高等学校教材

组合数学

田秋成　等编著

電子工業出版社
PHEI PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校教材

组合数学

田秋成　等编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书介绍组合计数及解决计数问题的数学工具，如母函数、容斥原理、鸽笼原理、P′olya 定理等，还介绍了组合设计、计算机编码理论、组合算法及其复杂性。该书基础理论部分讲述比较详细，且突出了算法。书中有大量的示例、习题，书后附有习题解答与提示，便于讲授、自学。

本书既可作为计算机、数学及相关专业本、研教材，又可作为计算机、数学爱好者的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/田秋成等编著．—北京：电子工业出版社，2006.11
高等学校教材
ISBN 7-121-03301-1

Ⅰ.组…　Ⅱ.田…　Ⅲ.组合数学—高等学校—教材　Ⅳ.0157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 122912 号

责任编辑：冉　哲
印　　刷：北京市天竺颖华印刷厂
装　　订：三河市金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×980　1/16　印张：16.25　字数：362 千字
印　　次：2006 年 11 月第 1 次印刷
印　　数：4 000 册　　定价：21.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系电话：(010)68279077；邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前　言

组合数学是一个历史悠久的数学分支，源远流长，可追溯到远古时代。18 世纪，组合数学得到较深入的研究。20 世纪，计算机的诞生使组合数学得以蓬勃发展。

组合数学内容丰富，涉及广泛，主要包括组合计数、组合算法、组合设计、密码学、编码理论、图论、线性规划、复杂度分析等内容。已经发展成熟的，如图论、线性规划等，则逐步从组合数学中分离出去。

组合数学算法与计算机技术的结合在现代科学技术中发挥着极为重要的作用。对从事数学的人员来讲，学习组合数学可以提高分析问题的能力；对从事计算机的人员来讲，若没有组合数学的基础，就难以深入研究与分析有关算法。所以说，组合数学不仅是近年来最活跃、最迷人的数学分支，也是计算机科学技术的重要理论基础之一。组合数学在电子工程、数字通信、物理学、力学、管理科学等诸多领域，尤其在计算机科学领域有着广泛的应用。

全书共分 10 章，第 1 章基本解题方法与计数法则，作为导论，旨在对组合数学的基本求解方法及组合计数的基本法则进行介绍。第 2 章二项式与多项式定理，介绍二项式、多项式定理，二项式、多项式系数及其组合意义。第 3 章排列与组合，介绍初等排列与组合、排列与组合的生成算法。第 4 章母函数与递推关系，介绍母函数、递推关系、母函数求解递推关系、正整数分拆、差分表求和等内容。第 5 章容斥原理，讲述容斥原理及其在组合计数中的应用。第 6 章鸽笼原理，讲述鸽笼原理及其应用，以及 Ramsey 定理，Ramsey 数。第 7 章几何图形计数，介绍简单几何图形的计数问题。第 8 章 P′olya 定理，讲述 Burnside 引理、P′olya 定理，以及 P′olya定理在解决各种组态计数问题中的应用。第 9 章组合设计，介绍拉丁方与区组设计，讲述区组设计在计算机编码、译码中的应用。第 10 章组合算法及其复杂性，介绍排序、查找、Fourier变换，并概略地介绍算法的复杂性。

该书基础理论部分讲述比较详细，且突出了算法。书中有大量的示例、习题，书后附有习题解答与提示，便于教师讲授和学生自学。

本书第 1、4、5、6、7、10 章由田秋成执笔，第 2 章由刘建国执笔，第 3 章由韩国栋执笔，第 8 章由马小蓉执笔，第 9 章由杨会民执笔，全书由田秋成统稿。北京大学数学科学学院冯荣权教授详细审查了全书，提出了许多宝贵的建议，并提出了具体的修改意见。本书在编写过程中，参考了诸多同行编写的组合数学类书籍、资料，引用了一些书籍的内容，其中最主要的已列在参考文献中。在此，一并表示感谢和敬意。

限于时间和水平，书中难免有不当和疏漏之处，敬请读者不吝指正。

编著者

2006.9

反侵权盗版声明

目　　录

第 1 章　基本解题方法与计数法则

本章作为导论，旨在对组合数学问题的基本求解方法及组合计数的基本法则进行介绍。

1.1　组合数学简介与基本解题方法

1.1.1　组合数学简介

组合数学是数学的一个分支，主要研究事物在给定模式下的配置，研究某种配置的存在性，以及各种配置的计数、分类、性质、构造等。

组合数学包括组合计数、组合设计、组合算法等。原属组合数学的许多内容，如图论、线性规划等，已发展成为独立的数学分支而分离出去。

组合数学是计算机科学的重要理论基础之一，组合数学在计算机科学领域有着极其广泛的应用。对从事计算机科学技术的人员来讲，若无组合数学的基础，就难以深入地研究与分析计算机中的有关算法。此外，组合数学在社会科学、管理学、生物学、物理学、力学等诸多领域均有着广泛的应用。

