

Applied Combinatorics

(Second Edition)

应用组合数学

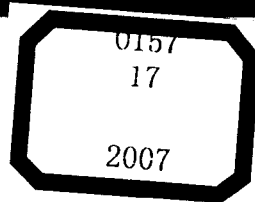
(原书第2版)

(美) Fred S. Roberts Barry Tesman 著
拉特格大学 狄克森学院

冯速 译



机械工业出版社
China Machine Press



Applied
Combinatorics
(Second Edition)

应用组合数学

(原书第2版)

(美) Fred S. Roberts Barry Tesman 著
拉特格大学 狄克森学院

冯速 译



机械工业出版社
China Machine Press

本书介绍组合数学的基本知识,以及这些知识在计算机科学、生物学、医学、遗传学等各个领域的实际应用.全书分为四个部分:第一部分介绍组合数学的基本工具,第二部分介绍计数问题,第三部分讲述组合数学求解中的存在问题,第四部分讨论优化问题.

本书布局精巧、内容翔实,讨论深入浅出,简明扼要,可作为高等院校数学专业和计算机科学专业“组合数学”课程的教材,也可以作为相关科研人员的参考书.

Simplified Chinese edition copyright © 2007 by Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

Original English language title: *Applied Combinatorics, Second Edition* (ISBN 0-13-079603-4) by Fred S. Roberts and Barry Tesman, Copyright © 2005, 1984.

All rights reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall.

本书封面贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究.

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号:图字:01-2005-0522

图书在版编目(CIP)数据

应用组合数学(原书第2版)/(美)罗伯茨(Roberts, F. S.)等著;冯速译. —北京:机械工业出版社,2007.5

(华章数学译丛)

书名原文: *Applied Combinatorics, Second Edition*

ISBN 978-7-111-20934-8

I. 应… II. ①罗… ②冯… III. 组合数学 IV. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 035697 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:迟振春

北京牛山世兴印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2007 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm·36.75 印张

定价:69.00 元

凡购本书,如有倒页、脱页、缺页,由本社发行部调换

本社购书热线:(010)68326294

译者序

本书以组合数学的实际应用为背景，非常全面地讲述了组合数学的基本知识和基本问题，以及这些知识在计算机科学、密码学、政治经济学、生物学、医学、遗传学等各个领域的实际应用。

本书分四个部分。第一部分讲述组合数学的基本工具，而其余三个部分分别讲述组合数学的三个基本问题：计数问题、存在问题和优化问题。各章以实际应用为例，引出该章的主要课题，然后对前后关联的知识点逐步展开讨论，在讨论中又提出更多的示例，力图让读者掌握所讲述的思想并灵活运用相关的方法。另外，各节给出很多相关的练习，使读者能够检验所学知识，同时引入新概念和新应用，为读者灵活运用书中的组合技术提供素材。因此，本书的一大特点就是包含大量的实际例子及练习，其中许多例子和练习都来自于最新的文献。这些例子和练习前后呼应、反复出现，形成若干系列，可以看出经过了作者的精心筛选。

本书的另一个特点是强调算法。当今计算机的快速发展和各种算法的开发是促进组合数学快速发展和广泛应用的主要动力之一，而组合数学的快速发展同样促进了计算机理论的发展及计算机在各个领域的广泛应用。所以，组合数学与计算机科学之间已经形成了密不可分的关系，组合数学是计算机科学——特别是计算机算法的基础。现在，组合数学已经成为多数大学计算机专业研究生的必修课程。

本书的第三个特点是，不仅给出了绝大多数结果的严密证明，而且不拘泥于通常教科书所用的概念和结果，对一些概念和结果进行了扩展。

本书可以作为计算机专业和数学专业高年级本科生或研究生的教材，也可以作为相关科研人员的参考书。不满足于“离散数学”课程所学内容的学生可以通过本书继续自学，而本书各章后的参考文献则为希望继续深入学习、了解科研前沿及应用前沿的读者提供了参考。

在翻译本书时，我们遇到了许多不同专业的术语。我们力图使术语简单、易懂，一些术语没有采用数学专业的说法，而是采用计算机专业的说法。对于中文特别难以反映其本质内容的术语，我们采取了不译的做法。由于书中涉及应用的多样性和译者的水平所限，难免有不当之处，敬请读者批评指正。

译者
于北京师范大学

前言

本书第2版的面世距初版时间已有20年之久。新版进行了大幅度修订，加入200多页[⊙]新材料，许多章节有了重大变更，并增加了大量新的例子与练习。但是，本书的宗旨没有改变。下面三段话引自第1版前言，这些文字至今仍是适用的。

当代数学发展最快的领域可能就是组合数学了。它之所以发展快速，一个主要原因是它在计算机科学、通信、交通运输、遗传学、实验设计和排程等方面的广泛应用。因此，本书将从应用的观点向读者介绍组合数学的工具。

组合数学的发展是同计算机的发展齐头并进的。当今的高速计算机使得各领域中实际组合问题的求解成为可能，而这些问题在不久以前还是无法解决的。这种情况增强了研究组合问题求解方法的重要性。与此同时，计算机科学的发展本身又带来了大量具有挑战性的组合问题。因此，我们很难把组合数学和计算技术割裂开来。读者将会看到本书中对计算技术的强调，我们会经常采用计算机科学中的大量应用实例，频繁讨论算法，等等。另一方面，我们认为：组合数学在大量学科中有着广阔的应用前景，我们强调的重点是应用的多样性，而不限于某一方面。

