桥梁结构分析

主编 胡长友 陈波

主审 余诗泉

QIAOLIANG JIEGOU FENXI

東北林業大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

桥梁结构分析/胡长友，陈波主编．—哈尔滨：东北林业大学出版社，2006
ISBN 7－81076－900－6

Ⅰ．桥…　Ⅱ．①胡…②陈…　Ⅲ．桥梁结构—结构分析　Ⅳ．U443

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 069128 号

责任编辑：戴　千　朱成秋
封面设计：彭　宇

NEFUP

桥梁结构分析
Qiaoliang Jiegou Fenxi
主编　胡长友　陈　波
主审　余诗泉
东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
东北林业大学印制厂印装
开本 787×1092　1/16　印张 15.75　插页 1　字数 360 千字
2006 年 1 月第 1 版　2006 年 1 月第 1 次印刷
印数 1—1 000 册

ISBN 7-81076-900-6
TU·33　定价：25.00 元

前　　言

改革开放以来，我国公路建设事业取得了长足的发展，实现了历史性的飞跃，桥梁工程学科已跨入世界先进行列。随着结构有限单元法和电子计算机的普及与应用，桥梁结构分析与自动化计算取得了巨大成绩。面对科学技术的进步，我们编写了《桥梁结构分析》一书。

本书共计 11 章。第一章为预备知识，介绍桥梁结构分析数学、力学理论基础。第二章为梁的挠曲与扭转分析概要，对梁的挠曲与扭转特性作以分析。第三章为桥梁结构荷载内力及特点，简要阐明等截面简支梁活载内力计算特点。第四章为各种体系变截面的梁桥荷载横向分布近似计算，是应用第三章计算方法，进行变截面简支梁桥、悬臂梁桥、连续梁桥和框架的活载内力近似计算。第五章为平面杆系结构有限元在桥梁中的应用，详细叙述平面杆系有限元在桥梁中的应用。第六章为电子计算机在桥梁中的应用，利用计算机编程知识进行桥梁计算程序的编写与调试。第七章、第八章和第九章分别为平面问题、空间问题和薄板弯曲问题有限单元法，扩大桥梁内力计算方法。第十章和第十一章分别为结构分析的有限条法和有限差分法，在有限单元法的基础上，利用有限条法和差分法计算桥梁结构内力。其中，第一章由马永辉、赵云鹏编写，第二章、第三章、第四章、第五章、第六章由胡长友编写，第七章、第八章、第九章、第十章、第十一章由陈波编写，全书由胡长友、陈波主编，余诗泉教授主审。

由于作者水平有限，书中疏漏及不足在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 12 月

目　　录

第一章　预备知识

第一节　矩阵代数

一、矩阵的概念

(一) 定　义

在结构力学中，用力法和位移法求解超静定结构时，有下列线性方程组：

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= c_3 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

式中：x_j—— 未知量，$j = 1, 2, \cdots, n$；

a_{ij}—— 系数，$i = 1, 2, \cdots, m$；

c_i—— 自由项(或常数)。

式(1 - 1) 中有 m 个行和 n 个列，等号左边的 m 行写成矩阵形式，如

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix} \tag{1-2}$$

式(1 - 2) 可记为

$$[A] = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix} \tag{1-3}$$

系数 a_{ij} 称为该矩阵的元素。元素的第一个下标 i 表示该元素所在的行数，第二个下标 j 表示该元素所在的列数，二者用来确定该元素在矩阵中所处的位置。有时为了强调 $[A]$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，可把它记为 $[A]_{m\times n}$ 或 $[a_{ij}]_{m\times n}$。必须注意，矩阵 $[A]$ 是一个表格，它不能展开，但可以进行加、减、乘、除各种运算。

同样，也可将式(1－1)的 n 个未知量 x_j 和 m 个常数 c_i 分别按次序排列成一个竖列，记为

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \qquad \{c\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{Bmatrix} \tag{1-4}$$

$\{x\}$ 称为 $n \times 1$ 列阵，$\{c\}$ 称为 $m \times 1$ 列阵。式(1－1)可写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{Bmatrix} \tag{1-5}$$

