高等学校“十一五”规划教材

空间解析几何及其应用

徐阳　杨兴云　编著

哈爾濱工業大學出版社

高等学校“十一五”规划教材

空间解析几何

及其应用

徐　阳　杨兴云　编著
赵军生　　　　主审

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书除涵盖了数学各专业必备的空间解析几何知识外，还包含大量的几何应用方面的信息，特别是工程上的应用实例。

本书可作为数学各专业的空间解析几何课的教材，同时亦可供从事其他专业数学教学的教师及相关工科专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何及其应用/徐阳，杨兴云编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2006.9

ISBN 7-5603-2388-X

Ⅰ.空… Ⅱ.①徐…②杨… Ⅲ.空间几何：解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 092818 号

责任编辑 孙 杰
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开 本 850mm×1168mm 1/32 印张 8.75 字数 227 千字
版 次 2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷
印 数 1~4 000
定 价 16.00 元

序

根据数学各专业对《空间解析几何》课程的基本要求，根据目前解析几何类教材的出版现状，根据徐阳和杨兴云两位作者在这方面的教学体会和本人多年从事本课程教学及相关科研的经验，特别是通过我们与其他专业师生的交往，深深地感到，一本好的本专业教材应具有以下特点。

1.具备积累、传承、引领空间解析几何常用知识面的功能。

2.应使从事其他专业数学教学的教师得到启迪和借鉴。

3.应便于使用者掌握空间解析几何的解题方法。

4.应便于参考者提升化实际问题为空间解析几何问题的能力。

目前国内解析几何方面的教材，基本是四类。一是全面且较深较难的；二是与线性代数交叉的；三是少量与应用相关的；四是普及类的读本。本书作者在这四类教材交集的基础上，增加了其他同类教材没有的知识（如向心等距线），在教学使用的过程中又深切感到理论学习可深入到工程实例，其过程对于提升学生创新能力具有巨大的推动作用。这次他们又对讲义进行了认真的修改、增补，以期能更好地体现上述的四项特色。本书被列入哈尔滨工业大学“十一五”规划教材之一，由黑龙江大学数学科学学院赵军生副院长主审。

通读本书不难发现，虽然体例上一致，但仍各有其特色，而这正反映了学习空间解析几何是一个循序渐进、不断提高的过程。读者不难由此得到知识的延伸和提出问题、解决问题的能力。应当说明的是，鉴于本书各章、节、段间和例题间的独立性以及实际工程应用的独立性，在教学与参考过程中可方便地取舍。

本人长期从事几何教学和相关应用研究，在国内外发表的150

余篇论文多涉及本书的内容，因此有理由相信通过阅读本书读者能够更好地掌握用代数方法研究、描述图形的基本知识。

贴近学生、贴近生活、贴近实际是一个数学工作者的一个努力方向，本书的努力方向就是如此。在两位编著的教材问世时，本人代表两位作者向本书引文作者表示诚挚的谢意，并便恳请读者多提建议，以便尽快推出更有特色的图书为广大师生提供帮助。

在本书问世前，两位作者让我写几字，却之不恭，上述文字，不妥之处亦请读者指正。

唐余勇

2006年8月于哈工大

目　　录

第一章　矢量与坐标系

为了将空间中的几何结构系统地数量化，应用代数的方法来研究几何的问题，这里我们在空间引入矢量的概念以及矢量的运算．在此基础上进一步建立坐标系，将代数的运算引入到几何的研究中．本章的内容不仅是解析几何的基础内容，而且在许多工程实践领域中也有着广泛的应用．

1.1　矢量的概念

在日常生活以及物理学等学科的研究和工程实践中，经常会遇到许多量的概念．例如时间、温度、距离、质量、面积、体积等量都可以只用一个实数来表示，我们称这种只有大小没有方向的量为标量或者数量．另外还有一些比较复杂的量，它们不但有数量的大小，而且还有确定的方向，例如力、位移、速度、加速度、角速度、力矩等都是这种类型的量．

定义 1.1.1　*称既有大小又有方向的量为矢量（或者向量）．*

矢量的方向是一个几何性质，它体现从一点到另一点的顺序关系．同时，两点之间的距离又反映了矢量的大小．因此，矢量可以用一条有向线段来表示．如果 A 为始点，B 为终点，则 $\overrightarrow{AB}$ 表示从点 A 到点 B 的一个矢量．此外，为书写方便，也常用黑体英文字母 $\boldsymbol{a}$ 等来表示矢量（见图 1.1.1）．

矢量 $\overrightarrow{AB}$ 由始点 A 到其终点 B 的指向表示矢量的方向，而矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小则称为矢量的长度或者模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$．

定义 1.1.2　*长度为 0 的矢量称为零矢量，记为* $\mathbf{0}$．*它是始点与*

终点重合的矢量,即零矢量的方向是不确定的,或者说是任意的.

