華東師范大學函授教材

解析几何

——補充教材——

孫 澤 瀛編

華東師範大學出版

解析幾何補充教材

（内部发行·仅供参考）

編　者　孙　泽　浤
出版者　华东师范大学
（上海中山北路三六六三号）
发行者　新华書店上海邮購書店
印刷者　上海市印刷三厂
开本 787×1092 耗 1/25　印張 2 2/25　字数 43,700
1957年1月第一版　1957年1月第一次印刷
印数 1—1500
工本費 ￥0.47

第六章　二次曲面的各種類型

本章系討論二次曲面的各种类型，所謂二次曲面，指的是那种动点的軌跡，它的坐标(x,y,z)满足一个二次方程，这里的討論，主要限定于二次曲面各种类型的定义与形狀。

§81. 橢圓面

在坐标面 XOZ 上的橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

圍繞 z 軸旋轉描出一个曲面，它的方程应当是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1。$$

因为这曲面是由橢圓旋轉而成的，所以称为旋轉橢圓面。如果用坐标面 XOY 的平行平面 $Z=k$ 來截这曲面的話，其截綫是圓；它的方程是

$$(81,\ 1)\qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{k^2}{c^2},\quad z=k;$$

它的半徑等于 $a\sqrt{1-\dfrac{k^2}{C^2}}$。

現在用坐标面 XOY 的平行平面 $z=k$ 上一个橢圓

$$(81,\ 2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2},\quad z=k$$

來代替(81，1)的圓。当 k 的值从 $-c$ 变到 $+c$ 时，这橢圓就描出一个曲面，这曲面的方程可以(81，2)的二式中消去而得到：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^9}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}\text{或}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1。$$

满足方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{81, 3}$$

的点軌跡称为椭圓面，因为它的方程只含有变数 x,y,z 的乘方，所以它对于每一坐标平面、每一坐标軸以及原点全对称的。

用 $y=z=o$ 代進方程，求得椭圓面和 x 軸的交点是 $(\pm a,o,o)$。用 $z=x=o$ 代進方程，求得它和 y 軸的交点是 $(o,\pm b,o)$，同样可求得它和 z 軸的交点是。$(o,o\pm c)$。这些交点称为椭圓面的頂点。坐标軸上二个頂点所夾的綫段称为椭圓面的主軸，它們的長度分別等于 $2a$，$2b$，与 $2c$。如果 $a>b>c>o$，那么，長度等于 $2a$ 的主軸称做椭圓面的長軸，長度等于 $2b$ 的主軸称做中軸，長度等于 $2c$ 的主軸称做短軸。三条主軸的交点称做椭圓面的中心。

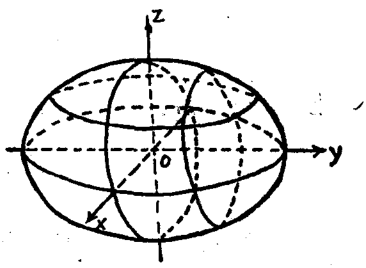

圖 1

椭圓面和平面 $z=k$ 所成的截綫是一个椭圓，它的方程是

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}=1,\quad z=k。$$

这个椭圓的主軸之長分別是 $2a\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}}$ 与 $2b\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}}$ 当 $|k|$ 从 o 增加到 c 时，截綫所成的椭圓，其主軸逐漸縮小；当 $|k|=c$ 时，椭圓变成一个点。当 $|k|>c$，椭圓是虛的，因为它的軸是虛的。从这里我們看出椭圓面完全处于平面 $z=c$ 与平面 $z=-c$ 之間。

椭圓面和平面 $y=k'$ 所成的截綫也是一个椭圓，它的方程是

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}=1,\quad y=k'。$$

这椭圆面 $|k'|<b$ 时，是实的；当 $|k'|=b$ 时化做一点；当 $|k'|>b$ 时；是虚的。

同样，椭圆面和平面 $x=k''$ 所成的截綫仍旧是一个椭圆，它的方程是

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k''^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{k''^2}{a^2}\right)}=1\ x=k''。$$

