李志斌 编著

非线性数学物理方程的行波解

科学出版社
www.sciencep.com

非线性数学物理方程的行波解

李志斌 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍近年来国内外流行的一些计算非线性数学物理方程，特别是非线性发展方程解析行波解的代数方法，包括混合指数方法、齐次平衡方法、双曲函数展开方法和 Jacobi 椭圆函数展开方法. 通过大量实例深入浅出地介绍每种方法的基本原理和具体应用以及这些方法的计算机实现.

本书可供理工科高年级大学生和研究生以及相关科技人员阅读参考.

图书在版编目（CIP）数据

非线性数学物理方程的行波解/李志斌编著. —北京：科学出版社，2007
ISBN 978-7-03-018371-2

Ⅰ. 非… Ⅱ. 李… Ⅲ. 非线性—数学物理方程 Ⅳ. O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 158297 号

责任编辑：赵彦超 吕 虹／责任校对：李奕萱
责任印制：安春生／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007年1月第一次印刷 印张：10 3/4
印数：1—2 000 字数：197 000

定价：26.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

近年来，受数学机械化思想的影响，一些新的处理非线性问题的数学方法与技巧异军突起，引人瞩目. 尤其值得关注的是在非线性数学物理方程解析解的解法研究领域中出现的各种代数方法，这些方法一方面丰富了非线性科学的研究内容，另一方面也为非线性微分方程求解的机械化找到了突破口，因此有必要对这些方法进行较系统的整理和总结.

本书内容主要涉及运用代数方法求解非线性发展方程，力求通过求解一些具体的非线性发展方程和方程组，说明非线性科学中的一些概念和各种代数方法的基本原理，并特别强调这些方法的计算机实现.

全书分五章. 第一章引入非线性发展方程孤立波解的概念，并通过求解一些经典的波方程和反应扩散方程说明孤立波解的传统求解方法. 第二章至第五章分别介绍构造非线性发展方程孤立波解、周期波解等的直接代数方法，包括混合指数方法、齐次平衡方法、双曲函数展开方法和 Jacobi 椭圆函数展开方法. 由于所介绍的代数方法都是将非线性微分方程的求解问题转化为对非线性代数方程的求解，因此在附录中还简要介绍了非线性代数方程组的吴文俊消元法.

非线性微分方程的求解方法很多，还有一些可以划归为代数方法的论题，例如 Hirota 方法、Darboux 变换方法等，由于有专著论述，所以本书没有涉及.

本书的编写及完成得到国家基础研究发展规划项目“数学机械化与自动推理平台”以及“数学机械化应用推广专用经费”的资助. 感谢王明亮教授、石赫研究员以及审稿人的热情支持和真诚帮助.

由于作者的水平和能力有限，书中难免出现不当之处甚至错误，恳请读者批评指正.

李志斌

2006 年 12 月

目　　录

第一章　非线性发展方程及其孤立波解

以应用为目的, 或以物理、力学等其他学科问题为背景的微分方程的研究, 不仅是传统应用数学中一个最主要的内容, 也是当代数学的一个重要组成部分. 它是数学理论与实际应用之间的一座重要桥梁, 研究工作一直非常活跃, 研究领域日益扩大.

目前微分方程研究的主体是非线性微分方程, 特别是非线性偏微分方程. 很多意义重大的自然科学和工程技术问题都可归结为非线性偏微分方程的研究. 另外, 随着研究的深入, 有些原先可用线性偏微分方程近似处理的问题, 也必须考虑非线性的影响.

求解非线性微分方程远比求解线性微分方程要困难得多, 线性微分方程的一些基本性质在非线性微分方程中不再成立, 很难用一个统一的方法来处理后者. 在大多数情况下, 非线性微分方程的求解只能依赖于数值解法. 多年来, 数值解法在非线性微分方程的求解上虽然取得了令人瞩目的进展, 但这种方法存在着明显的局限性: 首先, 它只能针对给定的个别初值计算数值解, 而且只能计算有限次. 这样, 数值解不可能包含原方程解能够表示无穷情况的全局特征. 在很多情况下, 人们不仅需要知道一些个别解的具体数值, 更希望了解方程解的一般定性特征, 它对问题的描述往往更深刻; 其次, 数值解本身还存在非线性计算不稳定性和解的可靠性问题. 因此, 非线性微分方程求解解析解的工作, 就显示出了很重要的理论和应用价值.

