勒贝格-斯蒂尔吉斯积分

E. 卡姆克著

吴 莲 溪 译

高 等 教 育 出 版 社

勒贝格－斯蒂尔吉斯积分

E. 卡姆克著

吴 蓮 溪 译

高 等 教 育 出 版 社

本书是介紹勒貝格-斯蒂尔吉斯积分的一般性讀物，內容比較詳尽，論述的重点放在n維空間与勒貝格-斯蒂尔吉斯积分，这是本书的特点．

本书共分五章：第一章点集，第二章点集的测度，第三章可測函数，第四章勒貝格-斯蒂尔吉斯积分，第五章派尔隆积分．本书可供数学专业师生选作教学参考书．

勒贝格-斯蒂尔吉斯积分

E. 卡姆克著　吳蓮溪譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第 119 号

高等教育出版社出版（北京景山东街）

上海市印刷三厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K13010・1216　开本 850×1168 1/32　印张 9 3/16

字数 231,000　印数 0,001—1,750　定价(5)￥0.90

1965年12月第1版　1965年12月上海第1次印刷

序

早在 1925 年，我做青年讲师时期，写了一本小册子，书名是"勒贝格积分·现代实变函数论入门"(Das Lebesguesche Integral· Eine Einführung in die neuere Theorie der reellen Funktionen). 多年以来，这本书早已售罄，没有再版．由于不断有人来探问这本书的消息，所以我将它重新编写一次．而且由于读者并不要求扩大篇幅，我一开始就讲勒贝格-斯蒂尔吉斯积分 (Das Lebesgue -Stieltjes Integral)，对这一积分的了解，在今天来说，已是不可缺少的了．

本书的基本结构，就这样一方面来看，是和以前相同的，即首先导入点集的相当的测度，而后利用测度以定义积分．不过以前的论述，只限于二维点集和一元函数范围之内，而现在，随着数学教学的普遍发展，探讨的范围是 n 维空间和 n 元的函数了．

和以前完全一样，本书只是作为学者入门书而写的．因此，对现代更为一般的测度理论与积分理论未加论列．

在此，我对瓦特(Wolfgang Walter)先生表示感谢，他帮助看了校样，并且提供了很多批评性意见以及作了若干订正．

卡姆克(E. Kamke)

1956 年春于 Tübingen

目　录

III. 可测函数

IV. 勒貝格-斯蒂尔吉斯(Lebesgue-Stieltjes)积分

V. 派尔隆(Perron)积分

I. 点集与区間集

1. 基本概念

1.1 点，球，区间 我们将取实数 x，数对 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$以及一般地由 n 个实数所成之系 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$作为研究的对象. 以后，每一个这样的系 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 或 $\boldsymbol{y}=(y_1, \cdots, y_n)$称为向量，或称为点，并且用 P, Q 或 $P(\boldsymbol{x})$, $Q(\boldsymbol{y})$来记它. 采取后一种称谓法，是因为在 $n\leqslant 3$ 时，点是通过直角坐标系来确定的；$x_1, \cdots, x_n$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量或点 $\boldsymbol{x}$（或 P）的坐标. 当 n 固定时，系 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 的全体称为 n 维空间 $\boldsymbol{R}_n$. 以后若无另外声明时，永远把 n 看作是给定的数. 当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{x}=x$.

现在我们进一步作以下的规定:

(1) $\boldsymbol{x}=0$ 意味着 $x_1=\cdots=x_n=0$； 这个向量称为零向量(零点)；

(2) 对于任何一个实数 a, $a\boldsymbol{x}=(ax_1, \cdots, ax_n)$；

(3) $\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{y}=(x_1\pm y_1, \cdots, x_n\pm y_n)$ 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和与差；

(4) $\boldsymbol{xy}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的(数量)乘积；

(5) $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\boldsymbol{x}^2}=\sqrt{\boldsymbol{xx}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的模或绝对值；

(6) $\overline{PQ}=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}$ 为点 $P(\boldsymbol{x})$ 与 $Q(\boldsymbol{y})$的距离；因而 $|\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}-0|$ 为点 $\boldsymbol{x}$ 到零点的距离.