这个椭圆当 $|k''|<a$ 时，是实的；当 $|k''|=a$ 时，化为一点；当 $|k''|>a$ 时，是虚的。

从上面的結果看來，椭圆面完全被包含在一个長方体里，这長方体由六个平面；$x=a$, $x=-a$, $y=b$, $y=-b$, $z=c$, $z=-c$ 所組成的。它的形狀如圖 1。

椭圆面有几种特殊情况：

(i) $a=b>c$，这时椭圆面的方程变为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

这种曲面和平面 $z=k$ 的截綫是一个圆，它是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 繞短軸所成的旋轉曲面，称为扁球面。

(ii) $a>b=c$，这时椭圆面的方程变为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1。$$

这种曲面和 $x=k'$ 的截綫是一个圆，它是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 繞長軸所成的旋轉曲面，称为長球面。

(iii) $a=b=c$，这时椭圆面的方程变为

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

这是半徑等于 a，中心原点的球面。

还有一种椭圆面叫虚椭圆面，它是由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所定义的，因为三个实数的平方和不可能是負值，所以在这种曲面上沒有实点，因此也画不出來。

§82. 單葉雙曲面

在坐标面 xoz 上的双曲綫

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

圍繞 Z 軸旋轉描出一个曲面，它的方程应当是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1。$$

因为这曲面是由双曲綫旋轉而成的，而且所成的曲面是一个不間断的整体，所以称做單叶旋轉双曲面。如果用坐标面 xoy 的平行平面 $Z=k$ 來截这曲面的話，其截綫是圓；它的方程是

(82, 1) $$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1+\frac{k^2}{c^2},\quad z=k;$$

它的半徑等于 $a\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}$。

現在用坐标面 xoy 的平行平面 $z=k$ 上的椭圓

(82, 2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2},\quad z=k;$$

來代替 (82, 1)的圓。当 k 值在 $(-\infty, +\infty)$ 間变化时，这椭圓就描出一个曲面，它的方程可以(82, 2)的二式中消去而得到：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2},\ \text{或}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1。$$

满足如下形式的方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{82, 3}$$

的点軌跡称为單叶双曲面，它对于每一坐标平面，每一坐标軸以及原点全是对称的。

这种曲面和平面 $z=k$ 所成的截綫是一个椭圓，它的方程是

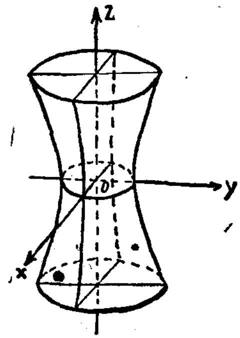

圖 2

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{b^2}{c^2}\right)}=1\,,\ z=k,$$

这个椭圓对于任何 k 的实数値都是实的，它的主軸之長分别等于

$$2a\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}},\quad 2b\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}};$$

当 $k=o$ 时，椭圓的軸最短；当 $|k|$ 增大时，椭圓的軸也無限地增大。这时，沒有一个 k 的数値可以使椭圓脫化为一点。

这种曲面和平面 $y=k'$ 所成的截綫是一条双曲綫，它的方程是

$$\frac{x^2}{a\left(1-\frac{k'^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c\left(1-\frac{k'^2}{c^2}\right)}=1,\qquad y=k'$$

当 $|k'|\angle b$，这条双綫以直綫：$z=o$，$y=k'$ 为实对称軸，以直綫：$x=o$，$y=k'$ 为虛对称軸。实軸与虛軸之長分别等于 $2a\sqrt{1-\frac{k'^2}{c^2}}$，$2c\sqrt{1-\frac{k'^2}{c}}$，当 k' 由 o 增大至 b 时，双曲綫的主軸逐漸縮小到 o。当 $|k'|=b$时，双曲綫的方程不能再寫成如上的形式，这时变为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=o\qquad y=|b|$$

