西安交大 考研

数学135系列

2007版

数学考研典型题

主编 龚冬保

数学二

- 500道典型例题 题型全面 方法独特 旁注点睛
- 1000道代表性练习题 今年新增全部详细解答
- 命题专家透彻分析近5年试题 科学预测方向
- 龚冬保教授免费答疑信箱 sx135_J07@126.com

西安交通大学出版社
XI' AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

2007版

典型题

（2007 版）

数学考研典型题

（数学二）

主　编　龚冬保

副主编　魏战线　张永怀　魏立线

西安交通大学出版社

·西安·

内容简介

本书自1999年问世以来，2007版是最新修订版，也是本书第8版.由于本书的例题和练习题精典，所以在本书问世后的7年中，每年均以高分覆盖当年考题，深受考生欢迎.例如2000年，书中36道题命中考题中非客观题(大题)27道(次)(数学一，8题49分；数学二，7题44分；数学三，6题41分；数学四，5题44分)；2001年覆盖考题66道(次)332分(数学一68分，数学二90分，数学三83分，数学四91分)；2002年覆盖考题338分(数学一87分，数学二91分，数学三81分，数学四79分)；2003年覆盖考题561分(数学一142分，数学二139分，数学三142分，数学四138分)；2004年覆盖数学一试卷136分；2005年(数学二分册)覆盖数学二135分；2006年覆盖数学二146分.

本书由四部分组成：第一部分是考卷分析：对新"考试大纲"问世后2004～2006年的数学考研考卷作了列表分析，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了；第二部分是应试对策：讲的是复习备考及身临考场的策略；第三部分是典型题选讲与练习：选了1500余道题，其中500多道例题(包含了往届的考题)，讲解采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了详细解答；第四部分是考题分析：龚冬保教授每年都有一篇专文，深入剖析当年的试题，指出命题的动向.

本书可供准备考研的读者使用，也可供大学数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学考研典型题—2007版(数学二)/龚冬保等编著.
—8版.—西安：西安交通大学出版社，2006.5
ISBN 7-5605-1968-7

Ⅰ.数… Ⅱ.龚… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第025299号

书　名	数学考研典型题—2007版(数学二)
编　著	龚冬保　魏战线　张永怀　魏立线
出版发行	西安交通大学出版社
地　址	西安市兴庆南路25号(邮编：710049)
电　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　刷	陕西丰源印务有限公司
字　数	564千字
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	18.5
版　次	2006年5月第8版　2006年5月第1次印刷
书　号	ISBN 7-5605-1968-7/O·224
定　价	28.60元

2007版前言

——从近几年考研数学试题谈起

屈指算来，本书已出到第8版了，由于贴近考研要求，受到了广大考生的欢迎。

每年考研结束后，总有不少考生主动告诉我们，他们复习考试的体会。今年有一位同学说，在考试中碰到一道大题很熟悉，后来想起来是在本书中看过的一道例题，因此很顺利地做出来了。有一些考生要我们说说本书的特色以及如何使用它，为此，我们从分析一些考研真题说起。

一、一题六解与六题一法

首先将2006年考研题中的一道大题作为例1，这道题至少可以用6种方法来解。

例1（2006，二、四） 确定A、B、C的值使

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)\quad(x\to 0)$$

解1 可以把题设等式的右边看作是左边函数的局部泰勒展式：则

$$A=[e^x(1+Bx+Cx^2)]'_{x=0}=1+B \tag{1}$$

$$0=[e^x(1+Bx+Cx^2)]''_{x=0}=1+2B+2C \tag{2}$$

$$0=[e^x(1+Bx+Cx^2)]'''_{x=0}=1+3B+6C \tag{3}$$

由(2)、(3)解得$B=-\frac{2}{3}$，$C=\frac{1}{6}$；代入(1)得$A=\frac{1}{3}$.

解2 将e^x用泰勒公式展开：$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. 这样做：

$$\begin{aligned}e^x+Bxe^x+Cx^2e^x&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+Bx+Bx^2+\frac{B}{2}x^3+Cx^2+Cx^3+o(x^3)\\&=1+(1+B)x+(\frac{1}{2}+B+C)x^2+(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C)x^3+o(x^3)\\&=1+Ax+o(x^3)\end{aligned}$$

比较x、x^2、x^3项的系数，同解1，得$A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{2}{3}$，$C=\frac{1}{6}$.

解3 等式变形后，由$e^x(1+Bx+Cx^2)-1=Ax+o(x^3)$.