本书选取的数学题材中，许多是快速发展的组合数学教科书中相对而言称为标准的内容。另一部分题材的选择，或者来自当前的研究文献，或者由于其学科应用价值而被选用。我们相信，本书在对应用的广泛讨论方面是与众不同的。书中有若干完整的小节专门介绍这样的应用，例如开关函数，使用酶揭示未知的RNA链，信息检索中的搜索与排序，错误校正码的构造，化学成分的计算，选举中的势力预测以及斐波那契数的应用。还有一些小节介绍与卷积有关的递推的应用、欧拉链的应用以及生成函数的应用等，这在许多教材中是没有的。

第2版中的新内容

本书之所以受到欢迎，大部分原因在于它引用了最新文献和各种实际应用，推动着组合数学发展的应用仍然在不断扩展，尤其是在自然科学和社会科学中。在第2版中，许多新应用更是来自计算机科学和生物学。在增加应用题材的同时，我们也增加了某些新的主题，删去了一些特殊的内容，改变了组织结构，并对例子、练习和参考文献也做了改进与更新。

下面说明第2版中所做的某些主要修改。

第1章：增加了有关列表着色的新材料，扩充了对州立法会议日程安排的讨论，列表着色问题在书中许多地方还会出现。

第2章：在第1版中，2.16节仅限于讨论生成排列的算法方法，第2版现在补充了大量材料，并分成几个小节。2.18节介绍“好算法”的概念和NP完全问题，进行了大幅度改写和更新。此外，还添加了有关“鸽巢原理”的新章节。讨论拉姆齐理论的小节是由第1版8.1节的材料和8.2节的部分材料合成的。另外，我们还增加了讨论排列之间的倒位距离和进化论生物学中的突变问题的内容。

第3章：在3.3节中增加了图着色问题的一小节，着重讨论图着色的扩展，例如多重着色和

⊙ 这是指英文原文。——编辑注

T 着色. 这类着色问题是由现实应用引起的, 例如移动电话问题、交通灯切换和信道分配. 此外, 在本章中我们还增加了物种进化树重构的内容. 对于第 1 版第 8 章有关拉姆齐理论的许多材料中没有写进第 2 章的部分, 已改写为新的一节.

第 4 章: 这一章是全新的. 内容包括二元关系的定义及其与有向图的联系, 用有向图和关系引入的顺序以及对线性序和弱序的处理, 偏序、线性扩展和维数, 链和可比较图, 格, 布尔代数, 开关函数和门网络. 该章紧密结合应用来讨论, 其中涉及信息论、效用理论、搜索与排序以及诸如开关函数这样一些较早的应用. 这一章包含的某些应用在组合数学的文献中没有受到广泛关注, 如优先选择、搜索引擎、杂交顺序和心理物理量表法等. 基于该章中的概念的许多例子也出现在以后各章中. 第 4 章涉及的范围可以一直延续到第 11 章之后.

第 5 章: 在第 1 版中这是第 4 章. 前面几章引入的许多新概念与例子在这一章又重新出现, 例如第 4 章的弱序和第 3 章的列表着色.

第 6 章: 这是第 1 版中的第 5 章. 该章增加了有关 DNA 序列对位的新材料, 作为排列的“重置平均值”的内容.

第 7 章: 这是第 1 版中的第 6 章. 该章增加了有关密码技术和整数因子分解的新素材(在本书后面还要提到).

第 1 版原第 8 章: 这一章已经被删去, 其中的重要材料加进第 2 章, 而其余的材料已纳入书中其他章节.

第 8 章: 这是第 1 版中的第 7 章. 该章中新增加了一些例子, 这些例子以第 4 章中的概念(如弱序)为基础. 同时, 该章中还增加了一小节, 讨论图的自同构, 并在该章多处地方提到.

第 9 章: 该章增加了讨论正交阵列和密码技术的一节, 内容涉及识别码和秘密分享. 与此同时, 该章还讨论了模算术与 RSA 密码系统之间的联系, 以及秘密分享应用的一个可求解设计的内容. 此外, 该章关于“组群测试”的新内容涉及几个应用, 其中包括次品鉴别、疾病筛查、基因组图谱测绘和卫星通信.

第 10 章: 有关“合意解码”的小节是新增的, 这同寻找分子序列中的蛋白质有关, 同时加入了涉及光盘纠错校正码的内容. 关于“判读”DNA 产生蛋白质的材料也是新增加的.

第 11 章: 在 11.2 节中增加了讨论单行线问题的几小节. 这些新的内容涉及有关广场取向和栅格的最新结果, 分别反映不同城市类型的需要. 该章还增加了关于测试巨大图的连通性问题的内容, 这类问题出现在与电信业务量和网上数据有关的最新应用中. 此外, 该章还包括关于 DNA 杂交顺序的内容.

第 12 章: 这一章用若干新的例子解释概念, 包括天花疫苗接种、音响系统和石油钻井的例子. 我们写了新的一节讨论稳定婚姻问题及其许多最新的应用, 包括医院实习医生分配等. 第 1 版第 13 章中有关最大权匹配的内容已移至该章中.

第 13 章: 我们引入有关门格定理的新内容. 该章还收入许多新的实例, 讨论诸如建筑物疏散、聚类和数据挖掘以及分布式计算等问题.

保留的特点

尽管第 2 版对第 1 版做了重大修改, 但仍然突出了使本书具有独特价值的那些特点.