或简写为

$$[A]\{x\} = \{c\} \tag{1-6}$$

(二) 几种特殊矩阵的定义

1. 方　阵

一个行数和列数相同的矩阵，称为方阵。方阵的最大行(列)数称为方阵的阶，例如：

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

把矩阵中从 a_{11} 到 a_{nn} 连成的直线称为该方阵的主对角线。

2. 行矩阵

凡矩阵只有一行时，称行矩阵。例如，$1 \times n$ 矩阵记为

$$[A] = [a_1 a_2 \cdots a_n]$$

3. 列矩阵

凡矩阵只有一列时，称为列矩阵，又叫做列向量。例如式(1－4)的两个矩阵都是列向量。

4. 零矩阵

矩阵中所有元素均为零时，称为零矩阵，记做 $[0]$ 或 $[0]_{m\times n}$。即

$$[0] = [0]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

5. 负矩阵

矩阵中所有元素均为负数时，称为负矩阵，记作 $-[A]$。即

$$-[A]=\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{bmatrix}$$

6. 对角线矩阵

除主对角线上的元素外，其余元素均为零的矩阵，称为对角线矩阵。例如

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

的对角线矩阵必为方阵。

7. 单位矩阵

主对角线上的元素均为 1，其余元素均为零的 n 阶单位矩阵，记做 $[I]$ 或 $[I]_n$。即

$$[I]=[I]_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

8. 上三角矩形阵

主对角线以下的所有元素均等于零的方阵，称为上三角形矩阵，又称为右三角形矩阵。例如

$$\begin{bmatrix}7 & 2 & 1 & 8\\ 0 & 3 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

9. 下三角形矩阵

主对角线以上的所有元素均等于零的方阵，称为下三角形矩阵，又称左三角形矩阵。例如

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 5 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

10. 对称矩阵

对称于主对角线的元素两两相等的方阵，即 $a_{ij}=a_{ji}$（当 $i\neq j$ 时），称为对称矩阵，对称矩阵必定是方阵。例如

$$\begin{bmatrix}120 & 2 & -1\\ 2 & 33 & 0\\ -1 & 0 & 156\end{bmatrix}$$

在有限元结构程序中，单元刚度矩阵或单元质量矩阵都是对称矩阵，总可以先形成主对角线以上部分的各个矩阵元素，然后调用一个子程序把对称的主对角线以下部分各元素置出。

11. 反对称矩阵

主对角线上各元素均为零，且对称于主对角线的元素两两相等但符号相反的方阵，即 $a_{ij} = -a_{ji}$(当 $i \neq j$ 时)，称为反对称矩阵。例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 10 \\ 4 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

12. 对称正定矩阵

用有限单元法得到的线性代数方程组，它的系数矩阵一般都属于对称正定矩阵。

在讲对称正定矩阵以前，先介绍一下什么叫做二次型和正定二次型。

二次型的形式,可表示如下：

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_{x_n} + \\ &\quad a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + \\ &\quad a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (1-8) \end{aligned}$$

式中：$a_{ij} = a_{ji}$。

上式写成矩阵表达式，则为

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= [x_1 x_2 \cdots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \\ &= \{x\}^T[A]\{x\} \qquad (1-9) \end{aligned}$$

式中$[A]$称为二次型 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的矩阵，a_{ij} 称为二次型的系数，所以每个二次型都有一个对应的对称矩阵，反之，每个对称矩阵对应于某一个二次型。

定义：如果对于任意 n 维列向量$\{x\}$，二次型

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \geqslant 0$$

且其中等号仅当$\{x\}$ 为零向量时才成立，则称该二次型为正定二次型。正定二次型的矩阵$[A]$ 称为正定矩阵。

例如，对角线矩阵

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

的主对角元素均大于零，即 $d_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$,则$[D]$为正定矩阵。