从传统的观点来看, 求偏微分方程的解析解 (也称为精确解) 是十分困难的. 然而经过 40 年的研究和探索, 对某一类非线性偏微分方程, 人们已经找到了一些构造解析解的方法. 这类方程通常用于描述随时间而演变的过程, 我们称之为非线性发展方程或演化方程. 例如, 著名的反散射方法以及各种函数变换方法等等, 都是构造一些非线性发展方程解析解的有效方法. 通过这些方法获得的非线性发展方程的诸多精确解, 合理地解释了相关的自然现象, 极大地推动了相关学科如物理学、力学、应用数学以及工程技术的发展.

自然界中由非线性现象引出的许多非线性发展方程中蕴藏着一系列十分有效的求解方法和技巧, 其中许多方法都是构造性和代数化的, 这些方法所涉及到的运算和推理往往十分复杂. 近年来, 随着计算机符号计算的出现和广泛应用, 人们以计算机为手段, 积极探索那些过去不能处理的非线性问题, 从中发掘出规律性的认识, 并从共性、普适性方面探讨各种非线性系统的行为, 现已取得了不少深入的成果, 有很好的发展前途. 特别是受数学机械化思想的影响, 在非线性发展方程解析解的

解法研究中出现了各种代数方法，在某些计算机代数系统上甚至出现了求特定形式解析解的专用软件包.

本书主要介绍近年来国内外流行的一些求解非线性发展方程解析解的代数方法，强调这些方法之间的联系，通过例子深入浅出地介绍每种方法的基本原理和具体应用. 本章首先给出非线性发展方程孤立波解的概念，然后通过对一些经典的波方程——Burgers方程、Korteweg-de Vries方程、Boussinesq方程、Schrödinger方程、sine-Gordon 方程和 Vakhnenko 方程以及反应扩散方程 ——Fisher 方程和 Huxley 方程的求解来介绍和说明孤立波解的传统求解方法.

§1.1　非线性发展方程的孤立波解

考虑 1 + 1 维非线性发展方程

$$H(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0, \tag{1.1.1}$$

这里 x 和 t 是自变量，分别表示空间与时间坐标，u 是 x,t 的函数. H 是关于未知函数 u 及其导数的适当函数.

若方程 (1.1.1) 的解 $\phi(\xi)$ 仅以 $\xi=x-ct$ 的形式依赖于 x 和 t，其中 c 是常数 (表示波速)，则称为行波 (traveling wave) 解. 当 $c>0$ 时，$\phi(\xi)$ 是右行波，当 $c<0$ 时，$\phi(\xi)$ 是左行波. 行波解在非线性科学中起着非常重要的作用，它可以很好地描述各种自然现象，例如振动、传播波以及孤立子等.

若方程 (1.1.1) 的行波解 $\phi(\xi)$ 是局部化的，则 $\phi(\xi)$ 称为孤立波 (solitary wave) 解. 这里的 "局部化" 是指 $\phi(\xi)$ 由 $\xi\to-\infty$ 时的一个渐近态到 $\xi\to+\infty$ 时的另一渐近态之间的过渡，本质上是在 ξ 变化的某个局部范围内完成的. 这里 $\xi\to-\infty$ 时的渐近态与 $\xi\to+\infty$ 时的渐近态可以具有相同的值，也可以具有不同的值. 例如，钟状 (bell) 孤立波和环状 (loop) 孤立波的两个渐近状态具有相同的值；而扭状 (kink) 孤立波两个渐近状态的值则不同，且 $\phi(\xi)$ 由 $\xi\to-\infty$ 时的渐近态单调地过渡到 $\xi\to+\infty$ 时渐近态，在反应扩散问题的研究中，这种形式的孤立波解也称作波前 (wave front) 解. 这三种类型的孤立波解如图 1.1～ 图 1.3 所示.

如果一个发展方程的孤立波，在与其他孤立波互相碰撞或作用后，仍保持其形状和速度不变，仅有相位发生变化，则称这种孤立波为孤立子 (soliton). 如图 1.4 和图1.5所示. 孤立子的形状有多种多样，除钟状孤立子、环状孤立子和扭状孤立子外，还有包络孤立子、反孤立子、哨孤立子、呼吸孤立子等等. 但并非所有的孤立波都是孤立子. 如果经互相作用后孤立波的波形受到破坏或速度发生了变化，这种孤立波就不是孤立子.