- 强调来自不同领域中的应用, 把这些应用作为本来的主题而不只是一些孤立的例子, 并且从最新文献中寻找应用.
- 许多例子在书中反复出现, 特别是那些与新旧主题都有联系的例子.
- 强调通过不同的练习求解问题, 用这些练习检测对常规概念掌握的程度, 引入新的概念

和应用,或者试图对读者提出应用现有组合数学技术的挑战.本书依然坚持这样一个原则,即学习组合数学的最佳方式是通过求解问题学习,实际上这也是学习任何一门数学的最佳方式.

- 把不同难度的主题组合在一起,再加以详细的注释,使本书可以在各种不同层次的课程中使用.
- 本书的组织方式允许读者按各种不同的顺序使用其中的题材,这一方面反映出组合数学中主题的某种独立性,同时这样灵活的方式又使各主题相得益彰,便于读者学习.

本书的组织方式

本书分为四个部分.第一部分包括第2、3、4章,介绍组合数学中使用的基本工具及其应用,其中引入基本计数规则以及图论与关系中使用的工具.其余三部分围绕组合数学的三个基本问题(计数问题、存在问题和优化问题)组织.这些问题在第1章中讨论.本书第二部分涉及处理计数问题的更高级工具,其中包括生成函数、递推关系、容斥原理以及波利亚理论.第三部分涉及解的存在问题,其中讨论组合设计、编码理论和图论中的特殊问题.这也是有关图论和网络连续三章(第11章至第13章)的开始,并作为图算法的导论.第四部分讨论组合优化,通过对图和网络的连续研究说明各种基本思想.这部分从过渡性的匹配与覆盖一章开始,其中又以存在问题开头,以优化问题结束.第四部分最后讨论图和网络的优化问题.将本书分为四个部分的做法带有某种主观性,因为书中的许多主题涉及组合数学的若干方面,例如某些主题既包括存在问题,又包括优化问题.然而,对于庞大的现代组合学题材,把本书分成四个部分看起来又是很合理的.

预备知识

本书可以在不同层次的课程中使用.本书大部分内容是针对主修和非主修数学和计算机科学专业的低年级和高年级学生编写的.本书也适用于具有足够数学基础的大学生(书中已清晰地指明了在入门课程中可以省略的题材).另一方面,书中包含足够的材料,能以一种快速的进度用于具有难度的研究生课程.作为本科课程的教材,本书已在拉特格大学中使用过,选课的大部分学生来自数学系和计算机科学系,其余的学生来自商学、经济学、生物学和心理系.在狄克森学院,书中的材料已在主修数学的低年级或高年级的学生中使用过.这些课程以及本书的预备知识(包括熟悉函数和集合),至少可以从微积分课程中获得.第5章和第6章要用到无穷序列和无穷级数(其实第6章大部分只用到无穷序列的基本性质,并不需要极限的概念).这里无需了解微积分中的其他传统的主题.但是,从微积分这样的课程中获得数学上的素质训练则是很必要的.此外,读者需要了解某些线性代数的工具,特别是熟悉矩阵运算.我们还假定读者了解数学归纳法(有一些教师会在课程的早期阶段复习数学归纳法,并快速复习集合的知识).书中少数可选读的几节需要用到本书所述以外的概率知识.另有几节介绍近世代数的内容,例如群和有限域.上述这些节是自足的,但是对于没有足够基础的学生而言,这样的进度可能过快.

算法

本书在很多部分把重点放在算法上.由于组合数学日益用于研究精确和有效求解复杂问题的过程,以及组合数学和计算机科学如此紧密的结合,这样做是不可避免的.我们的目标是引入算法的概念并介绍一些重要的算法实例.我们在讨论大部分的算法时,都采用一种相对形式化

的方式。这种方式很少去揭示算法的概念以及如何描述算法。主要目标在于提出算法的基本思想，而不试图以最简洁或适合计算机的形式描述算法。有人不同意用这种方法介绍算法。我们的观点则是不能用组合数学的课程代替算法的学习。计算机科学系的学生需要学习一门单独的算法课程，其中应包括对实现所述算法的数据结构的讨论。然而，学习组合数学的全体学生需要接受算法的思想，具备算法的思维方式，这种思维方式对于本学科而言是重要的也是基本的。我们认识到，我们对如何介绍算法的折中方案并不能使所有的人满意。但是这里应当指出，对于具有计算机背景的学生来说，应完成书中那些有趣的且重要的练习，把其中非形式化的算法转换成更精确的计算机算法甚至是计算机程序。

例子和应用所起的作用

书中的各种应用起了很大作用，使本书在众多的组合数学书籍中独树一帜。作者建议教师对应用进行挑选，或把它们作为课外阅读材料。书中的许多应用是用例子的形式介绍的，并在全书中重复展现。无论对教师或是学生而言，都不必成为书中不同实例和各个小节所述的应用领域的专家。应用和例子多半是自足的，倘若不是这种情况，也很容易通过因特网上的相关搜索获得对应用的理解。

组合数学同计算机科学之间的联系极其重要，在此无需特别强调。

本书中取材于生物科学的例子非常重要。我们把重点放在这样的例子上是基于下述观察：生物科学和数学科学之间的联系正在以极快的速度加强，数学和计算机科学的方法在现代生物学中扮演了且仍在扮演着重要的角色，例如，在“人类基因工程”和疾病传播建模中。让数学工作者认识到专业领域需要像组合数学这样的数学方法已变得越来越重要。此外，已经有越来越多的学校开设数学和生物学相结合的交叉课程。