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \cdots + d_{nn}x_n^2$$

只有当$\{x\}$是零向量时才等于零，否则恒大于零，所以它是正定二次型。而$[D]$为正定矩阵。

正定矩阵有很多重要性质,现列举一二。

(1) 定理　n 阶对称矩阵$[A]$为正定的充要条件是，它的所有主子式均大于零。即

$$a_{11} > 0, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

这个定理的证明从略。

(2) 推论　正定矩阵$[A]$的所有主对角线元素都大于零。

按定义可采用反证法证明这一点。假定 $a_{22} \leqslant 0$。因为$[A]$是正定矩阵，故对于任意非零向量$\{x\}$，二次型

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j > 0$$

现取

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

即 $x_1 = x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$，$x_2 = 1$，将它们代入二次型式,得

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{22} \leqslant 0$$

从而产生矛盾，于是这个推论得到证明。

二、矩阵代数的基本运算

矩阵代数的基本运算是矩阵间的加法、减法、乘法、矩阵与数的乘法以及矩阵的转置等。由于矩阵并不代表一个数，而是一些数构成的表格，因此矩阵的运算与数的运算有所不同，只能按规定的法则进行。下面扼要地介绍矩阵的一些基本运算法则，并着重指出矩阵运算与数值运算相异之处。

两个矩阵，当行数、列数相同且对应行列中的所有元素都各个相等，即 $m \times n$ 矩阵$[A]$和$[B]$的元素分别为 a_{ij} 和 b_{ij} 时，若

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$$

则
$$[A]=[B]$$

反之，若两矩阵相等，则其对应行列中的元素也必各个相等，例如

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

则可得

$$\begin{aligned} x_{11} &= -3 \\ x_{12} &= 1 \\ x_{21} &= 2 \\ x_{22} &= -4 \end{aligned}$$

（一）矩阵加法和减法

设有三个 $m \times n$ 矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

若

$$\begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

亦即

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$$

则矩阵$[C]$称为矩阵$[A]$与矩阵$[B]$的和或差，记为

$$[A] \pm [B] = [C]$$

于是矩阵加减的法则为：矩阵的加减就是对应的元素相加或相减，所得结果仍为一个行列数相同的矩阵。显然，相加、减的矩阵必须具有相同的行数和列数。

矩阵的加减法具有下列性质：

(1) $[A]+([B]+[C])=[A]+[B]+[C]$ （结合律）

(2) $[A]+[B]=[B]+[A]$ （交换律）

这说明数值加法的结合律和交换律对矩阵加法也完全适用。

(3) $[A] \pm [0] = [A]$

这说明零矩阵在矩阵的加减法中与数“零”在数值加减法中起类似的作用。

(4) $[A] + (-[A]) = [0]$

(5) $[A] + (-[B]) = [A] - [B]$

(二) 矩阵与数的乘法

数 k 与矩阵$[A]$的乘积，就是把矩阵$[A]$的所有元素都乘上 k 后所得出的矩阵。即

$$k[A] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

$$k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$$

亦即数 k 乘单位矩阵，得

$$k[I] = k\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

主对角线上各元素相同，均为数 k，这种矩阵称为数量矩阵。

矩阵与数的乘法，具有下列性质：

(1) $1 \times [A] = [A]$

(2) $0 \times [A] = [0]$

注意：等式左边的“0”是数值零，而右边的[0]则为零矩阵。

(3) $\alpha(\beta[A]) = \beta(\alpha[A]) = (\alpha\beta)[A]$

(4) $k \times [A] = [A] \times k$ (交换律)

(5) $-[A] = (-1)[A]$

$$\left.\begin{array}{l} (6)\ k([A]+[B]) = k[A] + k[B] \\ (7)\ (\alpha+\beta)[A] = \alpha[A] + \beta[A] \end{array}\right\} \quad \text{(分配律)}$$

(三) 矩阵乘法

设有一个 $m \times n$ 矩阵$[A]$和一个 $n \times p$ 矩阵$[B]$,即

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

那么，当有另一个 $m \times p$ 矩阵$[C]$，则

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

而其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}n_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant p) \tag{1-10}$$