1.1.2　基本解题方法

组合数学求解问题的方法大致可分为两类：一是常规求解方法；二是另类求解方法。所谓常规求解方法，就是依据组合数学的基本概念、基本原理而获得问题的解。例如，利用容斥原理、二项式定理、多项式定理、Pólya 定理等求解计数问题，利用母函数、特征根方法等求解递推关系，利用鸽笼原理、Ramsey 定理等求解存在性问题等。所谓另类求解方法，是指在求解组合数学问题时，所采用的方法与求解问题所涉及的组合数学概念无关，而这些求解方法对求解组合数学以外的其他问题也同样适用，故称另类求解方法。例如，利用数学归纳法，推断所求问题；利用数论方法，特别是利用整数的奇偶性、整除性等数论性质，进行推理、断定，而获得问题的解；利用殊途同归方法，即从另一个角度考虑问题，将欲求问题转化为另外的已知问题，从而获得问题的解；等等。

组合数学中的许多问题具有理论、实际、兴趣相结合的特征，求解问题时能够促使人冷静思索，开拓思路，并寻求机敏精巧的方法。所以说，学习组合数学能提高人的思维能力、推断能力和分析问题的能力。

定理 1.1　n 元集 S 的全部子集个数是 2^n。

证法 1 采用常规求解方法。S 的子集可以有 0 个,1 个,2 个,…,n 个元素。S 的 r $(0\leqslant r\leqslant n)$元子集的个数是$\binom{n}{r}$,所以共有$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$ 个。

证法 2 采用数学归纳法。对 n 归纳。当 $n=0$ 时,S 为空集,只有 1 个子集(自身),$1=2^0$,命题真。假设 $n=k$ 时,命题成立。证 $n=k+1$ 时命题成立。设元素 $a\in S$,S 的全体 $k+1$元子集可分为两类:不含元素 a 的和含有元素 a 的。根据假设,不含元素 a 的子集有 2^k 个。下面说明含有元素 a 的子集也有 2^k 个。这是因为,含有元素 a 的去掉 a 就是不含元素 a 的,不含元素 a 的加上元素 a 就是含有元素 a 的。所以说,含有元素 a 的子集与不含元素 a 的子集是一一对应的。所以有,S 的 $k+1$ 元子集的总数是 $2^k+2^k=2^{k+1}$个。即 $n=k+1$ 时命题真。命题成立。

例 1.1 n 个人打乒乓球,采用单循环淘汰制,共需比赛多少场才能产生冠军?

解 采用殊途同归方法。例如,$n=7$,7 个人需先打 3 场(1 人轮空),剩 4 个人;再打 2 场,剩 2 个人;再打 1 场,产生冠军。共比赛了 $3+2+1=6$ 场。对于 n 个人,也可依此计算比赛的场次。

现在换个角度考虑这个问题。实际上,这种比赛只产生一个冠军,即只有冠军一个人未输,其余的 $n-1$ 个人都输了,且每个人只输了一场球,只是输的先后不同而已,只有比赛 $n-1$ 场才能淘汰这 $n-1$ 个人。所以说,n 个人的乒乓球单循环淘汰赛必须安排 $n-1$ 场比赛才能产生冠军。

例 1.2 有一排灯共 n 盏,都关着。现有 n 个人通过,第一个人拨动第 1,2,…,n 盏灯的开关,第二个人拨动第 2,4,6,…盏灯的开关,第三个人拨动第 3,6,9,…盏灯的开关,……,第 n 个人拨动第 n 盏灯的开关。这 n 个人走过之后,哪些灯亮?哪些灯灭?