孤立子作为一种特殊的相干结构，是发展方程中色散与非线性两种作用相互平

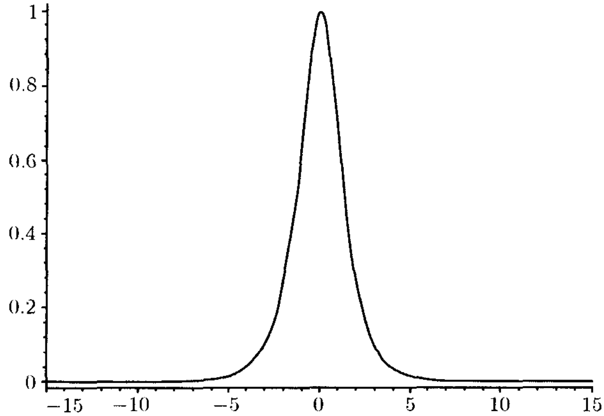

图 1.1 沿 x 方向传播的钟状孤立波在 t 时刻的图像

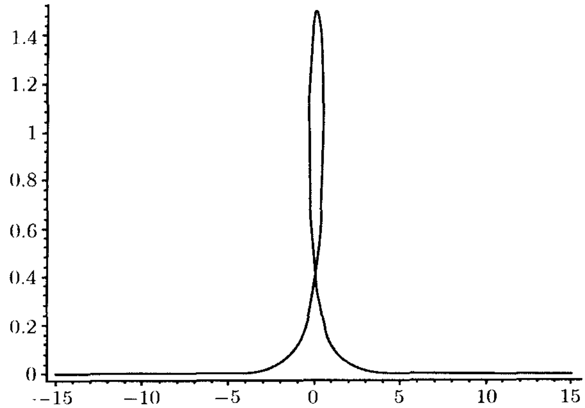

图 1.2 沿 x 方向传播的环状孤立波在 t 时刻的图像