得
$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+Bxe^x+Cx^2e^x}{x}=1+B$$

以$A=1+B$代入题设等式，得$e^x-1-Bxe^x-x-Bx+e^xCx^2=o(x^3)$.

故
$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+Bxe^x-x-Bx+e^xCx^2}{x^2}\\&=C+\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+Be^x-B+Bxe^x}{2x}=C+\frac{1}{2}+B.\end{aligned}$$

∴ $C=-\frac{1}{2}-B$. 代入题设等式得

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+Bxe^x-x-Bx-\frac{1}{2}x^2e^x-Bx^2e^x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+B(e^x-1)-Bxe^x-xe^x-\frac{1}{2}x^2e^x-Bx^2e^x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-3Bxe^x-2xe^x-\frac{1}{2}x^2e^x-Bx^2e^x}{6x}=-\frac{3B+2}{6}\end{aligned}$$

∴ $B=-\frac{2}{3}, A=\frac{1}{3}, C=\frac{1}{6}$.

以下的解 4、5、6 与解 1、2、3 相对应，不过将所给等式作个简单变形，请读者比较.

解 4 由题设等式两边同乘 e^{-x} 得

$$1+Bx+Cx^2=e^{-x}+Axe^{-x}+o(x^3)$$

$$B=(e^{-x}+Axe^{-x})'\Big|_{x=0}=-1+A$$

$$C=\frac{1}{2}(e^{-x}+Axe^{-x})''\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}(1-2A)$$

$$0=\frac{1}{6}(e^{-x}+Axe^{-x})'''\Big|_{x=0}=\frac{1}{6}(-1+3A)$$

∴ $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}$.

比较解 4 与解 1，由于对 $(e^{-x}+Axe^{-x})$ 求导比对 $e^x(1+Bx+Cx^2)$ 求导简单，故解 4 计算量比解 1 少，既省时间又不易出错.

解 5 将解 4 中第 1 个等式右边中的 e^{-x} 用泰勒公式展开，得

$$1+Bx+Cx^2=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+Ax-Ax^2+\frac{A}{2}x^3+o(x^3)$$

比较等式两端 x^3 的系数可得 $\frac{A}{2}-\frac{1}{6}=0$，由此 $A=\frac{1}{3}$，代入后再比较 x、x^2 的系数得

$B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}$.

解 6 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+Bx+Cx^2-e^{-x}-Axe^{-x}}{x}=0$ 得 $B=A-1$

代入后得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+Ax-x+Cx^2-e^{-x}-Axe^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{A(1-e^{-x})-1+e^{-x}+Axe^{-x}}{2x}+C$

$$=A+C-\frac{1}{2}=0.$$

以 $C=\frac{1}{2}-A$ 代入，由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+Ax-x+\frac{1}{2}x^2-Ax^2-e^{-x}-Axe^{-x}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{A-1+x-2Ax+e^{-x}-Ae^{-x}+Axe^{-x}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-2A-e^{-x}+2Ae^{-x}-Axe^{-x}}{6x}=\frac{1-3A}{6}=0.$$

同样得 $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}$.

一题多解是本书"典型题"的涵义之一：精选一些有代表性的题，一题多解，一题多变（参见本书 2.3 节）；题不解则已，解就解透. 因此读者在用本书时，要把例题当习题来做，不会时，再看解答；学会解题后再参考书中的旁注，总结一些解题方法. 通过这样做一道题，吃透一道题，扎扎实实练，"考研时就不会有难题"了.

例 2 是选自近几年考研试卷中的 6 道"难题".

例 2(1)（98，二） 设 $x\in(0,1)$，证明

① $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$； ② $\frac{1}{\ln2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

(2)（99，一） 设 $x>0$，证明 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

(3)（02，二） $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$ $(0<a<b)$.

(4)（04，一、二） 设 $e<a<b<e^2$. 证明 $\ln^2b-\ln^2a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

(5)（05，三、四） 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geqslant0$，$g'(x)\geqslant0$. 证明对任意 $a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1).$$

(6)（06，二、三、四） 证明当 $0<a<b<\pi$ 时，

$$b\sin b+2\cos b+\pi b > a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

解 这六道题看似很不相同，但它们却可以用相同的方法来做：即，先作辅助函数，再利用导数讨论其单调性与极值，从而获得相关不等式的证明.

下面示范性地做出其中的(3)和(5)两题. 其余几题留给读者作练习.

