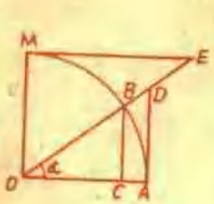
建筑职工紅專学校教材

三　　角

哈尔濱建筑工程学院　编



建　筑　工　程　出　版　社

三　角

哈尔濱建筑工程学院　編

1959年5月第1版　1959年8月第2次印刷　5,066—20,075册

850×1168 $^{1}/_{32}$ · 50千字 · 印張2$^{1}/_{8}$ · 定价（9）0.29元

建筑工程出版社印刷厂印刷·新华書店发行·統一書号：15040·1610

建筑工程出版社出版（北京市西郊百万庄）

（北京市書刊出版业营业許可証出字第052号）

建筑职工紅專学校教材

三　角

哈尔濱建筑工程学院　編

建筑工程出版社出版

·1959·

前言

在党的鼓足干勁、力爭上游、多快好省地建設社会主义的总路綫光輝照耀下，全国人民掀起了一个波瀾壮闊的建設高潮。偉大的祖国正在以“一天等于二十年”的速度飞跃前进。在跃进声中，我国劳动人民为了夺取知識堡壘，攀登技术高峰，正以豪迈的步伐，冲天的干勁，向科学文化大进軍，各地各行业紅專学校、职工业余学校雨后春笋般地出現。这些学校都迫切需要解决教材問題。

我院应屆毕业生工民建專业54—3班的同学們，在党的“教育为无产阶級政治服务”、“教育与生产劳动相結合”方針的指导下，为了滿足各方面的需要，着手編写了这套紅專建筑工程学校教材。

同学們在党的領导和支持下，破除迷信、解放思想，遵循革命热情和科学精神相結合的原則，經过半年的課余劳动，終于編写出这套長达一百万字（十余門課程）的教材。

这套教材是針对高小毕业的文化程度編写的，同时，內容的繁、簡、深、淺也尽量照顧建筑业职工工作需要的特点，力求文字通俗，講解透徹，习題、試驗等注意了采取建筑工程当中的事物，以达理論联系实际的目的。

在編写过程中，同学們拜訪了工人同志，并且虛心听取了他們的意見。由于条件的限制，这項工作还做得十分不够。編写工作还得到了学院老师們热心的指导和帮助。因此，这套教材是集体劳动的成果，是羣众智慧的汇集。

編写这样一套教材，是一件不容易的事情。由于同学們的思想水平和知識水平不高，特别是缺乏生产实踐經驗，錯誤和不妥当的地方一定很多，我們殷切地希望同志們不吝指教。

哈尔濱建筑工程学院

1959年5月1日

目　录

第一章　三角学的初步概念及三角函数

§1　引　言

三角学是数学的一个組成部分。有人把数学比为学习科学的鑰匙，如果一个人学完了算术、代数、几何而不学三角，那么就象这把鑰匙还缺一个齿一样，就会覺得用起来不好使，也就是說会遇到很多問題不能解决。

例如在图1中，怎样测出河寬 AC 和树高 BC 呢？用尺量显然是不行的，因为河里有水，树很高。怎么办呢？这就要用三角学了。

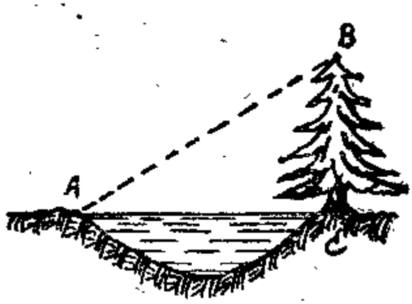


图 1

只要我們研究了三角形中边与角的关系，就可以很容易地解决这个問題。所以，簡單的說，**三角学就是研究三角形中边角之間关系的一門科学。**

§2　三角形及其边和角的名称

首先复习一下在几何学中講过的几种角的名称：

直角：互相垂直的两条直綫的夹角，叫直角。如图2中 $\angle COB$。一个直角等于 $90°$；$1°$ 等于 $60'$；$1'$ 等于 $60''$。

銳角：小于 $90°$ 的角叫銳角，如图3中 $\angle A$。

鈍角：大于 $90°$，但小于 $180°$ 的角叫鈍角，如图3中 $\angle C$。

余角：两角之和为 $90°$，则称此两角互为余角，如 $62°$ 是 $28°$ 的

余角，同样，28°也是62°的余角。

补角：两角之和为180°，则称此两角互为补角，如60°是120°的补角，同样120°也是60°的补角。

三角形常用注在三个角頂上的大写字母 A、B、C 表示；按角的大小三角形可分三类：

1.三角形的三个內角全是銳角的，叫銳角三角形(图 4)。

2.三角形的內角中有一个是直角的，叫直角三角形(图5)。

3.三角形的內角中有一个是鈍角的，叫鈍角三角形(图3)。

在直角三角形中，因三个內角的和为180°，所以除直角外的两个銳角互为余角。如图 5，$\angle A+\angle B=180°-\angle C=180°-90°=90°$，即$\angle A$与$\angle B$互为余角。