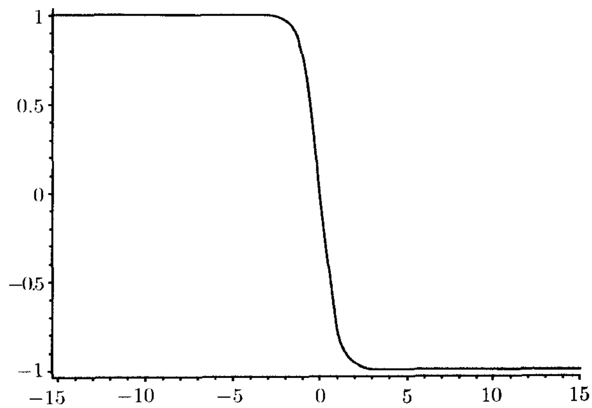

图 1.3 沿 x 方向传播的扭状孤立波在 t 时刻的图像

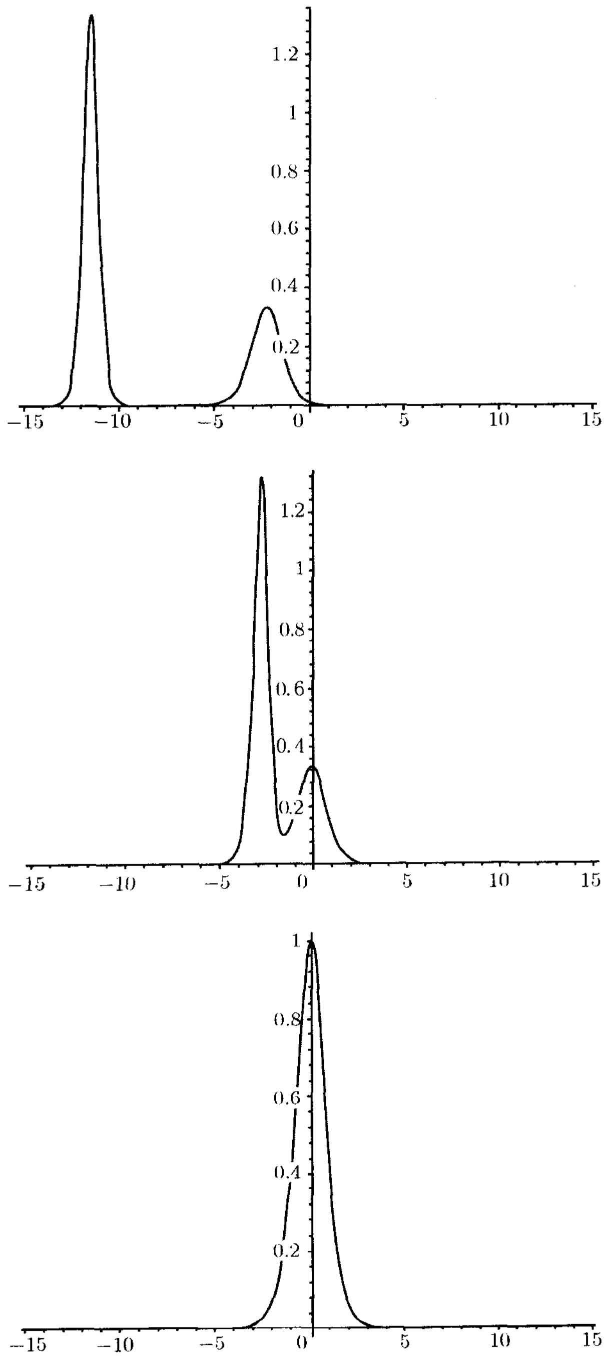

图 1.4　沿 x 方向传播的钟状孤立子在不同时刻的图像

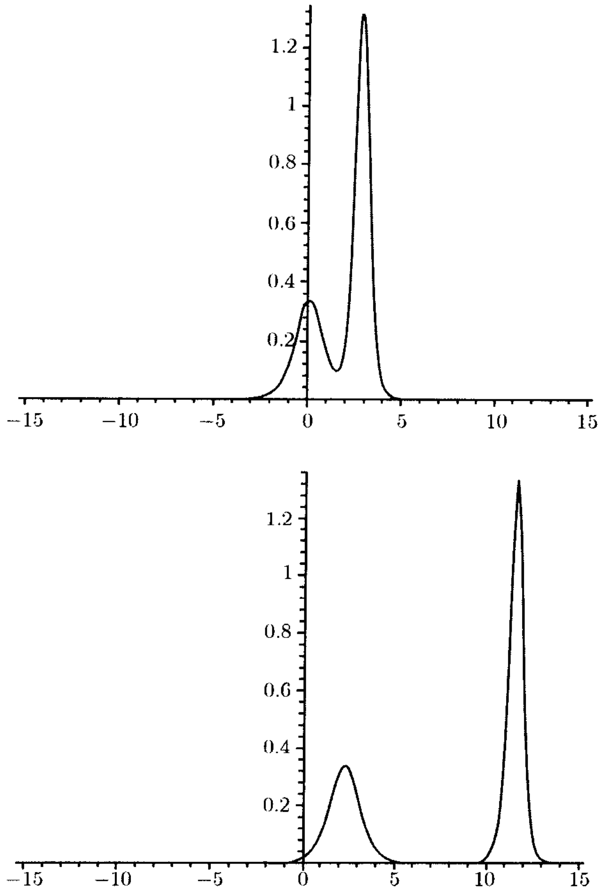

图 1.4(续)