定义 1.1.3 长度为 1 的矢量称为单位矢量,简称为幺矢.

定义 1.1.4 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量,记为 $\boldsymbol{a}^0$.

图 1.1.1

定义 1.1.5 如果矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 长度相等,方向相同,那么就称这两个矢量相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

如图 1.1.2 所示的平行四边形 $ABCD$ 中,有 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

若矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$;若矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.

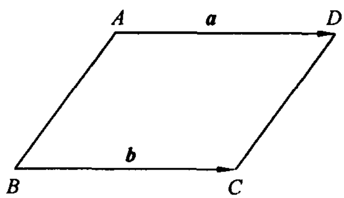

图 1.1.2

两个矢量是否相等与它们的始点位置无关,如果将所有矢量的始点都移至空间中的同一个定点,那么空间中的任意矢量总可以又表示为一个以这点为始点的矢量.我们称这种与始点位置无关,而只由模与方向决定的矢量为自由矢量.本书下面所涉及的矢量除作特殊说明以外,都表示自由矢量.

定义 1.1.6 称与矢量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等、方向相反的矢量为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的反矢量或负矢量,记为 $-\boldsymbol{a}$.

例如,一个力的反作用力就是它的反矢量.显然,$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$,$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

定义 1.1.7 称平行于同一直线的一组矢量为共线矢量或平行矢量.若矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,则这两个矢量的方向相同或者相反,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

定义 1.1.8 称平行于同一平面的一组矢量为共面矢量.

共线矢量一定是共面矢量.规定零矢量与任意矢量共线,与任意两矢量共面.

1.2 矢量的线性运算

1.2.1 矢量的加法

回忆物理学中的位移合成法.从点 A 位移到点 B,再从点 B 位移到点 C,连续实施两次位移的效果就是从点 A 到点 C 的一个位移(见图 1.2.1).由此,我们抽象出矢量的加法运算定义.

定义 1.2.1 对于矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$,作有向线段 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,取矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 B 作为矢量 $\boldsymbol{b}$ 的始点,作有向线段 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则称有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 表示的矢量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.如图 1.2.1 是表示矢量加法运算的三角形法则.

根据物理学中力的合成法,作用于同一点的两个力 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的合力是以这两个力为邻边的平行四边形中对角线上的矢量 $\boldsymbol{c}$(见图 1.2.2).

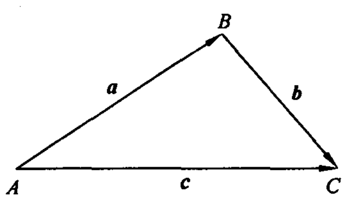

图 1.2.1

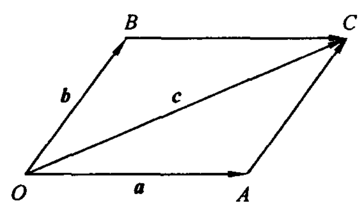

图 1.2.2

根据图 1.2.2 以及定义 1.2.1,我们可以给出另一种矢量的加法法则.

定理 1.2.1 对于矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$,取点 O 为公共始点,作有向线段 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,再以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OABC$,则称以公共始点 O 为始点的对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.这称为矢量加法运算的平行四边形法则.

矢量加法的三角形法则还可以推广到有限个矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的求和.

定理 1.2.2 作有向线段 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，依次取前一个矢量的终点作为后一个矢量的始点，再作 $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，则矢量 $\overrightarrow{OA_n}$ 就是有限个矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，记为 $\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$（见图 1.2.3）. 这种法则称为矢量加法的多边形法则.

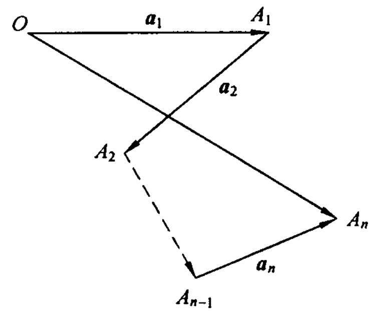

图 1.2.3

矢量的加法满足下列运算定律.