这个式子表示四条直綫的方程：各为

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=o,\quad y=b;\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=o,\ y=b$$

与
$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=o,\quad y=-b,\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=o,\ y=-b$$

当 $|k'|>b$时，双曲綫的方程可寫成

$$\frac{z^2}{c^2\left(\frac{k'^2}{c^2}-1\right)}-\frac{x^2}{a^2\left(\frac{k'^2}{t^2}-1\right)}=1\quad y=k'$$

这条双曲綫以直綫：$x=o,\ y=k'$ 为实对称軸，以直綫；$z=o,\ y=k'$为虚对称軸；其实軸与虚軸之長分别等于 $2c\sqrt{\frac{k'^2}{b^2}-1},\ 2a\sqrt{\frac{k^2}{b}-1}$。当 k' 增大时，軸長無限地增大。

單叶双曲面和平面 $x=k''$ 所成的截綫也是一条双曲綫，它的方程是

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k''^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{k''^2}{a^2}\right)}=1\quad x=k''$$

当 $|k''|<a$ 时，这条双曲綫以直綫：$z=o,x=k''$ 为实对称軸，以直綫：$y=o,x=k''$ 为虚对称軸。当 $|k''|=a$ 时，双曲綫的方程变成

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=o\qquad x=|a|$$

这个式子表示四条直綫的方程，分别为

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=o,\quad x=a;\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=o,\quad x=a$$

与
$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=o,\quad x=-a;\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=o,\quad x=-a.$$

当 $|k''|>a$时，双曲綫的方程可寫成

$$\frac{z^2}{c^2\left(\frac{k''^2}{a^2}-1\right)}-\frac{y^2}{b^2\left(\frac{k''^2}{a^2}-1\right)}=1, \quad x=k''$$

这条双曲綫以直綫：$y=o, x=k''$ 为实对称軸，以直綫：$z=o, x=k''$ 为虚对称軸：当 $|k''|$ 增大时，双曲綫的实軸与虚軸之長無限地增大。

根据以上的分析，單叶双曲面的形狀如圖 2

單叶双曲面有一种特殊情况，即 $a=b$ 时，它的方程成为

(82, 4) $$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1。$$

这是一种旋轉曲面，由双曲綫：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 繞虚軸：$x=o, y=o$ 所成的。

單叶双曲面有一樁值得注意的性質，就是它上面有二組直母綫。單叶双曲面的方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 可以分解为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

因此

(82, 5) $$\frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}}=\frac{1+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}},$$

或

(82, 6) $$\frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}=\frac{1+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}。$$

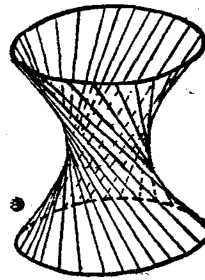

圖 3

(82, 5) 的公比用 α 來表示，那么

(82, 7) $$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right)1-\frac{y}{b}=\alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)$$

对于每一个 α 之值，表示一条直綫，这条直綫全部在單叶双曲面上，因为直綫上每点的坐标滿足（82,5），也就是滿足單叶双曲面的方程。反之，过曲面上的每一点，有方程（82,7）所表示的一直綫，这因为曲面上每一点的坐标滿足(82,5)，因此也滿足(82,7)。(82,7)所表示的一組直綫称为單叶双曲面直母綫組，α 是参数，組内的某一条直綫称为曲面的母綫。

同样(82,6)的公比如用 β 來表示，那么

$$(82,\ 7)\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad 1+\frac{y}{b}=\beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z'}{c^2}\right),\beta;\text{参数。}$$

对于每一 β 值表示一条直綫，这一組直綫組成單叶双曲面的另一組直母綫。所以單叶双曲面有兩組直母綫。过曲面上每一点，每一組有一条母綫通过它。

§83. 雙葉雙曲面

在坐标面 XOZ 上的双曲綫。

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

圍繞 X 軸旋轉描出一个曲面，它的方程应当是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1\text{。}$$