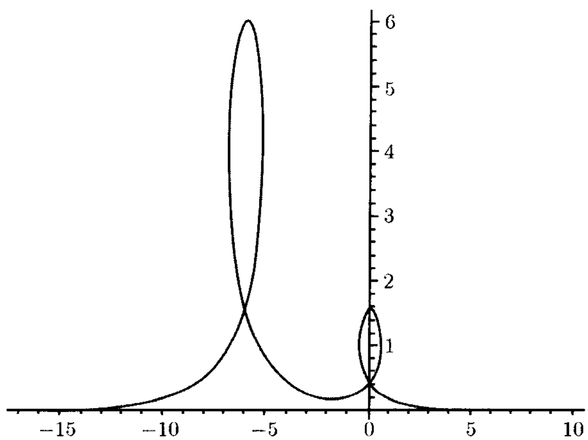

图 1.5 沿 x 方向传播的环状孤立子在不同时刻的图像

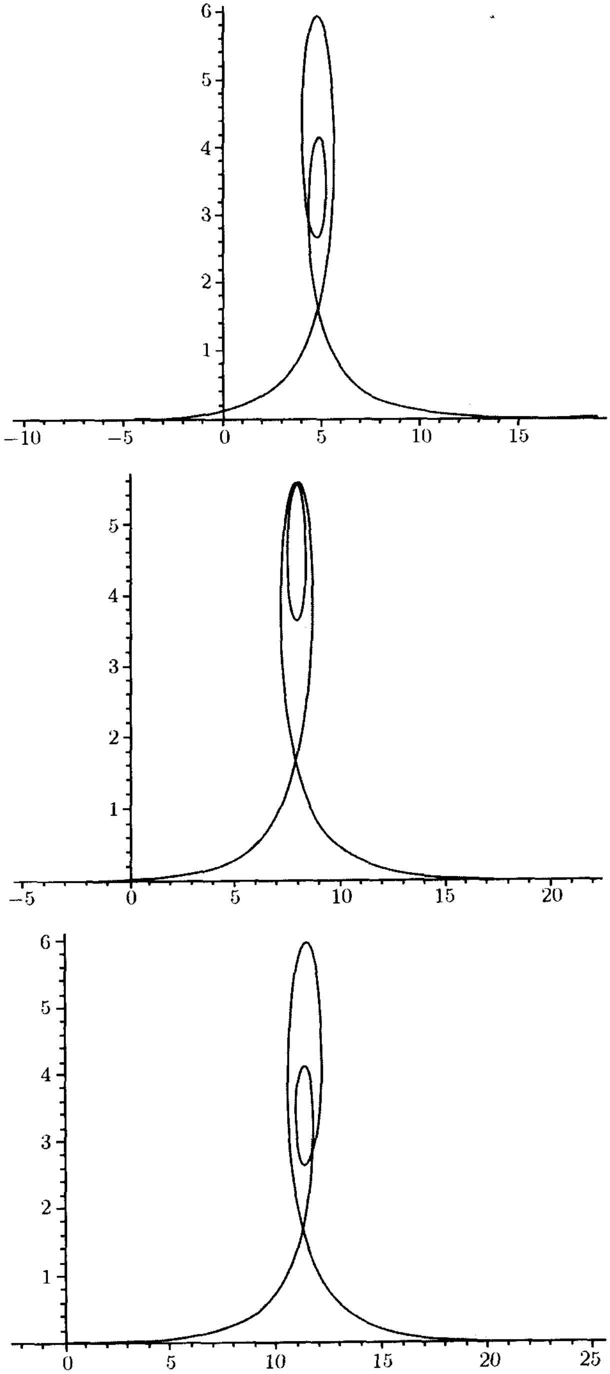

图 1.5(续)

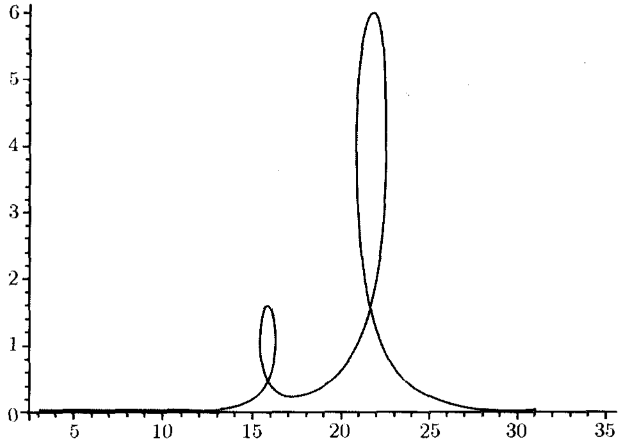

图 1.5(续)

衡的结果. 它的主要特点是具有超强的稳定性：两个不同速度的孤波相互碰撞后,其波形仍然保持不变, 如同刚性粒子一样. 人们对孤立子早有认识, 1834 年, Scott-Russell 首次观察到了浅水波中的孤立子现象, 1872 年, Boussinesq 首次求得孤立子解, 1895 年, Korteweg-de Vries 建立了著名的 KdV 方程, 并得到了它的周期波解和孤立子解. 孤立子理论目前已经发展为非线性科学的一个重要组成部分. 随着孤立子问题及其理论研究的深入, 一大批具有孤立子解的非线性演化方程为人们所发现, 如 KdV 方程、非线性 Schrödinger 方程、sine-Gordon 方程等等.