定理 1.2.3

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ (1.2.1)

(2) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ (1.2.2)

(3) 三角不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ (1.2.3)

进一步推广到有限个矢量

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n| \quad (1.2.4)$$

(4) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (1.2.5)

(5) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (1.2.6)

证明 (1)、(2)、(3)根据定义读者自己容易证得.

(4)若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，则根据定义 1.2.1 请读者自行证明.

若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则由图 1.2.4 知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

于是证得式(1.2.5).

(5)若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中有共线矢量，则根据定义 1.2.1 请读者自行证明.

若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中两两不共线，则由图 1.2.5 知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=$$
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

于是证得式(1.2.6).

作为矢量加法的逆运算，下面我们定义矢量的减法.

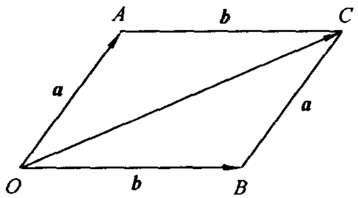

图 1.2.4

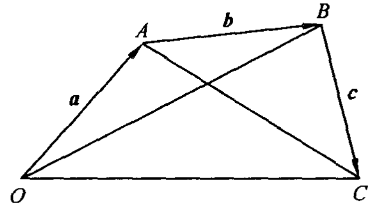

图 1.2.5

定义 1.2.2 称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的反矢量 $-\boldsymbol{b}$ 的和为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

同样，矢量减法也可由三角形法则(见图 1.2.6)或平行四边形法则(见图 1.2.7)来表示.

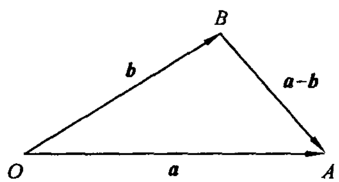

图 1.2.6

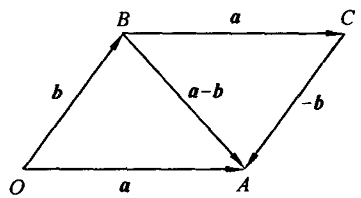

图 1.2.7

推论 1.2.1

(1) $\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (1.2.7)

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$ (1.2.8)

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ (1.2.9)

(4) $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ (1.2.10)

【例 1.2.1】 证明顺次连接互不共线的三个矢量的始点与终点构成一个三角形的充要条件是这三个矢量的和为零矢量.

证明 先证充分性.如果矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,那么作有向线段 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$(见图 1.2.8),则有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,即 $\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.于是 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$.

因此,三矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以构成 $\triangle ABC$.

再证必要性.若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可构成 $\triangle ABC$,即 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$(见图 1.2.8),则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$$

【例 1.2.2】 证明四边形为平行四边形的充要条件是此四边形的对角线相互平分.

证明 先证充分性.设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O 且相互平分(见图 1.2.9),则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}$$

即

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|\text{且}\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$$

因此,四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

再证必要性.设四边形 $ABCD$ 为平行四边形,点 O 为对角线 $\overrightarrow{AC}$ 的中点,即 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$(见图 1.2.9),只需证明点 O 也为另一条对角线 $\overrightarrow{BD}$ 的中点.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BO}&=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CO}-(-\overrightarrow{CD})=\\&-\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

因此,平行四边形的对角线相互平分.

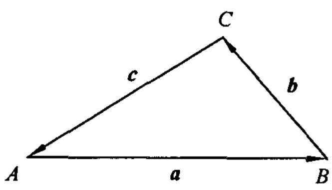

图 1.2.8

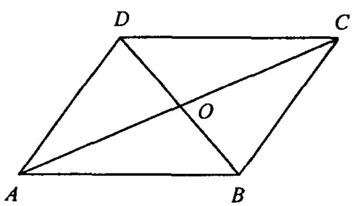

图 1.2.9

1.2.2 数量与矢量的乘法

现实生活中直线上的连续移动是最简单的位移过程，例如弹簧的伸缩运动，只包含位移方向的反转以及长度的改变，这样就可以通过倍数来表示．再例如我们熟悉的公式 $f = ma$，其中 f 表示力，m 表示质量，a 表示加速度；公式 $s = vt$，其中 s 表示位移，v 表示速度，t 表示时间．这些公式都表示数量与矢量的结合运算．