(3)证明左边不等式(即，$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$)比较简单，只要用拉氏中值公式即可：

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{a+\theta(b-a)}>\frac{1}{b}=\frac{a}{ab}>\frac{2a}{a^2+b^2}$$

下面来分析右边不等式(即，$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$). 为了求导方便，先将不等式变形并移项，只要证明

$$\sqrt{ab}(\ln b-\ln a)-(b-a)<0\quad(b>a>0)$$

为此作辅助函数：$f(b)=\sqrt{ab}(\ln b-\ln a)-(b-a)$，$b\in[a,+\infty)$(这里 b 是变量)

则 $f(a)=0$，$f'(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(\ln b-\ln a)+\sqrt{\frac{a}{b}}-1$，　$f'(a)=0$，$f''(b)=-\frac{\sqrt{a}}{4b^{3/2}}(\ln\frac{b}{a})<0$

因此 $f'(b)$ 单调减，$f'(b)<f'(a)=0$；故 $f(b)$ 单调减，从而有 $f(b)<f(a)=0$. 即为所要证明的结论.

(5) 令 $F(a)=\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(a)g(1)\quad a\in[0,1]$.

则 $F(1)=\int_0^1[g(x)f'(x)+f(x)g'(x)]\mathrm{d}x-f(1)g(1)=f(x)g(x)\Big|_0^1-f(1)g(1)=0.$

$$F'(a)=g(a)f'(a)-f'(a)g(1)=f'(a)[g(a)-g(1)]=f'(a)g'(\xi)(a-1)\leqslant 0.$$

$\xi\in(a,1)$. 故 $F(a)$不增，即 $F(a)\geqslant F(1)=0$. 便得所要证明的结论.

这样，“6 道难题”从解题的思路、方法，甚至步骤来看，它们竟没有区别！这是本书“典型题”的又一层涵义(见本书的 2.4 节). 在书中，我们归纳了不少类似的重要解题方法，读者如果掌握了这些方法，并且自己在解题中再发掘出一些好的解题方法与技巧，“考研就没有难题”了.

二、关于一些其它书上不大有的方法

研究生入学考试是具有选拔功能的水平考试，因此试题要比一般常规考试略难些. 经过我们对历年试卷的分析和研究，总结了一些其它书上不多见，而又是做考研题的有效方法，这是本书的突出特点. 比如例 1，六种解法都来自无穷小分析的基本方法. 通过分析，本书更突出“泰勒公式法”、“等价无穷小替换法”等方法，而泰勒公式法在求斜渐近线及许多证明题也都有简捷和巧妙的用法. 即使数学四未将泰勒公式列为考试要求，但在考试中照样可能涉及，若会用泰勒公式解就很简便. 例如，今年数学一、二、三、四的第(7)题都是完全相同的题，若用泰勒公式法来解就很简便，这里将其作为例 3.

例 3(06，一、二、三、四) 设 $y=f(x)$二阶可导，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量在 x_0 点的增量，Δy、$\mathrm{d}y$ 是相应函数的在 x_0 点增量和微分，若 $\Delta x>0$，则(　).

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$　　(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

解 1(泰勒公式法)　$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi)\Delta x^2\quad \xi\in(x_0,x)$

由 $f'(x_0)>0$，$f''(\xi)>0$ 及 $\Delta x>0$ 便易知应选(A).

若不会用泰勒公式，便只好用微分中值定理来解.

解 2(微分中值定理法)　$\mathrm{d}y>0$ 是显然的

$$\begin{aligned}\Delta y-\mathrm{d}y&=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\\&=[f'(x_0+\theta_1(x-x_0))-f'(x_0)](x-x_0)\\&=f''(\xi)\theta_1(x-x_0)^2>0\text{ 其中 }\theta_1\in(0,1),\xi\in(x_0,x_0+\theta_1(x-x_0)).\end{aligned}$$

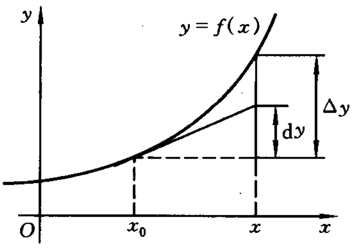
用两次拉氏中值公式方能选到(A).

巧妙的方法还有例 2 中提到的作辅助函数的方法，还有形数结合法，或代数、几何、分析结合的方法，等等. 这些方法掌握起来有一定的难度，通常一般书上不介绍，但是在解较为复杂的考研题时特别有效，往往可以化繁为简，节约解题时间，减少运算量，降低出错率. 所以，同学们在使用本书时，一定要反复练习，反复使用，努力掌握这些方法.