解 采用数论方法。先证明一个定理。

定理 1.2 正整数 n 的因子个数(包括 1 和 n)是奇数个的充要条件是 n 是一个完全平方数,因子个数是偶数个的充要条件是 n 是一个非完全平方数。

证 若 $n=m_1\times m_2$,m_1、m_2 是正整数,则 m_1、m_2 同时是 n 的因子。可设 $m_1\leqslant\sqrt{n}\leqslant m_2$。$n$ 是非完全平方数时,有 $m_1<\sqrt{n}<m_2$。这时 n 的因子在$\sqrt{n}$以下和$\sqrt{n}$以上成对出现,而$\sqrt{n}$不是 n 的因子,因此 n 恰有偶数个因子。当 n 是完全平方数时,$\sqrt{n}$是 n 的因子,而$\sqrt{n}$以下和$\sqrt{n}$以上 n 的因子仍成对出现,因此 n 的因子个数是奇数。

现在来看第 i 盏灯,$1\leqslant i\leqslant n$。若 i 有 k 个因子(包含 1 和 i),则第 i 盏灯的开关被改变了 k 次。若 i 是非完全平方数,则 k 为偶数;若 i 是完全平方数,则 k 为奇数。所以说,这 n 个人走过之后,非完全平方数的灯,第 2,3,5,6,…盏灯仍灭着;完全平方数的灯,第 1,4,9,16,…盏灯亮。

例 1.3 证明$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$。

证 采用殊途同归方法。如图 1.1 所示,从两个角度计算从 O 点到 AB 线的路径数。

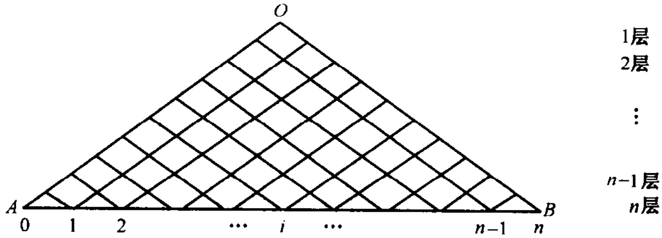

图 1.1 用路径求解示意图

① 从 O 点出发，每下一层有两个分支，共 n 层，有 2^n 条路径。

② 计算从 O 点到 $i(0\leqslant i\leqslant n)$ 点的路径数。O 点到 i 点的路径取决于 O 点到 i 点这 n 步中向下向右走了 i 步所处的位置，有 $\binom{n}{i}$ 种方式，即有 $\binom{n}{i}$ 条路径。所以，O 点到 AB 线的路径总条数为 $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$。

①、②两种方法的计算结果应相等，所以有 $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$。

若派出 2^n 个人，从 O 点出发，每遇到路口时人被一分为二。这 2^n 个人恰好每个人走了一条与他人不同的路径，故有 2^n 条路。到达 AB 后，0 点、1 点、…、n 点上的人数恰好为 $\binom{n}{0}$、$\binom{n}{1}$、$\binom{n}{2}$、…、$\binom{n}{n}$ 个。

1.2 常用符号与基本计数法则

1.2.1 常用符号

下面介绍几个常用的符号。

(1) 阶乘

定义 1.1 下阶乘。设 x 为实数，n 为非负整数，记 $[x]_n=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$，称为 x 下阶乘 n。规定，$[x]_0=1$。

例如，$[5]_2=5\times4$，$[-3.6]_3=(-3.6)\times(-4.6)\times(-5.6)$，$[8]_0=1$，$[0]_0=1$。

定义 1.2 上阶乘。设 x 为实数，n 为非负整数，记 $[x]^n=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$，称为 x 上阶乘 n。规定，$[x]^0=1$。

例如，$[5]^2=5\times6$，$[3.6]^3=3.6\times4.6\times5.6$，$[-2]^0=1$，$[0]^0=1$。

(2) 取整

定义 1.3 下取整。设 x 为实数，用 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数，称为 x 的下整数，或 x

向下取整。

例如，$\lfloor 3.2 \rfloor=3$，$\lfloor -1.3 \rfloor=-2$。

定义 1.4　上取整。 设 x 为实数，用 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数，称为 x 的上整数，或 x 向上取整。

例如，$\lceil 4.25 \rceil=5$，$\lceil -4.25 \rceil=-4$。

若用 $\{x\}$ 表示 x 的非负纯小数部分，显然有 $x=\lfloor x \rfloor+\{x\}$。例如，$\lfloor 4.25 \rfloor+\{4.25\}=4+0.25=4.25$，$\lfloor -3.25 \rfloor+\{-3.25\}=-4+0.75=-3.25$。