因为这曲面是由双曲綫旋轉而成的，而且所成的曲面是二个分离的單体組成，所以称做双叶旋轉双曲面。如果旋轉軸 OX 的垂直平面（即平行于坐标面 YOZ 的平面）$x=k''$ 來截这曲面的話，其截綫是圓；它的方程是

$$(83,\ 1)\qquad \frac{y^2+z^2}{c^2}=\frac{k''^2}{a^2}-1,\quad x=k'';$$

它的半徑等于 $c\sqrt{\frac{k''^2}{a^2}-1}$。

現在用坐标面 yoz 的平行平面 $x=k''$ 上的橢圓

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k''^2}{a^2}-1 \quad x=k'' \tag{83, 2}$$

來代替(83,1)的圓。当 k'' 值在范圍 $|k''|>a$ 内变动时，这橢圓就描出一个曲面，它的方程可以从(83,2)的二式中消去 k'' 而得到：

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \quad 或 \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1。$$

满足如下形式的方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{83, 3}$$

的点軌跡称为双叶双曲面。它对于每一坐标平面，每一坐标軸以及原点全是对称的。

这种曲面和平面 $z=k$ 所成的截綫是一条双曲綫、它的方程是

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}-\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}1=,$$

$z=k,$

这条双曲綫的实对称軸是$y=o$, $z=k$;其实軸与虚軸之長分别为

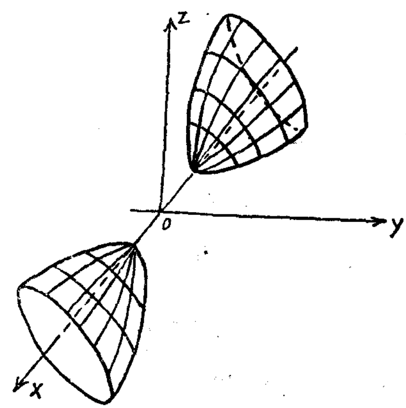

圖　4

$2a\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}$ 与 $2b\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}$，当 $k=o$ 时，軸長最短，即 $2a$与 $2b$，当 $|k|$ 增大时，軸長無限地增大。

曲面和平面 $y=k'$ 所成的截綫也是双曲綫，方程为

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{k'^2}{b^2}\right)}=1, \quad y=k'$$

这条双曲綫的实对称軸是 $z=o,\ y=k'$；虚对称軸是 $x=o,\ y=k'$；当 $k'=o$ 时，它的軸長分别等于 $2a$ 与 $2c$；当 $|k'|$ 增大时，軸長無限地增大。

曲面和平面 $x=k''$ 所成的截綫是椭圓

$$\frac{y^2}{b^2\left(\frac{k''^2}{a^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{k''^2}{a^2}-1\right)}=1,\quad x=k''。$$