三、基本性与灵活性相结合

本书第 2 章介绍了“应试对策”，特别强调“**凡是基本题都会做，凡是会做的题都不错**”是考研的基本对策，因此强调加强基本训练；同时又强调在基本功训练基础上的灵活性的训练. 比如，前面的例 3，还可以有另两种灵活的解法.

例 3　解 3　由函数图像性态与导数的关系，可用图解. 由 $f'(x)>0$ 及 $f''(x)>0$ 知 $f(x)$ 单增向上凹. 如图便可知 $\Delta y>dy>0$；



例 3 解 3 图

例 3　解 4　更灵活一点，可令 $y=x^2$，$x_0=1$，则当 $x>1$ 有

$\Delta y=x^2-1=(x+1)(x-1)$，$dy=2(x-1)$，明显有 $\Delta y>dy>0$.

对于非客观题，也会有灵活的、简捷的方法. 例如今年的一道线性代数题.

例 4(2006，一、二、三、四)　设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解. (Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解　我们只介绍灵活方法

(Ⅰ)由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，知 $r(\boldsymbol{A})=1$，0 是其二重的特征值，立即知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. 故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 和 $\lambda_3=3$ 是所求的特征值.

(Ⅱ)又 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)\perp\boldsymbol{\alpha}_1$，因此相应于特征值 0 的两正交单位特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2=(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$. 那么对应 $\lambda_3=3$ 的单位特征向量可用“叉乘积”

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1\times\boldsymbol{\beta}_2=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})^{\mathrm{T}}$$

故 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\2/\sqrt{6}&0&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$. 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(读者不妨多做一个练习，即验证 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

为了帮助本书读者复习备考，我们在网上开通了一个答疑信箱(Email:kysx135_07@126.com)，由本书作者义务为读者答疑. 另外应读者要求，在本书 2007 版中我们为本书的练习题作了详细解答.

龚冬保

2006 春于西安交大

第 1 版前言

每当我们上了数学考研辅导课后，总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书. 在考生朋友不断地鼓励和期盼下，我们终于写成了此书，希望它能成为众多考生的一个好朋友，陪伴着他们去数学考场“潇洒走一回”.

通过目录，读者可以了解到本书的特点：第一部分（第 1 章）是考卷分析. 新的“考试大纲”是 1997 年开始执行的，数学一是工学类代表，数学三是经济类的代表. 我们对 1997 至 1999 三年的六份考卷一一作了列表分析. 通过这些表格，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了. 只要看看六张表格中的数字，就能知道每套考卷主要考些什么. 比如在数学能力方面，计算题基本上要占 50 分以上；在认知水平上，要求“理解”水平的题在一半左右；在难易程度上，中档题占一半左右，等等. 这样，您看了本书第 1 章应当对数学考试“心中有数”了. 进一步，如果您藉助我们设计的表格，按照自己的水平，去独立分析一两套试卷，那么就知道应当如何去准备这场考试了. 因此，第 1 章是作复习前准备必不可少的. 第二部分（第 2 章）是应试对策，讲的是复习迎考及身临考场的策略. 在有一定数学水平的基础上，能不能考出理想成绩，就要看您的发挥了，如何能发挥好，应试策略是关键. 而“策略”又是最容易被人们忽视的. “考试又不是打仗，讲什么策略”？ 岂不闻考场如战场，策略往往是成败的关键. 我们写这一章也是个尝试，希望能引起考生对策略问题的重视. 其实，对策是人们干什么事都应考虑的，所谓“优化运筹”不就是要寻找最优对策吗？ 有了好的复习迎考对策，在此基础上，订一个切实可行的计划，就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩. 第三部分（第 3～12 章）是典型题的选讲与练习，这是本书的主要部分. 我们选了 1 500多道题，其中 500 道例题，采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了答案与提示. 要想考个好成绩，关键是提高解题能力. 我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的. 我们不主张单纯“猜题”，认为只要内容覆盖面全，主要方法都练到了，就能考好，比“猜题”更稳妥，而且有利于提高数学素养；第四部分（第 13 章）是模拟题，数学一和数学三各两套. 在复习时，请先不要看模拟题，复习完临考前再用这两套题来进行两次“热身”. 用三小时做一套题，看看自己究竟如何，最后找找差距. 值得说明的是，本书中模拟题也有特色，它是以“从难、从严、从实战”出发设计的. 每套试卷比正式考卷更难些，综合题、应用题多些，读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成，并能获得 60 分以上的平均成绩，那么，上了考场，正常发挥也一定能考 60 分以上. 但您如果提前看过了题目，再去做效果就不好了.

