\times 25$ 种取法,且每一种取法出现的可能性都相同.于是能排成上述单词的概率为 $p=\dfrac{11}{130}$.

6.在房间里有 10 个人,分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章,任选 3 人记录其纪念章的号码.(1)求最小号码为 5 的概率.(2)求最大号码为 5 的概率.

解 (1)任选 3 人记录其纪念章的号码,共有 C_{10}^3种记录结果,若使记录的 3 个号码中最小号码为 5,则 5 号必须被记录,然后再从 6 号到 10 号的纪念章中任选 2 人记录其号码,于是共有 $1\times C_5^2$种记录结果.所以最小号码为 5 的概率为 $p_1=\dfrac{1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$.

(2)同理可得最大号码为 5 的概率为 $p_2=\dfrac{1\times C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{20}$.

7.某油漆公司发出 17 桶油漆,其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶,在搬运中所有标签脱落,交货人随意将这些油漆发给顾客.问一个定货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客,能按所定颜色如数得到定货的概率是多少?

解 将 17 桶油漆随意发给此顾客,共有 C_{17}^9种发放结果,其中能按所定颜色如数得到定货有 $C_{10}^4C_4^3C_3^2$ 种发放结果.于是所求概率为

$$p=\frac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2\ 431}$$

8.在 1 500 个产品中有 400 个次品、1 100 个正品.任取 200 个.(1)求恰有 90 个次品的概率;(2)求至少有 2 个次品的概率.

解 (1)在 1 500 个产品中任取 200 个,共有 $C_{1\,500}^{200}$种取法.用 A 表示取出的产品中恰有 90 个

次品,则 A 中的样本点数为 $C_{400}^{90}C_{1\,100}^{110}$.因此

$$P(A)=\frac{C_{400}^{90}C_{1\,100}^{110}}{C_{1\,500}^{200}}$$

(2)用 B 表示取出的产品中至少有2个次品,则 $\overline{B}$ 表示取出的产品中至多有1个次品,$\overline{B}$ 中的样本点数为 $C_{1\,100}^{200}+C_{400}^{1}C_{1\,100}^{199}$.因此

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{1\,100}^{200}+C_{400}^{1}C_{1\,100}^{199}}{C_{1\,500}^{200}}$$

9.从5双不同的鞋子中任取4只,问这4只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

解法1 设 A 表示至少有两只鞋子成一双,则 $\overline{A}$ 表示没有两只鞋子成一双.$\overline{A}$ 包含的样本点数为 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$(从5双中取出4双,再从每双中各取一只),样本空间包含的样本点数为 C_{10}^4,故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法2 考虑一只一只将鞋取出,有先后次序,则所有取法为 $10\times9\times8\times7$ 种,而 $\overline{A}$(没有两只鞋子成双)包含的取法为 $10\times8\times6\times4$ 种,所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}$$

解法3 首先从5双鞋中取出一双,并将此两只全部取出,然后从剩下的4双鞋中任取2双,再从每双中各取一只,其取法有 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1$ 种,显然,这样取得的4只鞋恰好有一双成对,而4只鞋恰好有两双成对的取法有 C_5^2 种,于是 A(至少有两只鞋子成一双)的取法有 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2$ 种,所以

$$P(A)=\frac{C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法4 首先从5双鞋中取出一双,取法为 C_5^1,然后从剩下的8只鞋中任取两只,其取法为 C_8^2,但在 $C_5^1C_8^2$ 中,4只鞋恰好成两双的情况重复了一次,于是 A(至少有两只鞋子成一双)的取法为 $C_5^1C_8^2-C_5^2$ 种,所以

$$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

分析:本题的解法较多,上面给出了几种不同解法供大家比较.其中前两种解法利用了逆事件的概率公式,均使问题的求解大为简化;而最后一种解法是同学们在解题过程中最容易犯错误的一种解法.

10.在11张卡片上分别写上 probability 这11个字母,从中任意连抽7张,求其排列结果为 ability 的概率.

解 从11个字母中任意连抽7张,所有可能排列构成样本空间,其包含的样本点数为 $A_{11}^7=11\times10\times9\times8\times7\times6\times5$.用 A 表示其排列结果为 ability 这一事件,则事件 A 包含的样本点数为 $C_1^1C_2^1C_2^1C_1^1C_1^1C_1^1C_1^1=4$.所以

$$P(A)=\frac{4}{A_{11}^{7}}=0.000\,002\,4$$

11.将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去,求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

解 用 A_1,A_2,A_3 分别表示杯子中球的最大个数为 1,2,3 这三个事件.将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去共有 4^3 种放法,而 A_1 包含的样本点数为 $4\times3\times2=24$,即将 3 个球依次放入 4 个杯子中,且使得每个杯子至多有一个球;A_2 包含的样本点数为 $C_3^2C_4^1C_3^1$,即从 3 个球中任取 2 个随机放入 4 个杯子之一,然后将剩下的一个球随机放入剩余的三个杯子之一;A_3 包含的样本点数为 C_4^1,即将 3 个球放入同一杯子中.于是

$$P(A_1)=\frac{4\times3\times2}{4^3}=\frac{3}{8}$$

$$P(A_2)=\frac{C_3^2C_4^1C_3^1}{4^3}=\frac{9}{16}$$

$$P(A_3)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上,其中有 3 个铆钉强度太弱.每个部件用 3 只铆钉.若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上,则这个部件强度就太弱.问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

解 设 $A_i(i=1,2,\cdots,10)$表示发生第 i 个部件强度太弱的事件,则由题意知 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 两两互不相容,且

$$P(A_i)=\frac{1}{C_{50}^3},\quad i=1,2,\cdots,10$$

故所求概率为

$$P(\bigcup_{i=1}^{10}A_i)=\sum_{i=1}^{10}P(A_1)=\frac{10}{C_{50}^3}=\frac{1}{1\,960}$$

13.已知 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(\overline{AB})=0.5$,求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

解 $$P(A)=1-P(\overline{A})=0.7,\ P(AB)=P(A)-P(\overline{AB})=0.7-0.5=0.2$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(\overline{AB})=0.7+0.6-0.5=0.8$$

故

$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P[B\cap(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}$$

14.已知 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$,求 $P(A\cup B)$.

解 由 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$得

$$P(AB)=\frac{1}{12},\quad P(B)=\frac{1}{6}$$

故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

15.掷两颗骰子,已知两颗骰子点数之和为 7,求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法).

解法 1 用 A 表示“两颗骰子点数之和为 7”,用 B 表示“其中有一颗点数为 1”,则由条件概率公式知所求概率为