数学与社会科学之间的联系程度也在迅速增加，尽管其进展速度不如数学同生物科学的联系程度。现在，计算机科学的工具和数学建模方法已应用于处理日益复杂的社会科学问题。所以，我们介绍了出现在社会科学方面的种种应用，重点是决策和投票问题。

数学证明

作出证明是数学区别于其他学科的一个重要方面。组合数学可能是一种非常好的学习数学证明的途径，通过它可以向学生介绍数学证明的概念，并教会他们如何写出完善的证明。有些学校以组合数学作为数学证明课程的入门课程。但这不是我们写这本书的目的。虽然使用本书的教师应把证明包括在内，但我们却倾向于把证明处理成略带非形式化的，而非把重点放在如何写证明上。我们将书中许多比较难的证明加上了星号，表示是可选的。

练习

本书的练习处于主角的地位。练习用于检验对常规概念掌握的程度，引入新的概念和应用，并试图作为对读者运用书中既有的组合技术提出的挑战。组合数学的本质在于，越是通晓它，越能应付种种难题，这也是大部分数学的本质。在本书中，我们尽量收入各种实用性和理论性的练习以及具有不同难度的练习。

在不同情况下使用本书的方法

本书可适用于不同层次的不同课程。我们已在几门课程中使用书中的材料，特别是在名为“组合数学”的一学期课程和名为“应用图论”的一学期课程中使用。对低年级和高年级讲授的组合

数学课程, 用第 1、2、3、5、6、7、9、10 章的大部分材料, 略去正文中由脚注指明的各节(通常为证明). 在拉特格大学一门快进度的一年级研究生课程中, Fred Roberts 把课程的重点放在证明上, 此外还在课程中融入许多可选的章节, 同时采用第 8 章或第 12 章的材料. 无论在本科生或研究生的课程中, 教师都应该用第 8 章或第 11 章以及第 12 章和第 13 章的部分内容代替第 9 章和第 10 章. 在不单独开设图论课程的情况下, 特别推荐把第 11 章包括在内. 类似地, 如果不开设运筹学课程, 特别推荐把第 13 章的部分内容包括在内. 在拉特格大学, 对本科生和研究生分别开设的课程, 讲授第 11 章至第 13 章的大部分材料.

其他的一学期或暑期课程应按照本书的材料设计, 因为大多数章是相对独立的(请参考下面的讨论). 在拉特格大学, 应用图论课程是围绕第 3 章和第 11 章讲授的, 并从书中的其余部分(第 4、12 和 13 章)及别的地方补充图论的题材(需要快速讲授 2.1 节至 2.7 节, 或者还有 2.18 节). 第 3、11、12、13 章也适于在一门介绍图算法的课程或者名为“图与网络”的课程中讲授. 全书非常适合作为现代组合数学及其应用引论的一学年教材. 对于学习过组合数学的人来说, 若要将重点放在组合数学的应用上, 可以把书中有关应用的小节和例子包括在内.

本书可以用于大学二年级的一学期或暑期课程. 这样的课程应包含第 1 章至第 3 章, 跳过第 4 章和第 5 章, 然后选用第 6 章的 6.1 节和 6.2 节, 以及第 7 章和第 11 章的部分内容, 带有星号的各节和大多数证明应予省略. 其他的题材可由教师酌情增加.

主题之间的相关性和使用本书题材的顺序

在组织任何课程时, 希望教师了解对题材相对独立性的说明. 在讲授组合数学引论的主题时, 没有被普遍接受的顺序, 对这样的引论应包含哪些主题也没有一致的看法. 我们在写本书时力求采用这样一种方法, 使各章的内容相对独立, 并能按不同的顺序讲授.

第 2 章是本书的基础部分, 介绍全书用到的基本计数规则. 第 3 章只包含足以进入到主题的图论知识, 它的重点是用以说明第 2 章提出的基本计数规则的那些图论题材. 第 3 章引入的概念在全书各处都会涉及, 尤其是在第 4、11、12 和 13 章. 教师可以把本书用于一学期或暑期的组合数学课程, 不讲授第 3 章. 但是, 我们建议至少应把图着色(3.3 节和 3.4 节)的材料包含在内. 除第 3 章外, 主要依赖关系是: 第 4 章依赖第 3 章; 第 6 章 6.2 节之后的内容依赖第 5 章; 第 7 章引用第 3 章和第 6 章中的几个例子; 第 11 章至第 13 章依赖第 3 章; 10.5 节依赖第 9 章; 第 12 章中提到的几个概念在 13.3.8 节中会用到.

处于快速发展时期的组合数学

最后应该强调, 组合数学是一门快速发展的学科, 它的方法正在迅速建立, 它的应用正在迅速扩展. 本书介绍的许多主题同研究工作的前沿紧密相关. 它是一门可以把新手很快带到前沿领域的典型学科. 我们尽力收集组合数学及其应用的参考文献, 以便使有兴趣的读者能更深入地钻研本书所讨论的主题.

致谢

作者之一 Fred Roberts 于 1976 年开始第 1 版的写作, 当时为拉特格大学组合数学的本科课程写了一部分手稿. 经过几年时间的修改和增补, 本书正式用于组合数学课程和前述的其他课程, Barry Tesman 也这样使用本书. 同时还有很多人也同样把本书作为他们的教材, 并反馈了大量意见, 这使作者受益匪浅. 作者特别要感谢下列使用者提出的非常有价值的评论: Midge Cozzens, 在东北大学使用第 1 版的草稿; Fred Hoffman, 在佛罗里达大西洋大学使用; Doug

West, 在普林斯顿大学使用; Garth Isaak, 在 Lehigh 大学使用第 2 版的草稿; Buck McMorris, 在伊利诺伊理工学院使用第 2 版的草稿.