以上是我们编写本书的主要想法，但总觉得编写仓促，书中可能会有不少的问题和漏洞，恳切地希望读者多多批评指正.

感谢西安交通大学出版社的支持，使这本书能以面世，感谢关心与鼓励我们的朋友们！

编者

1999. 5 于西安交大

（因龚冬保教授主编的《数学考研模拟考试试卷》已单独出版，故本书第四部分取消. ——出版者注）

目　录

第 1 章

考卷分析

依据教育测量学理论，本章对以往一些典型试题作了深入剖析，又对2003、2004年以及2005年数学二的3份试卷进行了定量分析，以使考研同学较深入了解考研试卷的主要特征.

1.1 分析的必要性

为什么要分析已考过的试卷?不少考生甚至觉得刚考过的题肯定不会再考了，对分析已考过试卷的必要性持怀疑态度，因此，我们先简单说一下分析的必要性.

考试是一种心理测量，一份考卷好比一杆"秤". 比如您上集市买菜，总要先看看秤一样，您准备考研究生，就得先分析考卷，看看在考试内容、考试难度、考题份量、认知和能力层次等等在每份考卷中是如何体现的，摸一摸近几年考卷的底，然后再制订适合自己的应试策略，从而减少复习迎考的盲目性.

对于考研试卷分析的方法，我们分为"微观分析"和"宏观分析"两种. 所谓"微观分析"，就是对试卷中每道试题都要认真作，边作边分析这道题的考点，解这个题的思路及主要方法是什么，这一类题在考研中的地位等等. 在"微观分析"的基础上进一步作"宏观分析"，我们的做法是，给每份试卷有一个表格，将这份试卷中的每道题的属性用数量表示在相应的空格之中，一份试卷一张表，只要看到表格中的数据，不必看具体的试卷本身，就可以了解这份试卷的考点分布、题型结构及整卷难度等等.

本章中对试题和试卷的分析，不仅仅是将分析结果告诉读者，更重要是希望读者学会本书介绍的分析方法，结合自己的实际，针对性更强地去独立分析自己准备投考的那一类考卷. 分析过去是为了预测未来作到对数学考研"心中有数".

1.2 微观分析举例

例 1.1 我们试比较2004年工学和经济学的两道相似的试题：

(1) (2004，一、二) 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0) > 0$，则存在 $\delta > 0$，使( ).

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 单调增. (B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 单调减.

(C) 对 $\forall x \in (0,\delta)$ 有 $f(x) > f(0)$. (D) $\forall x \in (-\delta,0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(2) (2004，三、四) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$，则下列结论中错误的是( ).

(A) 至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使 $f(x_0) > f(a)$. (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使 $f(x_0) > f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使 $f'(x_0) = 0$. (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使 $f(x_0) = 0$.

解 (1) 选(C) 由 $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} > 0$，知存在 $\delta > 0$，当 $0 < x < \delta$ 有 $f(x) - f(0) > 0$. 故(C) 正

确.

(2) 选(D),(A)(B) 的正确性即是(1) 之选项(C).至于(C) 的正确性可用连续函数的介值定理;故只有(D) 的结论是不对的,故选(D).

比较这两道题(1) 中仅有一点的导数 $f'(0)>0$ 的假设;(2) 中设 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续,而(2) 中的选项(A),(B) 均可用到(1) 的概念,即只要对导数概念清楚就行了.在(1) 中若假设 $f'(x)$ 在 0 点连续,那么选项(A) 也是对的.证明是这样.由 $f'(x)$ 连续,且 $f'(x)>0$ 故存在 $\delta>0$,在$(0,\delta)$ 上 $f'(x)>0$,因此 $f(x)$ 在$(0,\delta)$ 上单调增.因此(2) 的假设太强:用 $f'(x)$ 的连续性由 $f'(a)>0$ 知存在 $\delta_1>0$,在$(a,a+\delta_1)$ 上 $f(x)$ 单增.当然有 $f(x_0)>f(a)$;由 $f'(b)<0$ 知存在 $\delta_2>0$,在$(b-\delta_2,b)$ 上 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调减,有 $f(x_0)>f(b)$ 十分简单.因此(1) 题要难些,且选项(A) 有迷惑性,作这样的题要求概念清楚,并直接证明(C) 的正确性;而(2) 较简单,用排除法较好因为(A)、(B)(C) 是正确的结论容易证明.