除了一些容易由上述规定推出的运算法则外，还有柯西(Cauchy)不等式

(7) $|\boldsymbol{xy}|\leqslant|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|$.

因为对于任意的数 x_p, y_p, 显然有

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(x_py_q-x_qy_p)^2\geqslant 0.$$

乘出来并移项，我们得

$$(\sum x_py_p)^2\leqslant\sum x_p^2\cdot\sum y_p^2,$$

这也就是(7). 由(7)我们又推得

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^2\leqslant|\boldsymbol{x}|^2+2|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}|^2,$$

这也就是所谓三角形不等式

(8) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|,$

或以 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}$ 代替 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 而得

(9) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|+|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|.$

当 $\boldsymbol{a}$ 为一定点，r 为一正数时，由满足不等式

(10) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|\leqslant r$ 或 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<r$

之点 $\boldsymbol{x}$ 所成集合，称为空间 R_n 中以 $\boldsymbol{a}$ 为中心 r 为半径的闭球或开球.

不等式 $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$ 是指 $x_\nu<y_\nu$, $\nu=1,\cdots,n$; 而 $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$ 应作相应的理解. 若 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$, 则 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 表一闭区间，即满足 $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$ 的全部点 $\boldsymbol{x}$ 所成之集; $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 表开区间 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{b}$; $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 表半开区间 $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{x}<\boldsymbol{b}$, 而 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 表半开区间 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$. 若无需知道其为何类区间时，则简称区间 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$. 区间可以看作是边与坐标轴平行的立方体. 以 $\dfrac{a_1+b_1}{2},\cdots,\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 为坐标的点 $\boldsymbol{c}$ 称为区间 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的中心.

超平面

$$x_k=a_k,\quad a_\nu\leqslant x_\nu\leqslant b_\nu\quad(\nu\neq k),$$

称为区间的界面. 区间 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 当 $b_1-a_1=\cdots=b_n-a_n$ 时，称为正则的; $b_\nu-a_\nu$ 的共同值称为此区间的广度.

1.2 集，特别是可数集 按照康托尔 (G. Cantor)[①] 的说法,

① Mathematische Annalen 46(1895), 481; 这个定义在这里已够用了. 关于这个定义的一个批評，例如参看 E. Kamke [3] 或 [21].

所谓一个集 M，是指由一定的可互相区别的观察对象或思考对象所组成的整体，而其中的对象称为 M 的元素．记号 $m\in M$ 表示 m 为 M 的元素，而 $m\notin M$ 则表示 m 非 M 的元素，在 $m\in M$ 的情形，我们也说 m 属于集 M(作为元素)或含于 M．以后，集的元素主要是数，点，区间，函数．

例如数 1, 2, 3 组成含有 3 个元素的集，一个正方形的顶点组成含有 4 个元素的集，质数以及一个球的内部点都组成含有无限多个元素的集．

对于集来说，我们不考虑其元素的顺序．因此，例如由数 1, 2, 3 所成之集①可以用$\{1, 2, 3\}$来记它，也可以用$\{3, 1, 2\}$或$\{2, 1, 3\}$来记它．另外，还要注意到元素都必须是不同的．因此，在数 1, 2, 1, 2, 3 中，必须消除重复出现的数之后才会成为一个集．

集的一个最原始而且粗糙的分类方法，就是把集区分成有限集与无限集两类．如果 k 是一个自然数，而 $m_1, \cdots, m_k$ 是 k 个不同的数或点或者区间时，它们就组成有限集$\{m_1, \cdots, m_k\}$，凡元素数非有限的集叫做无限集．

在无限集中，我们首先要提到自然数集，其元素可排成通常序列

$$\{1, 2, 3, \cdots\}$$

的形式．这个集我们称为可数集．

一般地，一个集叫做可数集，如果它可以表为序列

$$\{m_1, m_2, m_3, \cdots\}$$

的形式，也就是说，它的每个元素都对应着一个自然数且只对应着一个自然数，而每个自然数也都对应一个元素．如果我们只知道集是有限的或可数的，我们就把它叫做至多可数．

全体质数组成一个无限集，而且是可数集；全体偶数也是同样的，因为偶数可以写成序列

$$0, -2, 2, -4, 4, -6, 6, \cdots.$$

① 往往把集的元素写在花括弧内．

若 $\sum a_\nu$ 是一个收敛级数，则当 $\nu\to\infty$ 时 $a_\nu\to 0$；因此，满足 $|a_\nu|\geqslant 1$ 的数集是有限的，然而它们的数目可能是非常大的.