定义 1.5　就近取整。 设 x 为实数，记 $\langle x \rangle$ 表示与 x 最接近的整数，称为 x 就近取整。即当 $\{x\}<\frac{1}{2}$ 时，$\langle x \rangle=\lfloor x \rfloor$；当 $\{x\}>\frac{1}{2}$ 时，$\langle x \rangle=\lceil x \rceil$。使用 $\langle x \rangle$ 记号时，$\{x\}\neq\frac{1}{2}$。当 x 为整数时，显然有 $x=\lfloor x \rfloor=\lceil x \rceil=\langle x \rangle$。

例如，$\langle 2.49 \rangle=2$，$\langle -\sqrt{2} \rangle=-1$，$\lfloor 3 \rfloor=\lceil 3 \rceil=\langle 3 \rangle=3$。

(3) 排列记号

A_n^r	n 元取 r 的选排列
$P_n=A_n^n$	n 元的全排列
D_n	n 元的错排
$A^n_{n(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$	n 个不尽相异元素的全排列，$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$
$A_n^{\bar{r}}$	n 元取 r 的可重排列
$A_n^{\bar{n}}$	n 元的可重排列
$A_n^{(r)}$	n 元取 r 的圆(环状)排列
$A_n^{(n)}$	n 元的圆(环状)排列

(4) 组合记号

$\binom{n}{r}$	n 元取 r 的组合
$\binom{n}{n}$	n 元的组合
$C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_r}$	多组组合，n 元的 r 组组合，$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$
$\left\langle \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\rangle$	n 元取 r 的可重组合
$\left\langle \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rangle$	n 元的可重组合

1.2.2　基本计数法则

当某个计数问题比较简单时，人们往往采用枚举法、等差级数、等比级数、调和级数、初等

排列组合、简单递推关系等知识求解计数问题。当某个计数问题比较复杂，尤其是不能借助某一公式直接求解时，往往需要借助计数法则求解计数问题。常用的计数法则（又称计数原则、计数原理）有和则、积则、等则、映射等。灵活运用这些计数法则，是组合计数的技巧之一。

（1）和则与分组法

和则，又称加法原理。当某一计数问题可以分组考虑时，可运用和则。利用和则进行计数的方法，称为分组法。

和则的表述形式是，若完成某件事情有 k 种不同的方式，第一种方式有 n_1 种方法，第二种方式有 n_2 种方法，……，第 k 种方式有 n_k 种方法，所有的方法均不相同，使用其中的任何一种方法均可完成这件事情，则完成这件事情的方法共有 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种。

例 1.4 书架上有数学类书 2 本，计算机类书 3 本。任取其中一本，有多少种取法？

解 依和则，共有 $2+3=5$ 种取法。

定理 1.3 ① 整数 $n!$ 中含有素因子 m 的个数为 $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left\lfloor\frac{n}{m^k}\right\rfloor$；

② 整数 $n!$ 中尾部零的个数为 $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left\lfloor\frac{n}{5^k}\right\rfloor$。

证 ① 显然，整数 $1\sim n$ 中可被整数 m 整除的数的个数为 $\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor$。例如，$1\sim 128$ 中可被 2 整除的数的个数有 $\left\lfloor\frac{128}{2}\right\rfloor=64$ 个，可被 5 整除的数的个数有 $\left\lfloor\frac{128}{5}\right\rfloor=25$ 个。

设 $1\sim n$ 中含有素因子 m 的个数最多为 r 个，则含有 r 个素因子 m 的个数为 $\left\lfloor\frac{n}{m^r}\right\rfloor$，含有 $r-1$ 个素因子 m 的个数为 $\left\lfloor\frac{n}{m^{r-1}}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{m^r}\right\rfloor$，含有 $r-2$ 个素因子 m 的个数为 $\left\lfloor\frac{n}{m^{r-2}}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{m^{r-1}}\right\rfloor$，……，含有 1 个素因子 m 的个数为 $\left\lfloor\frac{n}{m^1}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{m^2}\right\rfloor$。依和则，$n!$ 中含有素因子 m 的个数为

$$r\left\lfloor\frac{n}{m^r}\right\rfloor+(r-1)\left[\left\lfloor\frac{n}{m^{r-1}}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{m^r}\right\rfloor\right]+(r-2)\left[\left\lfloor\frac{n}{m^{r-2}}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{m^{r-1}}\right\rfloor\right]+\cdots+1\left[\left\lfloor\frac{n}{m^1}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{m^2}\right\rfloor\right]$$

$$=\left\lfloor\frac{n}{m^r}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{m^{r-1}}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{m^{r-2}}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n}{m^1}\right\rfloor=\sum_{k=1}^{r}\left\lfloor\frac{n}{m^k}\right\rfloor=\sum_{k\geqslant 1}\left\lfloor\frac{n}{m^k}\right\rfloor$$