当 $|k''|>a$ 时，它是实椭圓；当 $|k''|=a$ 时，它成为一点(点椭圓)；当 $|k''|<a$ 时，它是虚椭圓。

从以上的分析，得出双叶双曲面的形狀如圖 4

双叶双曲面也有一种特殊情况，即 $b=c$ 时曲面成为旋轉曲面，是由双曲綫

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=o$$

繞实軸；$y=o,\ z=o$ 而作成的。

§84. 椭圓抛物面

在坐标面 yoz 上的抛物綫

$$y^2=2nz$$

圍繞 z 軸旋轉描出一个曲面，它的方程应当是

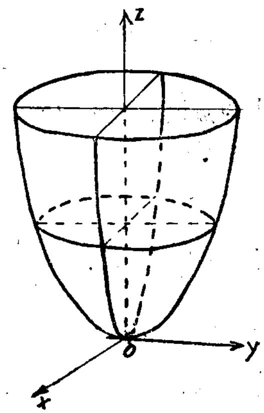

圖 5

$$x^2+y^2=2nz。$$

因为这曲面是由抛物綫旋轉而成的，所以称为旋轉抛物面。如果用旋轉軸 $0z$ 的垂直平面 $z=k$ 來截这曲面的話，其截綫是圓；它的方程是

$$(84,1)\qquad x^2+y^2=2nk,\quad z=k;$$

它的半徑等于$\sqrt{2nk}$。

現在用坐标面 Xoy 的平行平面 $z=k$ 上的橢圓

$$(84,\ 2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2nk,\quad z=k$$

來代替（84，1）的圓。当 k 变动时，这橢圓就描出一个曲面，它的方程可以（84，2）的二式中消去 k 而得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2nz。$$

滿足方程

$$(84,\ 3)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2nz$$

的点軌跡称为橢圓拋物面。它对于坐标平面 $x=0$ 与 $y=0$ 是对称的，可是对于平面 $z=0$ 不成对称。它通过坐标原点；而且当 $n>0$ 时，整个曲面在平面 $z=0$ 的正側，当 $n<0$ 时，整个曲面在 $z=0$ 的負側。以下只就 $n>0$ 進行討論，因为 $n<0$ 时，祇要曲面对于平面 $z=0$ 反射一回就和 $n>0$ 的情况一样了。

曲面和平面 $z=k$ 所成的截綫是橢圓

$$\frac{x^2}{a^2(2nk)}+\frac{y^2}{b^2(2nk)}=1,\quad z=k。$$

它的長軸与短軸之長各等于 $2a\sqrt{2nk}$ 与 $2b\sqrt{2nk}$。如果 $k<0$，橢圓是虛的；$k=0$，橢圓成为一点；$k>0$，橢圓是实的，它的軸長随 k 值加大而無限地增大。

曲面和平面 $y=k'$ 所成的截綫是拋物綫

$$\frac{x^2}{a}=2nz-\frac{k'^2}{b^2}\quad y=k'$$

这种拋物綫随 k' 值之不同，位置也不同，可是它們是同形的（即可以

重合的)。当 k' 增大时，抛物綫的頂点逐漸离开平面 $y=0$，但因为頂点俱在平面 $x=0$ 上，同时也在橢圓抛物面上，所以頂点在曲面与平面 $x=0$ 的截綫上，也就是說頂点的軌跡是另一抛物綫；

$$\frac{y^2}{b^2}=2nz, \quad x=0$$

曲面和平面 $x=k''$ 所成的截綫是同形的抛物綫群

$$\frac{y^2}{b^2}=2nz-\frac{k''^2}{a^2}, \quad x=k''$$

它們頂点的軌跡是另一条抛物綫: $\frac{x^2}{a^2}=2nz, \quad y=0,$

从以上的分析，得出橢圓抛物面的形狀如圖 5

这种曲面有一种特殊情况，即 $a=b$ 时，們成为旋轉曲面，是由抛物綫

$$\frac{x^2}{a^2}=2nz, \quad y=0$$

繞 z 軸而成的

§85. 雙曲抛物面

用坐标面 Xoy 的平行平面 $z=k$ 上的双曲綫

(85, 1)
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2nk, \quad z=k$$

來代替(84, 1)的圓；当 k 变动时，这双曲綫就描出一个曲面，它的方程可以(85, 1)的二式中消去 k 而得到:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2nz。$$