康托尔在他早期的集论研究工作中[①]，证明了下面两个集是可数的，而这单凭直觉是很难想像的.

定理 1 有理数全体所成之集是可数集.

证明 每个有理数 r 都有 $r=\frac{a}{b}$ 形式的唯一表示法，其中 a, b 是两个互质的整数，并且 $b\geqslant 1$. 我们现将有理数按以下方式排列：先是使 $|a|+b=1$ 的那种有理数，即数 0. 其次是使 $|a|+b=2$ 的有理数，即 $\frac{-1}{1}, \frac{+1}{1}$. 再次是使 $|a|+b=3$ 的有理数，即 $-2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. 接着是使 $|a|+b=4$ 的有理数，即 $-3, 3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\left(-\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right.$ 须除去，因为分子和分母非互质$\left.\right)$. 以下类推. 我们还要规定，有相同和数 $|a|+b$ 的分数，按分母增加的顺序排列，并且有相同绝对值的数，负数要排在前面. 因此，对于有理数就有了一个唯一确定的顺序，从而有理数全体就可写成一个序列了，也就是说，它是一个可数集.

为了证明一个范围更广的数集是可数的(第二定理)，我们要提一下代数数的定义. 所谓一个代数数就是指这样一个(实或复)数，它是一个具有整系数 a_ν 而且系数并非全部为零的多项式

$$P(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

的零点. 例如，有理数以及有理数的根都是代数数.

定理 2 代数数全体所成之集是可数集.

证明 设 $P(x)$ 是一个上述形式的多项式，并且不失一般性，

① Journal für die reine und angewandte Mathematik 77 (1874), 258—262.

还可以假设 $a_k>0$. 我们将自然数

$$h=k+a_k+|a_{k-1}|+\cdots+|a_0|$$

定义为多项式的高度. 由于 $k\leqslant h$ 以及每个 $|a_\nu|\leqslant h$, 故具有同一高度 h 的多项式仅有有限多个, 并且每个多项式仅有有限多个零点. 高度为 1 的多项式是 1, 而且对它来说不存在零点. 所以我们从高度为 2 的多项式考察起, 在这里只有函数 x 和 2, 而 0 则是唯一的零点, 数 0 就是我们序列的第一个数. 其次, 我们将高度为 3 的多项式按照某个顺序写出来:

$$x^2,\ 2x,\ x\pm 1,\ 3.$$

其零点为 0, ±1. 将前已求得的数 0 除去而将以前尚未出现的零点 −1, +1 写上去. 其次, 就要数到高度为 4 的多项式

$$x^3,\ 2x^2,\ x^2\pm x,\ x^2\pm 1,\ 3x,\ 2x\pm 1,\ x\pm 2,\ 4.$$

在已写出来的零点之后, 把这些多项式的尚未记下的零点, 也就是 $\pm\frac{1}{2}$, ±2, $\pm i$, 按任意的(或特定的)顺序补写进去. 同样的作法亦适用于高度为 5 的多项式, 以下类推. 这样, 我们就得到一个不同代数数的序列, 由于每个多项式都有一个高度, 所以全部代数数也都要出现在序列之中①, 因此, 定理得证.

1.3 子集, 余集, 并集与交集 两个集$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{N}$, 当它们包含相同的元素时称做相等, 记为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$.