如图 6，三角形的三个边常用其对角上的小写字母表示，即 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$。

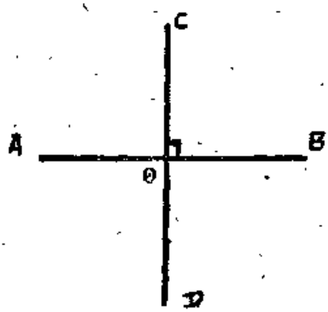


图 2

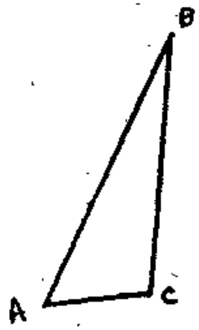


图 3

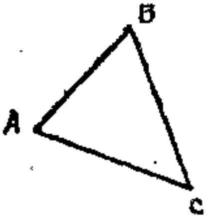


图 4

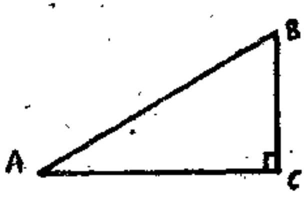


图 5

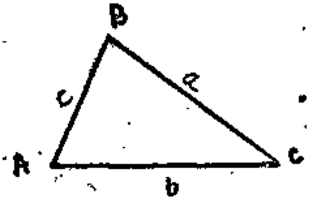


图 6

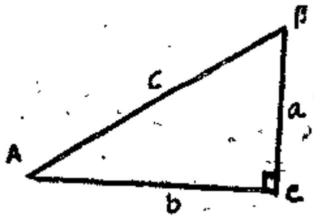


图 7

在直角三角形(图 7)中，a 和 b 叫直角边，c 叫斜边。并把 a 叫$\angle A$ 的对边和$\angle B$ 的邻边；b 叫$\angle B$ 的对边和$\angle A$ 的邻边。

§3 銳角的三角函数

如图 8，在銳角$\angle BAC$ 的 AC 边上作垂綫 DE, FG, MN等，则因 DE, FG, MN 都垂直于 AC，它們必互相平行，所以三角形ADE，AFG，AMN 等都是互相相似的直角三角形。

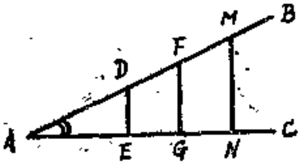


图 8

根据相似三角形的性質，在一个三角形中任意两边之比，必然等于其他相似三角形中相应两边之比。

如 $$\frac{DE}{AD}=\frac{FG}{AF}=\frac{MN}{AM}\text{等。}$$

由此可見，对于直角三角形，若其中一个銳角固定，那么所做出的各三角形边長虽然不等，但其任意两边的比値总是不变的，也就是任意两边之比只随三角形中某一銳角的大小而不同，与其边長无关。**在数学中把直角三角形任意两边的比的这种关系叫角的三角函数。**

三角形有三个边，它們能組成六种不同的比，因此**对于任一銳角，就有六个三角函数。**为了表示清楚，我們列表来說明各种

函数的名称、定义和符号（表1）。

锐角A的三角函数（参看图7）　　表1

名　　称	符　号	定　　义	表 示 方 法
$\angle A$的正弦	$\sin A$	$\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜　边}}$	$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}$
$\angle A$的余弦	$\cos A$	$\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜　边}}$	$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$
$\angle A$的正切	$\mathrm{tg} A$	$\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$	$\mathrm{tg} A=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}$
$\angle A$的余切	$\mathrm{ctg} A$	$\frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}$	$\mathrm{ctg} A=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$
$\angle A$的正割	$\sec A$	$\frac{\text{斜　边}}{\angle A\text{的邻边}}$	$\sec A=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$
$\angle A$的余割	$\mathrm{cosec} A$	$\frac{\text{斜　边}}{\angle A\text{的对边}}$	$\mathrm{cosec} A=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$