我们特别感谢现在和过去的学生们, 他们在本书两个版本的准备阶段以多种方式提供了帮助, 包括校对、核对练习、检查各种错误, 此外他们还提出了各种宝贵的意见. Fred Roberts 对 Midge Cozzens、Shelly Leibowitz、Bob Opsut、Arundhati Ray-Chaudhuri、Sam Rosenbaum 和 Jeff Steif 等人的帮助表示感谢. Barry Tesman 对 Kathy Clawson 和 John Costango 的帮助表示感谢.

我们收到许多人对本书的评论. 我们要特别感谢以下人士, 他们在审阅第 1 版的各个阶段和其他时间曾做出极其有价值的评论: John Cozzens、Paul Duvall、Marty Golumbic、Fred Hoffman、Steve Maurer、Ronald Mullin、Robert Tarjan、Tom Trotter 以及 Alan Tucker. 在准备第 2 版的时候, 我们收到了 Steve Maurer 对第 1 版提供的非常有用的评论. Jeff Dinitz 对第 9 章和第 10 章的草稿提出了具体的意见. 关于第 2 版, 我们收到审阅者很有价值的评论, 他们是: Edward Allen、Martin Billik、John Elwin、Rodney W. Forcade、Kendra Killpatrick、Joachim Rosenthal、Sung-Yell Song、Vladimir Tonchev 和 Cun-Quan Zhang. 尽管我们收到大量的意见和评论, 但书中的疏误仍然在所难免, 我们会对此负责.

本书第 1 版的成书过程, 几经录入、复制和剪贴(剪刀加浆糊). 在这期间, Fred Roberts 得到 Lynn Braun、Carol Brouillard、Mary Anne Jablonski、Kathy King、Annette Roselli 和 Dotty Westgate 的莫大帮助. 由于出版业务的显著变化, 第 2 版又由 Barry Tesman 进行录入和剪贴(电子编辑)等工作. 由于第 1 版没有电子副本, 其扫描任务是由 Barry Tesman 以前的学生 Jennifer Becker 完成的. 在此, Barry Tesman 对她承担这一艰巨任务表示感谢, 同时还要感谢狄克逊学院数学与计算机科学系的人员提供的支持和所做的贡献.

两位作者在这里还要感谢家人的支持. 写作意味着要占用大部分的家庭时间: 为了校对要停用电话, 为了写作要取消旅游, 为了某处改进要牺牲休息时间. 我们的家人对此给予极大的帮助和理解. Fred Roberts 感谢已故双亲 Louis 和 Frances Roberts 的关爱与支持; 感谢已故岳母 Lily Marcus 在技术上和其他方面提供的帮助; 感谢妻子 Helen 的帮助, 虽然她看上去就像是一位因丈夫写书而“独守空房的女子”, 但她的帮助不只限于一如既往的支持、劝导和鼓励, 同时她也是本书其中一章的合作者, 在书中引入了她在教学中使用的各种题材和例子, 这些材料遍及书中各处; 最后还要感谢 Sarah 和 David, 在写第 1 版时, 孩子们的贡献就是保持稳定良好的情绪, 更为重要的是在成年以后, 他们以其他方式对本书做出了贡献, 比如 Sarah 介绍的公共卫生的理念目前已反映在本书中, David 对计算机科学的许多方面做出了解释, 对此在本书的一处脚注中对他表示感谢. Barry Tesman 感谢双亲 Shirley 和 Harvey Tesman 的关爱和支持; 感谢妻子 Johanna, 在这项任务中, 她是默默的同伴, 而在过去的 20 年岁月中, 她却是活跃的伴侣和朋友; 最后要感谢 Emma 和 Lucy, 因为他们是最可爱的.

Fred S. Roberts

froberts@dimacs.rutgers.edu

Barry Tesman

tesman@dickinson.edu

记 号

集合论记号

$\cup$	并集	$\emptyset$	空集
$\cap$	交集	$\{\dots\}$	集合……
$\subseteq$	子集(包含于)	$\{\dots : \dots\}$	所有满足……的集合……
$\subsetneq$	真子集	A^c	集合 A 的补
$\not\subseteq$	不是子集	$A - B$	集合 A 与 B 的差, $A \cap B^c$
$\supseteq$	包含(超集)	$ A $	集合 A 的势, A 中的元素数量
$\in$	……的元素		
$\notin$	非……的元素		

逻辑记号

$\sim$	非
$\rightarrow$	蕴涵
$\leftrightarrow$	当且仅当(等价)
iff	当且仅当

其他常用记号

$\lfloor x \rfloor$	小于或等于 x 的最大整数	$\approx$	近似等于
$\lceil x \rceil$	大于或等于 x 的最小整数	$\equiv$	与……同余
$f \circ g$	两个函数 f 和 g 的合成	A^T	矩阵 A 的转置
$f(A)$	函数 f 下集合 A 的像, 即 $\{f(a) : a \in A\}$	Π	积
(a, b)	由满足 $a < c < b$ 的所有实数 c 组成的开区间	Σ	和
$[a, b]$	由满足 $a \leq c \leq b$ 的所有实数 c 组成的闭区间	$\int$	积分
		Re	实数集合