一个集$\boldsymbol{M}$, 当其每个元素也为集 $\boldsymbol{N}$ 的元素时, 称$\boldsymbol{M}$为$\boldsymbol{N}$的子集, 记为$\boldsymbol{M}\subseteq\boldsymbol{N}$, 也就是说, 如果 $a\in\boldsymbol{M}$ 时, 则必有 $a\in\boldsymbol{N}$. 我们还用记号 $\boldsymbol{N}\supseteq\boldsymbol{M}$, 代替记号 $\boldsymbol{M}\subseteq\boldsymbol{N}$, 并且把 $\boldsymbol{N}$ 称做 $\boldsymbol{M}$ 的母集. 任何一个集同时是它本身的(非真正的)子集. 假如 $\boldsymbol{M}\subseteq\boldsymbol{N}$, 但 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{N}$, 则称 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{N}$ 的真子集, 记做$\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{N}$或$\boldsymbol{N}\supset\boldsymbol{M}$.

① 实则仅有一部分代数数能通过有理数以及有理数的根式明白表示出来, 但是这无关重要.

如果 $M\subset N$，我们把属于N而不属于子集M的那一部分元素所成的集，称为对于 M 的补集或 N 的余集R或差集 $R=N-M$. 为了使这个说法也适用于 M 非 N 的真子集，也就是 $M=N$ 的场合，我们仍须引入所谓空集或零集，并以 $\boldsymbol{\Lambda}$ 来记它①. 空集应当看做有限集，并为每个集的子集，特别也是它自身的子集. 显然，$M-M=\boldsymbol{\Lambda}$.

例 有理数集是实数集的子集，而无理数则构成其补集.

差不多可以直接得出：

定理 1 可数集的每个子集都是至多可数的.

证明 可数集M可以表示成序列$\{m_1, m_2, m_3, \cdots\}$的形式. 设已给子集为$N$. 假设 $N=\boldsymbol{\Lambda}$，即N是空集，则按照以上的规定，本定理为真实. 今设 $N\neq\boldsymbol{\Lambda}$，那么，在序列$M$中必有属于$N$的第一个元素，设为 m_{k_1}. 在此之后，在M中有属于N的元素，其中第一个设为m_{k_2}，以下依此类推. 这个过程或则中断或无穷继续下去，这要看N是有限的或无限的来决定，由于M含有N的全部元素(并且M可能还含有另外的元素)，故序列 $m_{k_1}, m_{k_2}, m_{k_3}, \cdots$(也可能是一个中断序列)所含有的正是$N$的全部元素，因此$N$是有限的或可数的.

例如，根据本定理和 1.2 定理 2，我们可以推断，一切满足具有质数次数(在有理数域内)的既约方程的代数数，构成全体代数数集的一个可数子集.

所谓有限多个或无限多个集的并集或和集 S，就是至少属于其中一个集的所有元素所构成的集，至多可数多个集 M_1, M_2, $\cdots$ 的并集我们写成

$$S=M_1\cup M_2\cup\cdots \text{ 或 } S=\bigcup_k M_k,$$

或

$$S=M_1+M_2+\cdots \text{ 或 } S=\sum_k M_k.$$

① 有必要区分零集 $\boldsymbol{\Lambda}$(它也往往用 0 来表示)和以 0 为元素的集$\{0\}$.

所谓有限多个或无限多个集的交集D，是指所有属于其中每一个集的元素所构成的集. 至多可数多个集$M_1, M_2, \cdots$的交集可以写成

$$D = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \quad 或 \quad D = \bigcap_k M_k$$

或

$$D = M_1 \cdot M_2 \cdot \cdots \quad 或 \quad D = \prod_k M_k.$$

这种作为形式上的和与形式上的积的写法，其优点在于能帮助我们记住许多运算法则. 例如，在这里$A(B+C) = AB + AC$仍然成立，这是不难证明的. 在求和的时候，空集是不予考虑的，几个空集的和仍旧是空集. 在求交集的时候，集中只要有一个是空集，则交集就是空集；如果各集无一公有的元素存在时，同样的情形也会发生. 在M_1和M_2没有共同的元素时，则它们称为互不相交的，或如果是点集时，则称无公有点.