§1.2 直接积分方法

求发展方程的行波解, 一般先将偏微分方程化为常微分方程来求解. 这种方法已广为应用. 许多简单但非常重要的非线性发展方程的行波解, 特别是孤立波解都可以通过直接积分获得. 下面我们给出一些经典波方程的周期波解和孤立波解.

1.2.1 Burgers 方程

在非线性发展方程中, Burgers 方程是一个很有代表性的耗散波方程. 它是最简单的非线性扩散波动的模型, 起源于湍流理论的研究. Burgers 方程可描述许多物理现象, 如黏性介质中的声波, 具有有限电导的磁流波, 充满流体的黏弹性管中的波等, 其一般形式为

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} = 0, \tag{1.2.1}$$

其中 α 为耗散系数.

求非线性发展方程的行波解可将方程的解写成下列形式：

$$u = \phi(\xi), \quad \xi = x - ct + \xi_0, \tag{1.2.2}$$

其中 c 为常数, 表示波速, ξ_0 为任意常数.

将 (1.2.2) 代入方程 (1.2.1), 两边关于 ξ 积分, 得

$$-c\phi+\alpha\phi'-\frac{1}{2}\phi^2=A, \tag{1.2.3}$$

其中 $'=\dfrac{d}{d\xi}$, A 为积分常数. 由 (1.2.3) 有

$$\phi'=\frac{1}{2\alpha}(\phi^2-2c\phi-2A). \tag{1.2.4}$$

考虑方程 (1.2.4) 右端, 设

$$\phi^2-2c\phi-2A=0 \tag{1.2.5}$$

有两个实根 ϕ_1 和 ϕ_2, 其中

$$\phi_1=c-\sqrt{c^2+2A},\quad \phi_2=c+\sqrt{c^2+2A}.$$

为保证方程 (1.2.5) 有两个实根, 要求 $c^2+2A>0$. 注意 ϕ_1, ϕ_2 满足

$$\phi_1+\phi_2=2c,\quad \phi_1-\phi_2=2\sqrt{c^2+2A}.$$

这样, 方程 (1.2.4) 可以改写成

$$\phi'=\frac{1}{2\alpha}(\phi-\phi_1)(\phi-\phi_2). \tag{1.2.6}$$

对方程 (1.2.6) 积分, 求得

$$\begin{aligned}\phi&=\frac{\phi_1+\phi_2}{2}-\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\tanh\left[\frac{\phi_1-\phi_2}{4\alpha}(\xi+\xi_0')\right]\\&=c-\sqrt{c^2+2A}\tanh\left[\frac{\sqrt{c^2+2A}}{2\alpha}(\xi+\xi_0')\right],\end{aligned}$$

其中 ξ_0' 为任意常数.

返回原来的变量, 可得方程 (1.2.1) 的一个精确解

$$u(x,t)=c-\sqrt{c^2+2A}\tanh\left[\frac{\sqrt{c^2+2A}}{2\alpha}(x-ct+\xi_0^*)\right]. \tag{1.2.7}$$

特别地, 若取 $A=0$, 解 (1.2.7) 化为

$$u(x,t)=c-c\tanh\left[\frac{c}{2\alpha}(x-ct+\xi_0^*)\right], \tag{1.2.8}$$

其中 c, ξ_0^* 均为任意常数.

需要注意的是, 当 $\xi \to -\infty$ 时, $u(x,t) \to 2c$; 当 $\xi \to +\infty$ 时, $u(x,t) \to 0$. 由此可见, Burgers 方程的解 (1.2.7) 具有这样的性质: 用一个连续变化的曲线把 $\xi \to -\infty$ 时解的渐近态 $2c$ 与 $\xi \to +\infty$ 时的另一渐近态 0 光滑地联结起来, 于是解 (1.2.7) 为孤立波, 这样的孤立波称为冲击波 (shock wave).

考虑线性化的 Burgers 方程

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0, \tag{1.2.9}$$

其解为

$$u(x,t) = A + B\exp\left(-\frac{c}{\alpha}(x - ct + \xi_0)\right), \tag{1.2.10}$$

其中 $c > 0$, A, B 是常数.