例如，$128!$ 中含有素因子 5 的个数为

$$\sum_{k\geqslant 1}\left\lfloor\frac{128}{5^k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{128}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{128}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{128}{5^3}\right\rfloor=25+5+1=31\text{ 个}$$

② $n!$ 中尾部零的个数，取决于 $1\sim n$ 中含有因子 10 的个数，即取决于 $n!$ 中含有素因子 2 与 5 的个数。显然，2 的个数多于 5 的个数。所以，$n!$ 中尾部零的个数取决于 $n!$ 中含素因子 5 的个数。所以，$n!$ 中尾部零的个数为 $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left\lfloor\frac{n}{5^k}\right\rfloor$。

例如，$128!$ 中尾部零的个数为 $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left\lfloor\frac{128}{5^k}\right\rfloor=31$ 个。

(2) 积则与分步法

积则，又称乘法原理。当某一计数问题可以分步考虑时，可使用积则。利用积则进行计数的方法，称为分步法。

积则的表述形式是，若完成某一件事情可分为 k 个步骤，第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法，……，第 k 步有 n_k 种方法，各步骤需连续完成才能完成这件事情，则完成这件事情的方法共有 $n_1n_2\cdots n_k$ 种。

例 1.5 甲地到乙地有 3 条路，乙地到丙地有 2 条路，问甲地经乙地到丙地共有多少条路？

解 依积则，共有 $3\times2=6$ 条路。

定理 1.4 n,k 为正整数，若 $n=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_k^{t_k}$，其中 $p_i,p_j(i,j=1,2,\cdots,k$，且 $i\neq j)$ 为两两不同的素因子，t_i 为非负整数，$i=1,2,\cdots,k$，则正整数 n 所含正整数因子的总个数（含因子 1）为 $\prod\limits_{i=1}^{k}(t_i+1)$。

证 因为 $n=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_k^{t_k}$，所以，$n$ 含因子 $p_1^0,p_1^1,p_1^2,\cdots,p_1^{t_1}$，共 t_1+1 个；同理，n 含因子 $p_2^0,p_2^1,p_2^2,\cdots,p_2^{t_2}$，共 t_2+1 个；……；n 含因子 $p_k^0,p_k^1,p_k^2,\cdots,p_k^{t_k}$，共 t_k+1 个。依积则，n 含因子的总个数为 $\prod\limits_{i=1}^{k}(t_i+1)$。

(3) 等则与配对法

等则，又称配对原理，就是殊途同归方法，即一一对应技术。当某一计数问题直接计数比较困难，而与其等价的计数问题比较简单时，可运用等则。这里所讲的等则，是指对计数而言，两个问题的计数结果相等。利用等则进行计数的方法，称为配对法。

先介绍一下映射。

定义 1.6 映射。 对有限集 A 与 B，若有一规则 f 将 A 中的每个元 a 对应到 B 中的一个确定的元 b，那么就称 f 为 A 到 B 的一个映射，并称 b 是 a 在映射 f 下的像，记为 $b=f(a)$。

定义 1.7 单射。 对有限集 A 与 B，如果一映射 f 使得 A 中不同元的像也不同，即对任给的 $a\neq a'$，a、$a'\in A$，有 $b=f(a)$，$b'=f(a')$，$b\neq b'$，则称此映射为 A 到 B 的单射。

定义 1.8 满射。 对有限集 A 与 B，如果一映射 f 使得 A 中所有元的像充满了 B，即对任意的 $b\in B$，必有 $a\in A$，使得 $f(a)=b$，则称此映射为 A 到 B 的满射。

定义 1.9 双射。 对有限集 A 与 B，一个既是 A 到 B 的单射，又是 A 到 B 的满射的映射，称为 A 到 B 的双射，或称为一一对应。以下，用$\Leftrightarrow$表示双射。

等则的集合论表示形式是，若存在有限集 A 到 B 的双射，则有 $|A|=|B|$，其中 $|A|$、$|B|$ 表示集合 A、B 中元素的个数。

例 1.6 设凸 $n(n\geqslant4)$ 边形任意三条对角线不共点，求其对角线在形内交点的个数。

解 凸 n 边形共有 $m=\dfrac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。若两两相交，可有 $\dbinom{n}{2}$ 个交点。这里有两个问