例 (a)设M_1, M_2由图1中两圆的点所组成，则$M_1 + M_2$即为整个用斜线画出来的区域，$M_1 \cdot M_2$即为画双重斜线的区域.

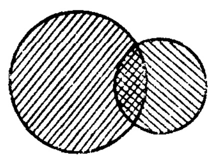

图 1.

(b)可数多个集 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$， $\{2, 3, 4, \cdots\}$，$\{3, 4, \cdots\}$，……以自然数集为其和集，而以空集为其交集.

(c)两个开区间的交集为空集或仍为开区间，因为两个区间$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$如有一公共点$\boldsymbol{y}$时，则

$$a_\nu < y_\nu < b_\nu, \quad c_\nu < y_\nu < d_\nu, \quad \nu = 1, \cdots, n.$$

因之，如果

$$g_\nu = \max(a_\nu, c_\nu), \quad h_\nu = \min(b_\nu, d_\nu)$$

时，则$g_\nu < h_\nu$，从而$(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})$是已给两区间的交集.

(d)仿此，两个半开区间$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，$[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$的交集为空集或为同种类的半开区间.

定理 2 至多可数多个集的和集，若其中每个集都至多可数时，必仍为至多可数的集.

证明　设集为 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \cdots$，并设 $\boldsymbol{M}_n$ 的元素为 $m_{n1}, m_{n2}, \cdots$. 我们首先写出 m_{11}. 其次写出满足 $p+q=3$ 的那些有限多个元素 m_{pq}，也就是元素 m_{21}, m_{12}，并且若其中任何一个元素与一个已出现的元素相同时，则不列入. 然后写出满足 $p+q=4$ 的所有元素 m_{pq}，也就是 m_{31}, m_{22}, m_{13}，并且也把那些与已出现的元素之一相同的元素不予列入. 以下类推. 这样一来我们得一(可能是中断的)序列，其中每个属于 $\boldsymbol{M}_n$ 的元素都恰好出现一次. 因此，这个序列就是集 $\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\cdots$，所以，这个和至多是可数的.

这个证明原理显然已于 1.2 的证明中用到. 它的名称就是周知的“第一对角线法”或“柯西对角线方法”. 所以叫这个名称，是因为若把各个集的元素排列如下图，

$$
\begin{array}{llllll}
\boldsymbol{M}_1: & m_{11}, & m_{12}, & m_{13}, & \cdots \\
\boldsymbol{M}_2: & m_{21}, & m_{22}, & m_{23}, & \cdots \\
\boldsymbol{M}_3: & m_{31}, & m_{32}, & m_{33}, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

按照图上对角线所表示的顺序，将元素重新排列，即得到上述那个序列

$$m_{11}, m_{21}, m_{12}, m_{31}, m_{22}, m_{13}, \cdots.$$

推论　(a) R_n 中全部坐标均为有理数的点 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 所成之集是可数集.

当 $n=1$ 时，此即 1.2 的定理 1. 在一般情形下，本推论须用数学归纳法证明. 今将有理数坐标 x_1 固定而 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 则为一切可能之有理坐标，这样所形成的点$(x_1, \cdots, x_n)$的集以 $\boldsymbol{M}_{x_1}$ 表示. 假设本推论对于 $n-1$ 已证明为真实，则每个这样的集 $\boldsymbol{M}_{x_1}$ 都是可数的. 因为根据定理 1 仅有可数多个集 $\boldsymbol{M}_{x_1}$，故按照定理 2 所有 $\boldsymbol{M}_{x_1}$ 的并集也必然是可数的，因而本推论得证.

(b) R_n 中所有区间 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，当端点 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 仅有有理坐标时所成之集是可数的.

因为根据(a)，a_ν, b_ν 全为有理数之数系 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$，全体所成之集是可数的，而且区间 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是系 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 的条件下所组成的子集，故根据定理 1 仍然是一个可数集.

(c)在 R_n 中,中心 a 仅具有有理数坐标而半径 r 为有理数的球所成之集是可数的.

因为有理数系 $a_1, \cdots, a_n, r$ 根据(a)组成可数集.