从表1中可以看出：正弦、余弦和正切函数，分别与余割、正割和余切函数互为倒数，因此一般只研究正弦、余弦和正切（或余切）函数。

例 1　如图9，直角三角形ABC，斜边为5公尺，$\angle A$的邻边为3公尺。求$\angle A$的正弦和余切。

解：按勾股弦定理得：

$$BC=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4\text{公尺}$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$$

$$\mathrm{ctg}\, A=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$$

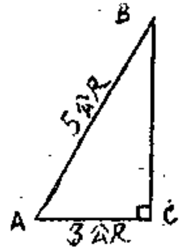


图 9

例 2　在直角三角形ABC中，两直角边AC和BC相等。求$\angle A$的正弦和正切。

解：依题意作出直角三角形ABC（图10），因$AC=BC$，

则：　$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{2}\,AC$（或$\sqrt{2}\,BC$）

$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{\sqrt{2}BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

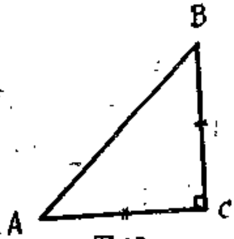


图10

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = 1$$

习 题 一

1. 直角三角形 ABC 的两直角边 AC 与 BC 長度分别为3公分与4公分。求$\angle A$的正弦、余弦、正切、余切。

2. 直角三角形的斜边長为10公尺，它的最小銳角的正弦等于0.5，求此三角形两直角边長度。

3. 在直角三角形 ABC 中，直角边 $AC=80$公尺，$BC=60$公尺，求$\angle B$的正弦、余弦、正切、余切。

§4 余角的三角函数

直角三角形中$\angle A$的对边就是$\angle B$的邻边，$\angle B$的对边就是$\angle A$的邻边，如图11。

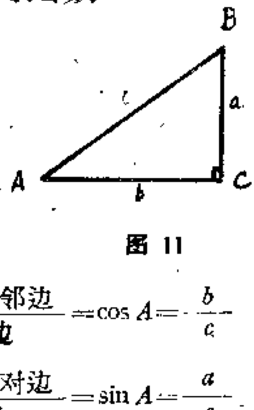


图 11

这样，$\angle B$的三角函数为:

$$\sin B = \frac{\angle B\text{的对边}AC}{\text{斜边}AB} = \frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}} = \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\cos B = \frac{\angle B\text{的邻边}BC}{\text{斜边}AB} = \frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}} = \sin A = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\angle B\text{的对边}AC}{\angle B\text{的邻边}BC} = \frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}} = \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\angle B\text{的邻边}BC}{\angle B\text{的对边}AC} = \frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}} = \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$

因为$\angle A+\angle B=90^\circ$，所以

$$\sin A=\cos B=\cos(90^\circ-A)$$
$$\cos A=\sin B=\sin(90^\circ-A)$$
$$\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg} B=\operatorname{ctg}(90^\circ-A)$$
$$\operatorname{ctg} A=\operatorname{tg} B=\operatorname{tg}(90^\circ-A)$$

上式表明：**三角形銳角的正弦，等于它的余角的余弦；**
三角形銳角的余弦，等于它的余角的正弦；
三角形銳角的正切，等于它的余角的余切；
三角形銳角的余切，等于它的余角的正切。

因此，称正弦和余弦、正切和余切、正割和余割是互余的函数。**总括来說，一个銳角的三角函数等于它的余角的余函数。**

例 1 用25°的余角的函数表示$\operatorname{tg}25^\circ$。

解： $\operatorname{tg}25^\circ=\operatorname{ctg}(90^\circ-25^\circ)=\operatorname{ctg}65^\circ$

例 2 求証$\sin42^\circ+\cos48^\circ=2\sin42^\circ$

証： $\cos48^\circ=\sin(90^\circ-48^\circ)=\sin42^\circ$

$\therefore\ \sin42^\circ+\cos48^\circ=\sin42^\circ+\sin42^\circ=2\sin42^\circ$

习 题 二

把下面諸角的三角函数化成它的余角的三角函数：

① $\sin78^\circ$ ② $\operatorname{tg}25^\circ18'$ ③ $\operatorname{ctg}56^\circ47'$ ④ $\cos49^\circ15'$

⑤ $\operatorname{tg}80^\circ52'$ ⑥ $\operatorname{tg}26^\circ53'$ ⑦ $\operatorname{ctg}34^\circ13'$

§ 5銳角三角函数的变化

前面已經講过，三角函数的值是跟着角的大小而变化的，但是它們之間的关系，旣非正比例，也非反比例。

例如：$\sin14^\circ=0.2419$，　$\sin42^\circ=0.6691$。

这里，42°是14°的三倍，但0.6691却不是0.2419的三倍。

又如：$\cos23^\circ=0.9205$，　$\cos46^\circ=0.6947$。

这里，46°是23°的二倍，但0.6947虽比0.9205小，却不是

0.9205的一半。

三角函数与角之間的变化規律，我們目前还不能仔細討論，只能簡單談一下角度从0°变到90°时的函数变化趋势。为了便于討論，我們假定直角三角形的斜边不变，这样的条件是直角三角形一个頂点在圓弧上移动，一个頂点固定在圓心上，动半徑是直角三角形的斜边（图12）。