定义 1.2.3 *实数 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个矢量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，这种运算称为数量与矢量的乘法，简称数乘．矢量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度为 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$．当 $\lambda > 0$ 时，它与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时，它与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反*(见图 1.2.10)．

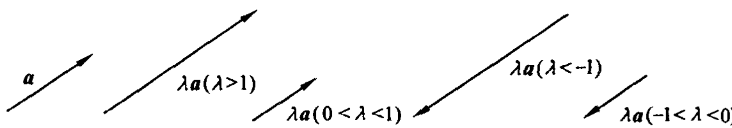

图 1.2.10

实际上，如果矢量 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ 并且矢量 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，那么一定存在并且仅存在一个实数 λ 使得 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$，即用一个实数乘以一个非零矢量既可以改变矢量的长度，又可以使矢量的方向反转．因此，数乘运算不但能够使所得矢量都与原矢量共线，而且还可以表示所有与其共线的矢量．

显然 $|\lambda| = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$ 且 λ 的正负取决于矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的方向是否相同．当矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 同向时，λ 取正；当矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，λ 取负．

由定义 1.2.3 可知，当 $\lambda = 0$ 或矢量 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 时，有 $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，而且

$$1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a},\ (-1)\cdot\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零矢量，则 $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，即非零矢量与其模倒数的数乘结果表示它的单位矢量，这个过程也称为将非零矢量单位化．

数量与矢量的乘法满足下列运算定律．

定理 1.2.4 (1) 结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a} \tag{1.2.11}$$

(2) 第一分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a} \tag{1.2.12}$$

(3) 第二分配律

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \tag{1.2.13}$$

其中 λ,μ 为实数.

证明 (1)当 λ,μ 中至少有一个为 0 或者 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,则

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

当 $\lambda\mu\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|$$

即矢量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的长度相等.

进一步,若 $\lambda\mu>0$,则矢量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$及$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都与矢量$\boldsymbol{a}$ 方向相同;而若 $\lambda\mu<0$,则矢量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$及$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都与矢量$\boldsymbol{a}$ 方向相反.

(2)当 $\lambda,\mu,\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,式(1.2.12)显然成立.

当 $\lambda\mu(\lambda+\mu)\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,分情况讨论.

(i)若 $\lambda\mu>0$,则

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|=$$
$$|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|$$

即矢量$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 的长度相等. 又由 λ,μ 同号,则$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$与$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 方向相同.

(ii)若 $\lambda\mu<0$,不妨设 $\lambda>0,\mu<0$.

进一步,当 $\lambda+\mu>0$ 时,有$(-\mu)(\lambda+\mu)>0$,由情况(i)的分析可知

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a}=[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$$

即

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}-(-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$

同理,可证其他三种情况.

(3)当 $\lambda=0$ 或矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为零矢量时，式(1.2.13)显然成立.

当 $\lambda\neq0$ 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都为非零矢量时，分情况讨论.

(i)若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，则一定存在并且仅存在实数 μ 使得 $\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}$. 于是

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda(\mu\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda(\mu+1)\boldsymbol{b}=(\lambda\mu+\lambda)\boldsymbol{b}=$$
$$(\lambda\mu)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(\mu\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

(ii)若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线(见图 1.2.11)，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OA'}=\lambda\boldsymbol{a},\overrightarrow{A'B'}=\lambda\boldsymbol{b}$，则由三角形法则有

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\ 且\ \overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

又由于 $\triangle OAB$ 相似于 $\triangle OA'B'$，因此

$$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB'}=\lambda\,\overrightarrow{OB}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

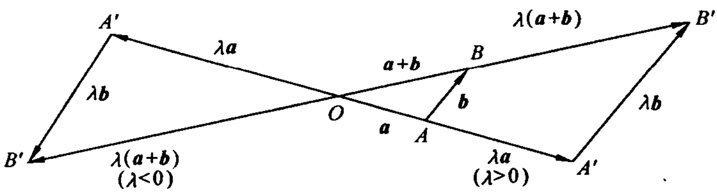

图 1.2.11

【例 1.2.3】 设点 D,E,F 分别为 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 的中点，证明矢量 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$ 可以构成一个三角形.

证明 由三角形法则(见图 1.2.12)有

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF})=$$
$$(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=$$
$$\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$$

根据例 1.2.1 知矢量 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$ 可以构成一个三角形.

【例 1.2.4】 已知点 D 为 $\triangle ABC$ 上 BC 边的中点，试证明 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.