1.4 不可数集 根据到此刻为止所已知的事实看来,可能有人认为一切集都是有限的或可数的了,但是,现在我们即将证明还存在着不可数的集,也就是说,这种集既非有限,也不是可数的.

定理 1 区间 $0<x<1$ 的全部实数所成之集,即所谓连续统,是不可数的[1].

证明 本证明仍须用一种对角线方法来达成,我们把它叫做第二对角线法或康托尔对角线法. $0<x<1$ 中的每个数 x 都可表为无限十进小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$. 如果不采用从某位 a_ν 起全都为零的小数表示法$\left(例如,\dfrac{1}{2}=0.4999\cdots\right)$, 则$(0,1)$中每个数 x 只能表成唯一的无限十进小数.如果区间 $0<x<1$ 的数组成一个可数集,则这些数必可写成为无限十进小数的序列

$$\begin{array}{ccccc}
0. & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\
0. & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\
0. & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{array} \tag{1}$$

我们作一个无限十进小数

$$d=0.\,b_1b_2b_3\cdots,$$

使它与由(1)之对角线所作成之 $0.a_{11}a_{22}a_{33}\cdots$ 在小数点以后无一位有相同的数字,并且所有的 b_ν 不为 0 或 9. 于是, $0<d<1$, 由于这十进小数 d 没有一位为零,故不中断,因此, d 必须与(1)中之一十进小数在一切位上有相同的数字. 但根据 d 的作法,这是不可能的,因为 d 对于每个 k 必与(1)中之第 k 个十进小数在第 k 位上有不同的数字. 由于与假设矛盾,故本定理得证.

① 见 G. Cantor, Journal für die reine und angewandte Mathematik (1874) 258—262.

借助以下极为简单的定理，可以判定更多其他的不可数集.

定理 2 假设M为不可数集，N为一任意的集，则$M+N$也必为一不可数集；如果我们从M除去一至多可数的子集A，则余集$M-A$必为一不可数集.

证明 假如说$M+N$是至多可数的话，那么按照 1.3 定理 1，作为$M+N$的子集的M就必须是至多可数的；假如$M-A$是可数的，那么按照 1.3 定理 2，$M=A+(M-A)$也就必须是可数的.

推论 (a)根据定理 1 和定理 2，集 $0<x\leq 1$，$0\leq x<1$，$0\leq x\leq 1$ 都是不可数的.

(b)任何一个区间 a, b 的点 x 都组成不可数集，不管区间的两个端点都不属此区间，还是把两个端点或其中的一个看做区间的点.

因为通过变换 $y=\dfrac{x-a}{b-a}$，区间a, b 的每个点 x 恰有区间 0, 1 的一点 y 与之对应，而且反之也是一样的. 假如区间 a, b 的点 x 组成可数集，也就是可以排成一个序列，那么由于 x 与 y 间存在着一一对应关系，区间 0, 1 的点 y 也就能排成一个序列，但是，按照定理 1 和(a)，这是不可能的.

(c) R_n 中任一区间 a, b 的点所成之集是不可数集.

因为如果$(x_1, \cdots, x_n)$是区间的一个定点，则依照(b)，当 $a_n<y_n<b_n$ 时，所有点$(x_1, \cdots, x_{n-1}, y_n)$已经组成一个不可数集.

(d)同样地，我们可以推知，R_n 中的任何一个球以及 R_n 本身都包含有不可数多的点.

(e)无理数全体组成不可数集，因为无理数集是从全部实数所成之不可数集除去可数的有理数集而得到的. 同样，超越数组成不可数集，因为超越数集是从全部实数所成之不可数集除去可数的代数数集而得到的.

历史注释 集论的建立是康托尔 (1845—1918) 的功劳. 这里仅仅介绍了集论初步的少量材料. 关于集论的入门书可以看 E. Kamke [21](Theory of sets, New York, 1956). 关于这一领域的概貌可从文献目录[3]中得到.

2. 按照点的位置来做点与集的分类

2.1 内点，外点，界点 以集之点的“数目”为依据的分类原