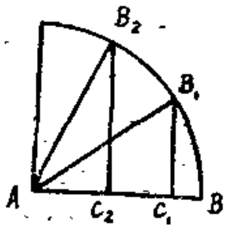


图 12

由图12可以看出：

$\angle B_2AC_2 > \angle B_1AC_1$，$B_2C_2 > B_1C_1$，而 $AC_2 < AC_1$。这就是說，在斜边相等的假定条件下，角愈大对边也愈大，而邻边愈小。換句話說，当角由0°变到90°时，对边由0逐漸增大，变到与斜边相等；而邻边則由与斜边相等变到0。

所以：$\sin A = \frac{对边}{斜边}$，由0逐漸增大到等于1。

$\cos A = \frac{邻边}{斜边}$，由1逐漸減小到等于0。

$\operatorname{tg} A = \frac{对边}{邻边}$，由0增大到无穷大，但当 $\angle A = 90°$ 时，

$\operatorname{tg} 90° = \frac{对边}{0}$ 沒有意义，所以tg90°的函数不存在。

$\operatorname{ctg} A = \frac{邻边}{对边}$，当 $\angle A = 0$ 时，$\operatorname{ctg} 0° = \frac{邻边}{0}$ 也沒有意义，所以ctg 0°的函数也不存在。当角 A 逐漸增大时，ctg A 由无穷大逐漸減小一直到0。

簡單地說，在0°到90°之間的任何角的函数是这样变化的：

对于正弦，角度增大函数也增大；

对于余弦，角度增大函数反而減小；

对于正切，角度增大函数也增大；

对于余切，角度增大函数反而減小。

例：求証$\sin 0^\circ+\cos 90^\circ=0$

証：$\because\ \sin 0^\circ=0,\quad \cos 90^\circ=0$

$\therefore\ \sin 0^\circ+\cos 90^\circ=0$

习 題 三

1. 求 $\sin 90^\circ+\cos 90^\circ=?$
2. 求 $\mathrm{tg}\,0^\circ+\cos 0^\circ=?$
3. 求 $\mathrm{tg}\,90^\circ+\mathrm{ctg}\,90^\circ=?$

§ 6 特殊角的三角函数値

已知一个銳角的度数，要求它的三角函数，可以用画图的方法来解决。例如求 25° 的正弦値，可以拿量角器和三角尺画一个 $\angle A=25^\circ$ 的直角三角形（图 13）。

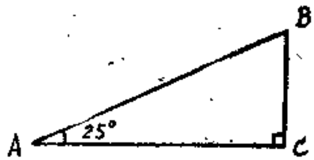


图 13

假設量得所做三角形的边長为：

$AB=5$公分，$AC=4.53$公分，$BC=2.11$公分，

則：

$$\sin 25^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{2.11}{5}=0.422;$$

$$\cos 25^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{4.53}{5}=0.906;$$

$$\mathrm{tg}\,25^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{2.11}{4.53}=0.466;$$

$$\mathrm{ctg}\,25^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{4.53}{2.11}=2.145。$$

这样，就能把25°角的三角函数値求得了；但是，这样求法旣麻煩又不精确，所以我們不采用。

用几何学的方法可以求得某些特殊角的三角函数值，例如30°，45°，60°等。下面就分别講解这些特殊角的三角函数值的求法。

1）30°角的三角函数值

首先作一个三边相等的正三角形ABD（图14），从几何学中知道，正三角形的三边互等，三个角也互等，并且都等于60°。作BD边中綫AC，则AC一定平分角A且垂直于BD。这样得到两个全等的直角三角形ABC与ADC。在三角形ABC中：

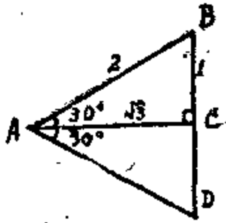


图 14

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle A=30^\circ \qquad BC=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB$$

$$\therefore \quad AB=2BC$$

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(2BC)^2-BC^2}=\sqrt{3BC^2}=\sqrt{3}\,BC$$

$$\therefore BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$$

由这里我們知道，**在有一个銳角等于30°的直角三角形中，如果把最短的直角边当作1的話，那末另外一直角边就等于$\sqrt{3}$，斜边就等于2。**

由此可知：

$$\sin 30^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}; \qquad \cos 30^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \operatorname{ctg} 30^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}。$$