顺便指出如将(2) 题的假设改成 $f'(x)$ 在$[a,b]$上存在.其它不变那么选项(A)、(B)、(C) 中结论的正确性正是本书例 4.34(达布中值定理) 的证(1).读者不妨查读一下,是完全一样的.

至于(2) 的选项(D) 的结论未必正确可以看一个很简单的例子:设 $f(x)=2-x^2$.在$[-1,1]$上,$f'(-1)=2>0$,$f'(1)=-2<0$,但在$[-1,1]$上 $f(x)\geqslant 1>0$,不存在 0 点.

在考场上作这两个题用不了几行,但剖析起来,尤其是对照剖析,使我们对极限、导数及连续性、单调性都有更深刻的领会,甚至变化一下(2) 题,还可引领到"达布中值定理"这就是举一反三,触类旁通的意思,只限于会不会做这两道题去做题,就不会有多大的收获.这是我们说的微观分析的方法.

例 1.2 (2001,一) 设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在. (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在. (D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

解 选(B).本题是概念性较强的题.只要对导数的定义有透彻理解,就能容易用排除法排除不正确选项.如,由定义知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$.而选项(A)、(C) 中,相当于 x 的因式是 h^2,只能取正数趋于 0,不能作导数存在充要条件;而选项(D) 中的极限存在与 $f(0)$ 的取值无关.也不能作可导充要条件.因而只有(B) 是正确的选项.不必举反例,也不要会证明选项(B) 的正确性.

作为平时的练习,深入分析本题,则可以有许多启发.首先,我们来举反例否定三个不正确选项.对(A)、(C),可用同一反例:$f(x)=|x|$,满足 $f(0)=0$,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\dfrac{1}{2}$ 存在及 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=0$ 存在,但 $f(x)$ 在 0 点不可导,说明(A)、(C) 选项均不对;对于(D),令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 也有 $f(0)=0$,$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在,而 $f(x)$ 在 0 点间断,故不可导.因此(D) 也被排除.仿此,读者还可自己举出与上面不同的反例.顺便提及,本书的第 4 章之例 4.3、4.4、4.5 及其注释,与本题的考点及分析问题方法以及在那里我们列举的反例,均与本题是一致的.由于导数概念的重要性,此书的每一版都保留了这几个题.读者可对比着看,以加深对导数概念及其存在的充分条件.必要条件及充要条件的理解.

其次,我们来证明选项(B) 的正确性.

必要性. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}=-f'(0)$ 存在.

充分性.对任意 $x\to 0$,取 $|x|<1$,令 $1-e^h=x$.或 $h=\ln(1-x)$.则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1-x)}$ 于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在即 $f'(0)$ 存在.

细心的读者会问 由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}$ 令 $1-\cos h=x$,则 $x\to 0$.不是也有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{2}$ 存在吗.不是同样证明了选项(A) 也是正确的吗?!问题在哪里?!原来,令 $1-\cos h=x$,由 $h\to 0$,只能有 $x\to 0^+$.因此,我们知道,选项(A) 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右导数存在的充要条件,因此,我们举

反例只要举 $f(x)$ 在 $x=0$ 点右导数存在而导数不存在的例子；进一步看选项(C)，我们知道当 $h\to 0$ 时，$h-\sin h$ 是与 h^3 同阶的无穷小，因而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}$. 只要当 $h\to 0$ 时，$h\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 的极限存在. $f'(0)$ 可以是无穷大量. 于是令 $f(x)=x^{2/3}$. 显然 $f(0)=0$，$f'(0)=\infty$ 不存在. 但 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-\sin h)^{2/3}}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{h-\sin h}{h^3}\right)^{2/3}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2/3}$ 存在.

至于选项(D)，如果我们令 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是有理数}\\ 1, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$，那么，总有 $f(0)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在，但 $f(x)$ 处处间断！

像这样去分析一道题，必定能作到举一反三、触类旁通，做一个题胜似做一类题.

分析以往的试题，主要应从其考点，解题的思路与方法方面作深入的探讨，这样会发现，以往考题有许多是相同的.

例 1.3　(1)(2000，二)　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\6&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$ ________.

(2)(2001，一)　设 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

(3)(2002，二)　已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$.

(i) 证明 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆；

(ii) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解　我们只要做第(3)题，读者可仿此做(1)(2)两题.