滿足方程

(85, 2)
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2nz$$

的点軌跡是双曲拋物面。它对于坐标平面 $x=0$ 及 $y=0$ 是对称的，但对于 $z=0$ 不对称。为了討論方便起見，不妨如前節一样假設 $n>0$。

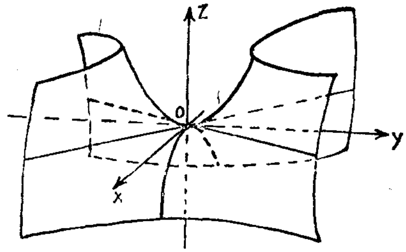

圖 6

曲面与平面 $z=k$ 所成的截綫是双曲綫

$$\frac{x^2}{a^2(2nk)}-\frac{y^2}{b^2(2nk)}=1, \quad z=k,$$

当 $k>0$，这条双曲綫以直綫：$x=0, z=k$ 为实对称軸；以直綫；$y=0, z=k$ 为虛对称軸。当 $k<0$ 时，双曲綫以直綫 $y=0$，$z=k$ 为实对称軸；以直綫；$x=0$，$z=k$ 为虛对称軸。当 $|k|$ 增大时，实軸与虛軸之長也随着增大。当 $k=0$ 时，双曲綫脫化为二直綫 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$，$z=0$；$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0, z=0$。

曲面与平面 $y=k'$ 所成的截綫是同形的拋物綫群

$$\frac{x^2}{a^2}=2nz+\frac{k'^2}{b} \quad y=k'。$$

它們頂点的軌跡作成另一条拋物綫；$\frac{y^2}{b^2}=-2nz, x=0$。

曲面与平面 $x=k''$ 所成的截綫也是同形的拋物綫群

$$\frac{y^2}{b^2}=-2nz+\frac{k''^2}{a^2}, \quad x=k''.$$

它們的頂点軌跡作成另一条拋物綫；$\frac{x^2}{a^2}=2nz,\ y=0$。

根据以上的分析，得出双曲拋物面的形狀如圖 6

双曲拋物面、上也有二組直母綫，它的方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2nz$

可以分解为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2nz,$$

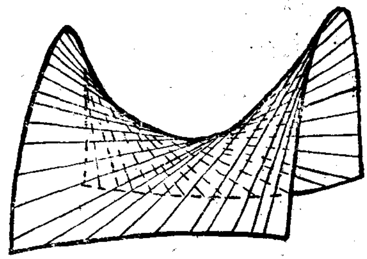

圖 7

因此

$$(85,3)\qquad \frac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}{2n}=\frac{z}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}}$$

或

$$(85,4)\qquad \frac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}{z}=\frac{2n}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}}$$

（85，3）的公比用 α 來表示，那么

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2n\alpha,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{\alpha},$$

对于每一个 α 之值，上式表示一条直綫，这条直綫全部在双曲抛物面上。它是一条直母綫。

同样，（85，4）的公比如用 β 來表示，那么

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\beta z,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2n}{\beta}$$

对于每一 β 值，表示一条直綫，这一組直綫組成双曲抛物面的另一組直母綫。所以双曲抛物綫有兩組直母綫。

因为單叶双曲面与双曲抛物面上都有二組直母綫，所以有时称它們是二次綫織面。

§86. 二次錐面与二次柱面

前面提到一般錐面与柱面的方程特征，現在祇列出二次錐面与柱面。

以$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 为方程的錐面称为二次錐面，虽然有三种类型的方程，但因第三式可寫为$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$，这和第二式是屬于同一类型的，那就是三項中有二項同号有一項异号，因此我們只要討論

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{86, 1}$$

与

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{86, 2}$$

好了。（86，1）式表示实二次錐面，以原点为頂点。它和平面 $z=c$ 所成的截綫是椭圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=c;$$

因此，这个錐面是过原点而且和上述椭圓相交的許多直綫所組成的。假使 $a=b$，则錐面是一个旋轉曲面，它就是普通的圓錐面，由直綫$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$，$y=0$ 繞 z 軸而作成的。

至于（86，2）式所表示的錐面，因为除原点在它上面外，别無其他的实点，因此叫着虛二次錐面。以

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, \tag{86, 3}$$

$y^2=2px$ 为方程的柱面都是二次柱面。如果仔細地区分开，它們各称为椭圓、双曲、虛、抛物柱面，因为它們和平面 $z=k$ 所成的截綫分别是椭圓、双曲綫、虛椭圓及抛物綫。