目 录

译者序
前言
记号

第 1 章 什么是组合数学	1
1.1 组合数学的三个问题	1
1.2 组合数学的历史和应用	6
练习	7
参考文献	9

第一部分 组合数学的基本工具

第 2 章 基本计数规则	11
2.1 乘法规则	11
2.2 加法规则	16
2.3 排列	17
2.4 计算的复杂度	19
2.5 r 排列	22
2.6 子集	23
2.7 r 组合	24
2.8 概率	28
2.9 放回取样	32
2.10 分装问题	35
2.10.1 分装问题的类型	35
2.10.2 情况 1: 可区分球和可区分 盒子	36
2.10.3 情况 2: 不可区分球和可区分 盒子	36
2.10.4 情况 3: 可区分球和不可区分 盒子	37
2.10.5 情况 4: 不可区分球和不可区分 盒子	37
2.10.6 例子	38
2.11 多项式系数	40
2.11.1 带有特殊分配的分装问题	40
2.11.2 带有不可区分对象类的排列	42

2.12 酶的完全分解	44
2.13 再论带有不可区分对象类的排列	46
2.14 二项式展开	48
2.15 简单游戏中的势力	50
2.15.1 简单游戏的例子	50
2.15.2 Shapley-Shubik 势力指数	51
2.15.3 联合国安理会	53
2.15.4 两院制立法机构	54
2.15.5 成本分摊	54
2.15.6 特征函数	55
2.16 生成排列和组合	57
2.16.1 生成排列的算法	58
2.16.2 生成集合子集的算法	59
2.16.3 生成组合的算法	60
2.17 排列间的倒位距离和突变研究	62
2.18 好算法	66
2.18.1 渐近分析	66
2.18.2 NP 完全问题	68
2.19 鸽巢原理及其扩展	70
2.19.1 最简单的鸽巢原理	70
2.19.2 鸽巢原理的扩展和应用	71
2.19.3 拉姆齐数	73
附加练习	76
参考文献	77
第 3 章 图论概述	83
3.1 基本概念	83
3.1.1 一些例子	83
3.1.2 有向图和图的定义	86
3.1.3 标签有向图 and 同构问题	88
3.2 连通性	92
3.2.1 有向图中的可达性	92
3.2.2 图中的连通性	93
3.2.3 强连通有向图和连通图	94
3.2.4 子图	94
3.2.5 连通分支	95
3.3 图着色及其应用	99
3.3.1 一些应用	99

3.3.2	平面图	102
3.3.3	计算色数	104
3.3.4	2可着色图	105
3.3.5	图着色变形	108
3.4	色多项式	116
3.4.1	定义和例子	116
3.4.2	化简定理	118
3.4.3	色多项式的性质	120
3.5	树	123
3.5.1	树的定义和例子	123
3.5.2	树的性质	124
3.5.3	定理 3.15 的证明	125
3.5.4	支撑树	125
3.5.5	定理 3.16 的证明和相关结果	127
3.5.6	化学键和树的数量	127
3.5.7	种系发生树的重建	130
3.6	根树的应用	133
3.6.1	定义	133
3.6.2	搜索树	135
3.6.3	定理 3.24 的证明	136
3.6.4	排序	137
3.6.5	完美种系发生问题	139
3.7	计算机中图的表示	144
3.8	再论拉姆齐数	148
	参考文献	150
第 4 章	关系	156
4.1	关系	156
4.1.1	二元关系	156
4.1.2	关系的性质/有向图中的模式	158
4.2	顺序关系及其变形	163
4.2.1	定义顺序关系的概念	163
4.2.2	顺序关系的图表示	166
4.2.3	线性序	167
4.2.4	弱序	168
4.2.5	稳定婚姻	169
4.3	偏序的线性扩展	172
4.3.1	线性扩展和维数	172
4.3.2	链和反链	175
4.3.3	区间顺序	178
4.4	格和布尔代数	180
4.4.1	格	180
4.4.2	布尔代数	182

参考文献	186
------	-----

第二部分 计数问题

第 5 章	生成函数及其应用	189
5.1	生成函数的例子	189
5.1.1	幂级数	189
5.1.2	生成函数	192
5.2	生成函数的运算	197
5.3	计数的应用	201
5.3.1	取样问题	201
5.3.2	关于分装问题的一个注释	205
5.4	二项式定理	208
5.5	指数生成函数和排列的生成函数	213
5.5.1	指数生成函数的定义	213
5.5.2	排列计数的应用	214
5.5.3	可区分球到不可区分盒子的分配	216
5.6	概率生成函数	218
5.7	Coleman 和 Banzhaf 的势力指数	221
	参考文献	224
第 6 章	递推关系	226
6.1	一些例子	226
6.1.1	一些简单的递推关系	226
6.1.2	斐波那契数及其应用	231
6.1.3	错位排列	233
6.1.4	涉及多个序列的递推关系	236
6.2	特征根方法	240
6.2.1	不同根的情况	240
6.2.2	第 k 个斐波那契数的计算	242
6.2.3	重根的情况	243
6.3	使用生成函数求解递推关系	247
6.3.1	方法	247
6.3.2	错位排列	251
6.3.3	生成函数的联立方程	253
6.4	一些涉及卷积的递推关系	256
6.4.1	简单有序根树的数量	256
6.4.2	计算机中数的序列相乘的方法	259
6.4.3	RNA 中的二级结构	261
6.4.4	由苯环所构建的有机化合物	262
	参考文献	268