(3)(i) 证. 用 $\boldsymbol{A}$ 左乘所给等式两边得　$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$.　$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}=0$，要证 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，故设法分出 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$ 的因式即得　$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E}$.　或 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E}$.

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$.

(ii) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}$，用分块矩阵的方法易得

$$8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}-2&2&0\\-1&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

而 2003 年数学四和数学二、2004 年数学一、二又考了三道类似题.

例 1.4　(1) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}$ 及 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$ 及 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

解　(3) 由 $|\boldsymbol{A}|=3$，将已知等式两边右乘以 $\boldsymbol{A}$ 得　$3\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.　$3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.

取行列式得 $3^3|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{9}$.

(2) 题请读者自行完成.

像这样从考点、思路、方法去分析,可将许多看似不一样的题归之为同一类的题.

再看几道考点、思路、方法相同的高数题.

例 1.5 (2001,三、四与 1991,一、二)

(1) (2001,三) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(1) = k\int_0^{1/k} xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\ (k>1)$,证明存在 $\xi \in (0,1)$,使 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

(2) (2001,四) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(1) = 3\int_0^{1/3} e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$,证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

(3) (1991,一、二) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,且 $3\int_{2/3}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(0)$. 证明存在 $c \in (0,1)$ 使 $f'(c) = 0$.

解 这三道题从考点、思路、解法上也是一样的题.我们只要解其中一题,其余两题读者一定能做.

(1) 由 $f(1) = k\int_0^{1/k} xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$,便知其第一步用积分中值定理.由积分中值定理得,存在 $\eta \in [0,\frac{1}{k}]$. 使 $f(1) = \eta e^{1-\eta}f(\eta)$. 再从要证明的结果知,将用罗尔定理,区间是$[\eta,1] \subseteq [0,1]$,辅助函数便是 $F(x) = xe^{1-x}f(x)$. $F(x)$ 显然在$[\eta,1]$上连续,在$(\eta,1)$可导,且 $F(1) = f(1) = F(\eta) = \eta e^{1-\eta}f(\eta)$. 故由罗尔定理知.存在 $\xi \in (\eta,1) \subset (0,1)$,使 $F'(\xi) = 0$. 而

$$F'(x) = e^{1-x}f(x) - xe^{1-x}f(x) + xe^{1-x}f'(x)$$

于是 $F'(\xi) = 0$ 即 $\xi f'(\xi) - (\xi - 1)f(\xi) = 0$,也就是

$$f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi).$$

例 1.6 (2003,三) 设 $f(x)$ 在$[0,3]$连续,$(0,3)$内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2) = 3$,$f(3) = 1$. 证明存在 $\xi \in (0,3)$,使 $f'(\xi) = 0$.

证 由已知 $\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1$,及 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续,故 $f(x)$ 在$[0,2]$上有最大值和最小值 M 和 m,从而有 $m \leqslant \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1 \leqslant M$,同介值定理知,存在 $\eta \in [0,2]$,使 $f(\eta) = f(3) = 1$. 于是 $f(x)$ 在$[\eta,3]$上满足罗尔定理条件,由罗尔定理知,存在 $\xi \in (\eta,3) \subset (0,3)$ 使 $f'(\xi) = 0$.

与例 1.6 比较之(1) 设 $f(1) = \int_0^{1/k} xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x / \frac{1}{k}$,本题是 $f(3) = \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}$,它们都是一个端点的值等于函数在某区间的平均值.积分中值定理本质上就是平均值定理,因此,理解透了,这两题也是相同的.这就是我们作微观分析的一种主要方法.

1.3 宏观分析

我们用下面的表格,将考卷的一些特征数量化,通过一些数字的简单计算,就可以了解每套考卷的特点和各套考卷的共性.值得说明的是,我们这种分析不是考后的统计分析,考后的统计分析能评价试卷的"好与差",主要提供考试管理人员、命题教师参考,当然,也可以提供考生参考.但那种分析要有足够的样本,才可以作到分析的客观性.我们的这种分析是根据自己的教学经验,对考生水平的估计而作出的.虽说主观,却能结合考生实际,来解释客观事实,读者如能将这种分析和相应的统计分析参照对比,就更完美了.

先对数据各项目作个简单说明.

各课程的章目是按考研大纲所列内容的次序排列的,我们将章名限制在四个字以内,有的章的内容不能用四个字概括则略写.

认知层次一栏中的"简用"是指简单应用,表示能将有关知识在另一个新环境中进行应用;"应用"是指复杂应用,表示能将有关知识在两个以上新环境中进行应用.