矩阵$[C]$称为矩阵$[A]$与矩阵$[B]$的乘积，即矩阵$[C]$的第 i 行第j列上的元素等于矩阵$[A]$的第 i 行各元素与矩阵$[B]$的第j列各对应元素逐对相乘所得的乘积之和，这就是矩阵乘法的定义。按先$[A]$后$[B]$的次序，记为

$$[A]\times[B]=[C]$$

更明确些，或记为

$$[A]_{m\times n}\times[B]_{n\times p}=[B]_{m\times p}$$

注意：两个矩阵$[A]$和$[B]$，只有当第一个矩阵$[A]$的列数等于第二个矩阵$[B]$的行数时才可以相乘。也就是说，此时它们的乘积$[A]\times[B]$才有意义。同时还可以看到，两个矩阵的乘积仍然是一个矩阵，其行数等于第一个矩阵$[A]$的行数，其列数等于第二个矩阵$[B]$的列数。

例 1－1　设矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

已知$[C]=[A]\times[B]$，求解$[C]$。

解：

$$[C]=[A]\times[B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1\times0+0\times1+(-1)\times3+2\times(-1) & 1\times3+0\times2+(-1)\times1+2\times2 & 1\times4+0\times1+(-1)\times(-1)+2\times1 \\ (-1)\times0+1\times1+3\times3+0\times(-1) & (-1)\times3+1\times2+3\times1+0\times2 & (-1)\times4+1\times1+3\times(-1)+0\times1 \\ 0\times0+5\times1+(-1)\times3+4\times(-1) & 0\times3+5\times2+(-1)\times1+4\times2 & 0\times4+5\times1+(-1)\times(-1)+4\times1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{bmatrix}$$

关于阵矩的乘法，具有下列性质：

(1) $\lambda([A][B])=(\lambda[A])[B]=[A](\lambda[B])$

(2) $([A][B])[C]=[A]([B][C])$

这说明：数值乘法的结合律也适用于矩阵乘法。

(3) $([A]+[B])[C]=[A][C]+[B][C]$

$[C]([A]+[B])=[C][A]+[C][B]$

(4) $[A][I]=[A]$；$[I][B]=[B]$

这里的$[I]$是单位矩阵，$[A]$和$[B]$不必一定是方阵，但$[A]$的列数必须等于$[I]$的阶数，$[B]$的行数也必须等于$[I]$的阶数。由以上二式可见，单位矩阵$[I]$在矩阵乘法中所起的作用相似于数"1"在数值乘法中所起的作用。

(5) 矩阵的乘法，交换律一般不成立，也就是$[A]\times[B]$一般并不等于$[B]\times[A]$。

例如，已知

$$[A]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

则
$$[A][B]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

而
$$[B][A]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

可见
$$[A][B]\neq[B][A]$$

因此必须注意：在等式$[A]=[C]$的两边乘上某矩阵$[B]$时，应区分"左乘"或"右乘"，不能任意调换位置。

当两边左乘矩阵$[B]$时，为

$$[B][A]=[B][C]$$

当两边右乘矩阵$[B]$时，为

$$[A][B]=[C][B]$$

(6) 等式$[A][B]=[0]$，一般不能断言必有$[A]=[0]$或者$[B]=[0]$。例如

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

这说明，虽然乘积是零矩阵，但相乘的两个矩阵都不是零矩阵。

(7) 等式$[A][B]=[A][C]$，一般不能断言$[B]=[C]$。例如

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad [C]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

则
$$[A][B]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[A][C]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

由此可见，虽然$[A][B]=[A][C]$，但$[B]\neq[C]$。

(8) 在有限单元法中，常用虚功原理导出一些公式，在推导过程中要用到下面的一

个定理：

设有 $m\times n$ 矩阵 $[A]$ 及两个 $n\times p$ 矩阵 $[B]$ 与 $[C]$，当 $[A]$ 的元素取任意数值时，等式

$$[A][B]=[A][C] \tag{1-11}$$

恒成立，则可断定 $[B]=[C]$。

必须指出，这里说 $[B]$ 与 $[C]$ 相等，是基于 $[A]$ 的任意性。如果 $[A]$ 并不是任意的（即它的元素并不能任意取值），就不能断定 $[B]=[C]$。