第 7 章 容斥原理	270
7.1 容斥原理及其应用	270
7.1.1 一些简单例子	270
7.1.2 定理 7.1 的证明	272
7.1.3 素数、密码学和筛	272
7.1.4 概率情况	276
7.1.5 可区分球和盒子的分装问题	276
7.1.6 色多项式	277
7.1.7 错位排列	279
7.1.8 计数组组合	280
7.1.9 车多项式	281
7.2 正好有 m 个性质的对象数量	285
7.2.1 主要结果及其应用	285
7.2.2 定理 7.4 和定理 7.5 的证明	289
参考文献	292
第 8 章 波利亚计数理论	294
8.1 等价关系	294
8.1.1 不同的构形与数据库	294
8.1.2 等价关系的定义	294
8.1.3 等价类	298
8.2 排列群	300
8.2.1 排列群的定义	300
8.2.2 排列群衍生的等价关系	302
8.2.3 图的自同构	303
8.3 伯恩赛德引理	306
8.3.1 伯恩赛德引理的陈述	306
8.3.2 伯恩赛德引理的证明	307
8.4 不同的着色	309
8.4.1 着色的定义	309
8.4.2 等价着色	310
8.4.3 自同构下的图着色等价	312
8.4.4 开关函数的情况	313
8.5 循环指标	316
8.5.1 作为循环积的排列	316
8.5.2 波利亚定理的特殊情况	317
8.5.3 再论自同构下的图着色等价	318
8.5.4 开关函数的情况	318
8.5.5 排列群的循环指标	319
8.5.6 定理 8.6 的证明	320
8.6 波利亚定理	322
8.6.1 着色的目录	322
8.6.2 计算模式目录	323
8.6.3 开关函数的情况	325

8.6.4 波利亚定理的证明	325
参考文献	327

第三部分 存在问题

第 9 章 组合设计	329
9.1 区组设计	329
9.2 拉丁方	332
9.2.1 一些例子	332
9.2.2 正交拉丁方	333
9.2.3 有关正交族的存在结果	336
9.2.4 定理 9.3 的证明	339
9.2.5 正交阵列及其在密码学中的 应用	340
9.3 有限域与拉丁方族	344
9.3.1 模算术	344
9.3.2 模算术和 RSA 密码系统	345
9.3.3 有限域 $GF(p^k)$	347
9.3.4 当 n 是素数幂时, $n \times n$ 拉丁方的 完全正交族的构造	349
9.3.5 当 $n = p^k$ 时, 完全正交族的 构造的证明	349
9.4 平衡不完全区组设计	352
9.4.1 (b, v, r, k, λ) 设计	352
9.4.2 (b, v, r, k, λ) 设计存在的 必要条件	354
9.4.3 费希尔不等式的证明	356
9.4.4 可分解设计	357
9.4.5 施泰纳三元系统	358
9.4.6 对称平衡不完全区组设计	360
9.4.7 从已有的设计构建新的 (b, v, r, k, λ) 设计	361
9.4.8 组群测试及其应用	362
9.4.9 施泰纳系统和国家彩票	364
9.5 有限射影平面	369
9.5.1 基本性质	369
9.5.2 射影平面、拉丁方和 (v, k, λ) 设计	372
参考文献	375
第 10 章 编码理论	378
10.1 信息传输	378
10.2 编码与解码	379
10.3 错误校正码	382

10.3.1	错误校正和汉明距离	382
10.3.2	汉明界	385
10.3.3	错误的概率	385
10.3.4	合意解码及其与寻找分子序列 中的模式之间的关系	386
10.4	线性代码	393
10.4.1	生成矩阵	393
10.4.2	使用线性代码的错误校正	394
10.4.3	汉明码	397
10.5	运用区组设计确定错误校正码	400
10.5.1	阿达马码	400
10.5.2	构建阿达马设计	400
10.5.3	最丰富的 (n, d) 代码	405
10.5.4	一些应用	408
	参考文献	410
第 11 章	图论中的存在问题	413
11.1	深度优先搜索: 连通性测试	413
11.1.1	深度优先搜索	413
11.1.2	深度优先搜索的计算复杂度	414
11.1.3	深度优先搜索算法的形式 描述	415
11.1.4	巨大图的连通性测试	416
11.2	单行线问题	418
11.2.1	Robbin 定理	418
11.2.2	深度优先搜索算法	419
11.2.3	高效单行线分配	420
11.2.4	栅格的高效单行线分配	422
11.2.5	环状城市和互联网中的通信	423
11.3	欧拉链和欧拉路径	427
11.3.1	哥尼斯堡桥问题	427
11.3.2	寻找欧拉闭链的算法	428
11.3.3	关于欧拉链和欧拉路径的更多 结果	430
11.4	欧拉链和欧拉路径的应用	432
11.4.1	“中国邮差”问题	432
11.4.2	计算机绘图	433
11.4.3	街道清扫	433
11.4.4	寻找未知的 RNA/DNA 链	435
11.4.5	编码应用	437
11.4.6	德布鲁因序列和电信	439
11.5	哈密顿链和哈密顿路径	443
11.5.1	定义	443

11.5.2	图存在哈密顿回路的充分 条件	444
11.5.3	有向图存在哈密顿循环的 充分条件	446
11.6	哈密顿链和哈密顿路径的应用	449
11.6.1	锦标赛	449
11.6.2	拓扑排序	451
11.6.3	运筹学中的调度问题	452
11.6.4	设备设计	452
11.6.5	杂交顺序	453
	参考文献	456