2）45°角的三角函数值

作一个銳角等于45°角的直角三角形，因为三角形内角之和为180°，所以另一个銳角为：180°－（90°＋45°）＝45°，因此这种直角三角形又必然是等腰直角三角形。

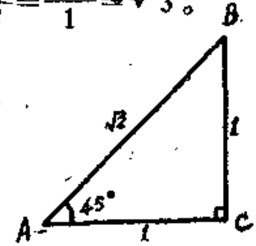


图 15

$\therefore \quad \angle A=\angle B=45^\circ$

$AC=BC$

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2}\ BC$

$\therefore \quad AC:BC:AB=1:1:\sqrt{2}$

如果把 AC 当作 1 的話，那么 BC 也为 1，AB 为 $\sqrt{2}$。

$$\therefore \quad \sin 45^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{1}=1;$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{1}=1。$$

3）60°角的三角函数值

因为60°角是 30° 角的余角，根据余角函数公式，就可以得到：

$$\sin 60^\circ=\cos(90^\circ-60^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ=\operatorname{ctg}(90^\circ-60^\circ)=\operatorname{ctg} 30^\circ=\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ=\operatorname{tg}(90^\circ-60^\circ)=\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

以上三个特殊角的三角函数值是我們經常遇到的，大家要熟記，为了便于記忆列表如表 2。

例： 求 $\operatorname{tg} 30^\circ+\sin^2 45^\circ-\cos 60^\circ$ 的值（$\sin^2 45^\circ$ 是 $\sin 45^\circ$ 的平方）

解： $\operatorname{tg} 30^\circ+\sin^2 45^\circ-\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0.577$$

特殊角的三角函数值　　表 2

角＼函数	正弦	余弦	正切	余切
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

习 题 四

1. 求 $\sin 30° + \cos 30° + \mathrm{tg}\, 30° = ?$
2. 求 $\sin 45° + \cos 60° + \mathrm{tg}\, 30° = ?$

§7 三角函数表的使用方法

不是任何角的三角函数值都能用几何方法很容易求得的。一般要求一个已知角的三角函数的値可以直接利用三角函数表。从表中可以查得任意一个已知角的正弦、余弦、正切、余切的値。現举例説明如下：

例 1 求 $\sin 26°$。

解：26°就是26°0′，从三角函数表（附录）中先找到左边注明 26°一横列，再找到上面注明 0′ 的一竖行，列与行交叉处是4384，这里的数字是表示小数点以后的小数部分，加上小数点得 $\sin 26° = 0.4384$，如表 3，是三角函数表的一部分。

例 2 求 $\sin 26°12'$。

解：在26°的横列与12′之竖行交叉处是4415

$\therefore \sin 26°12' = 0.4415$

例 3 求 $\sin 26°13'$。

解：13′在12′与18′之間，靠近12′ 首先查出 $\sin 26°12'$ 等于

正　弦　　　　　**表 3**

A	0′	6′	12′	18′	24′………48′	54′	60′		1′	2′	3′
								90°			
0°	0.0000							89°			
1°								88°			
2°								87°			
⋮								⋮			
26°	4384	4399	4415	4431	4446…………	……	4540	63°	3	5	8
⋮								⋮			
89°								0°			
90°											
	60′	54′	48′	42′	36′………12′	6′	0′	A	1′	2′	3′

余　弦

0.4415，在这一頁最右边三行的数字中，在左边注有 26° 的横列与頂上注有1′的竪行交叉处是3，这个数字表示角度增加1′函数在小数第四位数上应增加的数值（有时是減去），叫做修正值。对正弦来說，角愈大，函数值也愈大。所以，在查得sin26°12′ 的数值0.4415的第四位数上应加上 3 。

$\therefore \sin 26°13' = 0.4415 + 0.0003 = 0.4418$

例 4　求 $\cos 63°47'$。

解：47′在42与48′之間，靠近48′，在右起第 4 行找63°，在最下列找到48′，注有63°的横列和48′的竪行交叉处是4415，所以 $\cos 63°48' = 0.4415$。現在63°47′比63°48′小1′，再查63°横列与修正值1′的竪行交叉处是 3 ，对于余弦角愈小，则函数值愈大。所以：

$$\cos 63°47' = 0.4415 + 0.0003 = 0.4418$$

很明显，根据互为余角的三角函数的关系应該有：

$$\cos 63°47' = \sin(90° - 63°47') = \sin 26°13'$$

所以現在求得的 $\cos 63°47'$ 的值与例 3 中 $\sin 26°13'$ 的值是