"期望"是指整卷的难度期望分,其计算方法见表 1.1 后面的难度分析.表格中的"分值"填写的是试卷中各章内容在各个类别中所占的分数.

(1) 2004 年数学二试卷

表 1.1　2004 年数学二分析统计表

课程	分值 类别 / 章目	数学能力					认知层次					难　度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
高等数学	函数极限		10		14			24					4	13	7		24
	一元微分	8	4	12	7			15	4	12			4	10	5	12	31
	一元积分	4	4		8	12		10	18				8	12	8		28
	多元微积	4	14				4	14				8		10			18
	微分方程	4	4			11	4	4	11			4		15			19
线性代数	行列式																
	矩　阵	4	4		2			8		2			8	2			10
	向　量				2					2				2			2
	方程组		9						9					9			9
	特征向量			9					9						9		9
	合计	24	49	21	33	23	8	75	51	16		12	24	73	29	12	期望 87

从表 1.1 看出：

1. 内容分布　覆盖面大.
2. 数学能力　计算题量大、综合题明显增加.
3. 认知层次　尚好.绝大多是理解类的题.

4. 难度　分布较合理，期望分这样算：从易到难各档的期望分分别为 90%、75%、60%、35% 和 20%，因此本试卷期望分为 $90\% \times 12 + 75\% \times 24 + 60\% \times 73 + 20\% \times 29 + 20\% \times 12 = 87$ 分，计算量比 2003 年略少些，因此时间长度稍好些，估计平均分在 72 分左右.

(2) 2005 年数学二试卷

表 1.2　2005 年数学二分析统计表

课程	分值 类别 / 章目	数学能力					认知层次					难　度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
高等数学	函数极限	4	4	5	7			13	7				4	6	10		20
	一元微分		8	7	13	4	8	16	8				8	17		7	32
	一元积分		4		21			10	15				4	11	10		25
	多元微积		17			10		23	4					14	13		27
	微分方程		4			12	4		12				4		12		16
线性代数	行列式				2				2					2			2
	矩　阵	4			2			4	2				4	2			6
	向　量		9		2			9	2					9	2		11
	方程组		9						9						9		9
	特征向量				2				2						2		2
	合计	8	55	12	49	26	8	79	63				24	61	58	7	期望 79.3

从表 1.2 看出:

1. 内容分布　较合理.
2. 数学能力　综合题明显多.
3. 认知层次　理解的题类多.
4. 难度　期望分为 79.3,这是由于综合题多,显得题"难些",估计平均分在 65 分左右.

(3) 2006 年数学二试卷

表 1.3　2006 年数学二分析统计表

课程	分值/类别/章目	数学能力					认知层次					难度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
高等数学	函数极限		14		8		4	8	10			4	8	10			22
	一元微分	8	4	10	13		4	14	17				8	11	6	10	35
	一元积分	4	14		7			20	5				6	14	5		25
	多元微积	4	14		10			28					4	24			28
	微分方程	4	4		2			10					4	6			10
线性代数	行列式																
	矩　阵	4	4					8						8			8
	向　量	4						4						4			4
	方程组				9				9						9		9
	特征向量			9				9							9		9
	合计	28	54	19	49		8	111	41			4	30	77	29	10	期望 84.5

从表 1.3 看:

1. 内容分布　较好.
2. 数学能力　综合题达 49 分. 这是一个方向值得注意.
3. 认知层次　一般尚可.
4. 难度　期望分 84.5,计算量不大,这个分与平均分估计不相上下.

1.4　小结与预估

上面 3 张统计表,把 3 年试卷的考试内容、考核的能力、认知层次及难度等,都数量化了. 这些数据不但清楚地告诉我们近年来数学考研试卷的结构,而且,如果我们进一步分析这些数据,并将宏观与微观相结合,还可以获得更多的有益信息,预测数学考研题的走向,对准备未来的考试心中有数. 下面是我们的简单小结与预估.

1. 考试内容

各考卷最大共同点是内容覆盖面大. 当然,总有些内容是年年都能考到的,也有些是偶尔考到的,比如高等数学中的定积分在力学、物理学方面的应用,实际的极值问题等的考题很少出现但 2002 年出现了求压力的题. 对如线性代数中的行列式,也不大单独出题.

2. 数学能力

计算题最多,而在近 3 年的试卷中,综合题的比例明显要高. 大多数综合题和应用题都要通过计算来完成,因此,**强化综合运用数学知识能力及计算基本功的训练是最重要的.**

例 1.7　(2000,一、二) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有