第四部分 组合优化

第 12 章	匹配与覆盖	461
12.1	一些匹配问题	461
12.2	一些存在结果: 二部匹配和相异 表示系统	465
12.2.1	二部匹配	465
12.2.2	相异表示系统	467
12.3	任意图的完美匹配的存在性	471
12.4	最大匹配和最小覆盖	473
12.4.1	顶点覆盖	473
12.4.2	边覆盖	475
12.5	寻找最大匹配	476
12.5.1	M 增广链	476
12.5.2	定理 12.7 的证明	477
12.5.3	寻找最大匹配的算法	478
12.6	匹配尽可能多 X 的元素	481
12.7	最大权匹配	483
12.7.1	再论“中国邮差”问题	483
12.7.2	最优分配问题(最大权匹配) 的算法	484
12.8	稳定匹配	488
12.8.1	Gale-Shapley 算法	489
12.8.2	稳定匹配的数量	490
12.8.3	稳定匹配的结构	491
12.8.4	稳定婚姻的扩展	492
	参考文献	495
第 13 章	图和网络的优化问题	497
13.1	最小支撑树	497
13.1.1	Kruskal 算法	497

13.1.2 定理 13.1 的证明	499	13.3.4 增广链	515
13.1.3 Prim 算法	500	13.3.5 最大流算法	516
13.2 最短路径问题	502	13.3.6 寻找增广链的标记过程	517
13.2.1 问题	502	13.3.7 最大流算法的复杂度	519
13.2.2 Dijkstra 算法	504	13.3.8 再论匹配	520
13.2.3 对调度问题的应用	506	13.3.9 门格定理	521
13.3 网络流	510	13.4 最小成本流问题	528
13.3.1 最大流问题	510	参考文献	532
13.3.2 分割	512	人名索引	535
13.3.3 一个不完善的最大流算法	513	主题索引	543

第 1 章 什么是组合数学

1.1 组合数学的三个问题

现代数学中发展最快的领域也许就是组合数学了. 组合数学的研究对象是排列、模式、设计、配置、调度、关联和布局. 在当今世界中, 活跃在各个领域的人们发现解决具有组合数学性质的问题的必要性. 计算机科学家为了给复杂的语句编码, 需要考虑数字和开关的模式(pattern). 商店经理着手进行工具或工作场所的人员配置(assignment). 农业专家为不同的田地分配(assign)试验苗. 电器工程师筛选电路布局(configuration). 银行家研究电子资金转账的模式(pattern), 而空间科学家研究把信息传送到遥远的卫星的模式(pattern). 工业工程师为使生产高效考虑产品的调度(schedule)和厂房的布局(configuration). 大学的教务官安排(arrange)教室以满足时间段和学生之间的调度(schedule). 化学家考虑不同原子和分子的可能关联(connection)以及分子中原子的排列(arrangement). 运输管理人员安排(arrange)公共汽车或飞机的调度(schedule). 语言学家考虑使用未知字母的单词排列(arrangement). 遗传学家考虑把基的排列(arrangement)组合成 DNA 链、RNA 链等. 统计学家考虑为实验设计(design)替代方案.

这些都是组合数学的基本问题. 这些基本问题是存在问题(existence problem)、计数问题(counting problem)和优化问题(optimization problem). 存在问题研究的是: 是否至少存在一种特定种类的排列? 计数问题研究的是: 存在多少种排列? 优化问题所关心的是: 在各种可能的排列中, 选择对应于某个标准来说最好的排列. 我们用若干例子来说明这三个问题.

【例 1.1 实验设计】 考虑测试五种药物对人体药效的实验设计. 假设这些药物编号为 1, 2, 3, 4, 5. 我们可以挑选五个人, 并给每一个人不同的药物.

1

可是, 特定人可能对特定药物产生过敏反应, 或对该药效是免疫的. 因此, 我们有可能得到偏差很大的结果. 更有效的方法应该是在连续的一段期间, 例如 5 天, 给每个人每一种药物. 表 1.1 给出这一实验的一种可能安排. 这一安排有什么错误之处吗? 其一, 一种药物在这一周摄取的日期可能对结果产生影响(比如在周一早晨还没有醒酒的人可能对周一的药物没有正常的反应). 其二, 较早时吃的药可能对晚些时候吃的药的性能产生影响. 因此, 让每个人按相同顺序吃这些药物可能导致结果的偏差.

表 1.1 药物实验设计

	日期				
	M	Tu	W	Th	F
A	1	2	3	4	5
B	1	2	3	4	5
C	1	2	3	4	5
D	1	2	3	4	5
E	1	2	3	4	5

对象

注: 其中, 每行对应于给定的实验对象, 每列对应于给定的日期, 各项表示某一天某个人吃了某种药.

解决这些问题的一个方法就是简单地要求不能有两个人在同一天吃相同的药物. 那么这一实验的设计就形成一个 5×5 的表格, 它的每一项都是数字 1, 2, 3, 4, 5 中的一个, 且每一行的项完全不同, 每一列的项也完全不同. 这是一个特殊的模式. 对这一药物实验的设计者来说, 关键问题是: 存在这样的设计吗? 这就是组合数学的存在问题. ■

下面从更一般的角度提出这一问题. 我们定义拉丁方(Latin square)[⊖]是以数字 1, 2, 3, ..., n 为项的 $n \times n$ 表格, 而且不存在数字在同一行或同一列出现多于 1 次的情况. 同时, 拉丁方要求

[⊖] 术语“拉丁方”来自于这样的事实: 表格中的元素通常是用拉丁字母表中的字母表示的.