由解 (1.2.10) 知, 当 $\xi \to -\infty$ 时, $u(x,t) \to \infty$; 当 $\xi \to +\infty$ 时, $u(x,t) \to A$. 因此, 方程 (1.2.9) 不可能有这样的定态解: 用一连续曲线把两个常数态光滑地联结起来.

在 Burgers 方程中, 由于非线性项与二阶导数项同时存在, 它们相互平衡的结果, 形成了用连续变化的曲线把两个常数渐近态光滑地联结起来的波形. 由此可见, 二阶导数项有阻止波形变陡的趋向, 或者更确切地说, 有把非线性项产生的 "陡峭" 波形变成光滑平顺波形的趋向.

1.2.2 Korteweg-de Vries 方程

Korteweg 和 de Vries 在研究浅水波的传播时首先推导出了 KdV 方程

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} = 0, \tag{1.2.11}$$

其中 α 为常数. 他们还求出了 KdV 方程的孤立波解, 成功地解释了 Russell 早年观察到的一种奇特的水波现象, 从理论上证实了孤立波的存在.

自 20 世纪 60 年代中期以来, 随着非线性现象研究的深入, 人们发现有一大类描述非线性作用下的波动方程或方程组, 在长波近似和小振幅假定下, 均可归结为 KdV 方程. 例如等离子体的磁流波、离子声波、非谐振晶格的振动、液气混合物中的压力波以及在低温下非线性晶格的声子波包的热激发等等. 因此, KdV 方程是应用科学中一个十分重要的非线性发展方程.

方程 (1.2.11) 中的参数 α 可正可负, 若 $\alpha < 0$, 作变换 $u \to -u$, $x \to -x$, $t \to t$, 则 (1.2.11) 可变为

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xxx} = 0.$$

因此, 不失一般性, 可假设方程 (1.2.11) 中 $\alpha > 0$.

将 (1.2.2) 代入方程 (1.2.11), 关于变量 ξ 积分一次得

$$-c\phi+\frac{1}{2}\phi^2+\alpha\phi''=A, \tag{1.2.12}$$

其中 A 为积分常数. 在 (1.2.12) 两端乘以 ϕ', 再积分一次得

$$-3\alpha(\phi')^2=\phi^3-3c\phi^2-6A\phi-6B, \tag{1.2.13}$$

其中 B 也为积分常数. 记 (1.2.13) 右端为 $f(\phi)$.

对 (1.2.13) 积分, 将涉及椭圆积分问题. 为此, 引进椭圆函数. 设

$$v=\int_0^\theta\frac{dt}{\sqrt{1-r^2\sin^2 t}},$$

将 θ 看作 v 的函数, 分别称

$$\mathrm{sn}(v,r)=\sin\theta,\quad \mathrm{cn}(v,r)=\cos\theta,\quad \mathrm{dn}(v,r)=\sqrt{1-r^2\sin\theta}$$

为 Jacobi 椭圆正弦函数、Jacobi 椭圆余弦函数和 Jacobi 第三类椭圆函数, 其中 $0<r<1$ 称为模数.

注意到, 当 $r\to 1$ 时, $\mathrm{sn}(v,r)\to\tanh v$, $\mathrm{cn}(v,r)\to\mathrm{sech}v$, $\mathrm{dn}(v,r)\to\mathrm{sech}v$. Jacobi 椭圆函数还有许多其他重要性质, 详见本书第五章. 由 Jacobi 椭圆函数定义, 可证明如下事实: 方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=A(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),\quad A>0,\ y_3\leqslant y_2\leqslant y_1$$

有解

$$y=y_2-(y_2-y_3)\,\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{A}{4}(y_1-y_3)}(x+x_0),r_1\right]. \tag{1.2.14}$$

类似地, 方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-A(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),\quad A>0,\ y_3\leqslant y_2\leqslant y_1$$

的解可表示为

$$y=y_2+(y_1-y_2)\,\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{A}{4}(y_1-y_3)}(x+x_0),r_2\right]. \tag{1.2.15}$$

在解 (1.2.14) 和 (1.2.15) 中, Jacobi 椭圆余弦函数的模数 r_1 和 r_2 分别取作

$$r_1=\sqrt{\frac{y_2-y_3}{y_1-y_3}},\quad r_2=\sqrt{\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}},$$