应注意性质(5)、(6)、(7)是矩阵运算与数的运算相异之处。

（四）矩阵的转置

把矩阵 $[A]$ 的行与列依次互换，所得到的矩阵称为 $[A]$ 的转置矩阵。更确切的定义如下：

设有 $m\times n$ 矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

所谓 $[A]$ 的转置，就是把 $[A]$ 的行与列互换位置（保持行与列的元素次序不变）而得到的 $n\times m$ 矩阵，记做 $[A]^T$，即

$$[A]^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-12}$$

或
$$[a_{ij}]^T=[a_{ji}]$$

转置矩阵的记号也有用 $[A]^T$ 表示。

矩阵的转置，具有如下性质：

(1) 一个矩阵经两次转置，仍为原矩阵，即

$$([A]^T)^T=[A] \tag{1-13}$$

(2) 对称方阵的转置矩阵，仍为原来的方阵，即

$$[A]^T=[A] \tag{1-14}$$

(3) 反对称方阵的转置矩阵，为原矩阵的负矩阵，即

$$[A]^T=-[A] \tag{1-15}$$

(4) 行矩阵的转置矩阵就是列矩阵，列矩阵的转置矩阵就是行矩阵。

(5) 若 k 为一个数，则

$$(k[A])^T=k[A]^T$$

(6) 任意两个矩阵之和的转置，等于各矩阵转置后之和，即

$$([A]+[B])^T=[A]^T+[B]^T$$

(7) 两个给定的矩阵，它们乘积的转置矩阵等于各转置矩阵的乘积，但先后次序相

反，即

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T \tag{1-16}$$

推广成普遍式为

$$([A][B][C]\cdots[Y][Z])^T = [Z]^T[Y]^T\cdots[C]^T[B]^T[A]^T \tag{1-17}$$

（五）几种常用代数式的矩阵表达式

1．两因子乘积的代数和

$$c = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \tag{1-18}$$

的矩阵表达式。

如取 $$[A] = [a_1 a_2 \cdots a_n] \quad \text{（行矩阵形式）}$$

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad \text{（列矩阵形式）}$$

根据矩阵乘法可得

$$\underset{(1\times n)(n\times 1)}{[A]\{B\} = [a_1 a_2 \cdots a_n]\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}} = \underset{(1\times 1)}{[a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n]} = [C]$$

即式(1－18)写成矩阵表达式时为

$$[C] = [a_1 a_2 \cdots a_n]\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{1-19}$$

因此，两因子乘积代数和的矩阵表达式总是以一个行矩阵右乘一个列矩阵来表示。为了便于记忆，可记做“行×列”。若所取矩阵形式不符合上述要求，则将其形式变换一下以后再相乘。例如，若两个矩阵的形式都取列矩阵时，即

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}, \quad \{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

将式(1－18)写成矩阵表达式，此时应写成

$$[C] = \{A\}^T\{B\}$$

或

$$[C] = \{B\}^T\{A\}$$

上述表达式，在计算外力做功时要用到。例如，某弹性体上作用着静荷载 P_1，P_2，…，

P_n，沿各荷载方向发生的位移分量分别为 Δ_1，Δ_2，…，Δ_n，则各荷载所做的总功为

$$W = \frac{1}{2}P_1\Delta_1 + \frac{1}{2}P_2\Delta_2 + \cdots + \frac{1}{2}P_n\Delta_n$$
$$= \frac{1}{2}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + \cdots + P_n\Delta_n)$$

若荷载和位移都用列向量(列矩阵) 表达，则

$$[W] = \frac{1}{2}\{P\}^T\{\Delta\} = \frac{1}{2}\{\Delta\}^T\{P\} \tag{1-20}$$

2. 三因子乘积的代数和

$$c = a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_nx_ny_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_iy_i$$

的矩阵表达式。

若取一种因子行矩阵,例如

$$[X] = [x_1x_2\cdots x_n]$$

一种因子为 n 阶对角线矩阵，例如

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

另一种因子为列矩阵，例如

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$\{x\}^T = [X] = [x_1x_2\cdots x_n]$$

由矩阵相乘可得

$$\{x\}^T\{Y\} = [x_1x_2\cdots x_n]\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

$$\{x\}\{Y\}^T = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}[y_1y_2\cdots y] = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

$$[x_1x_2\cdots x_n]\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$