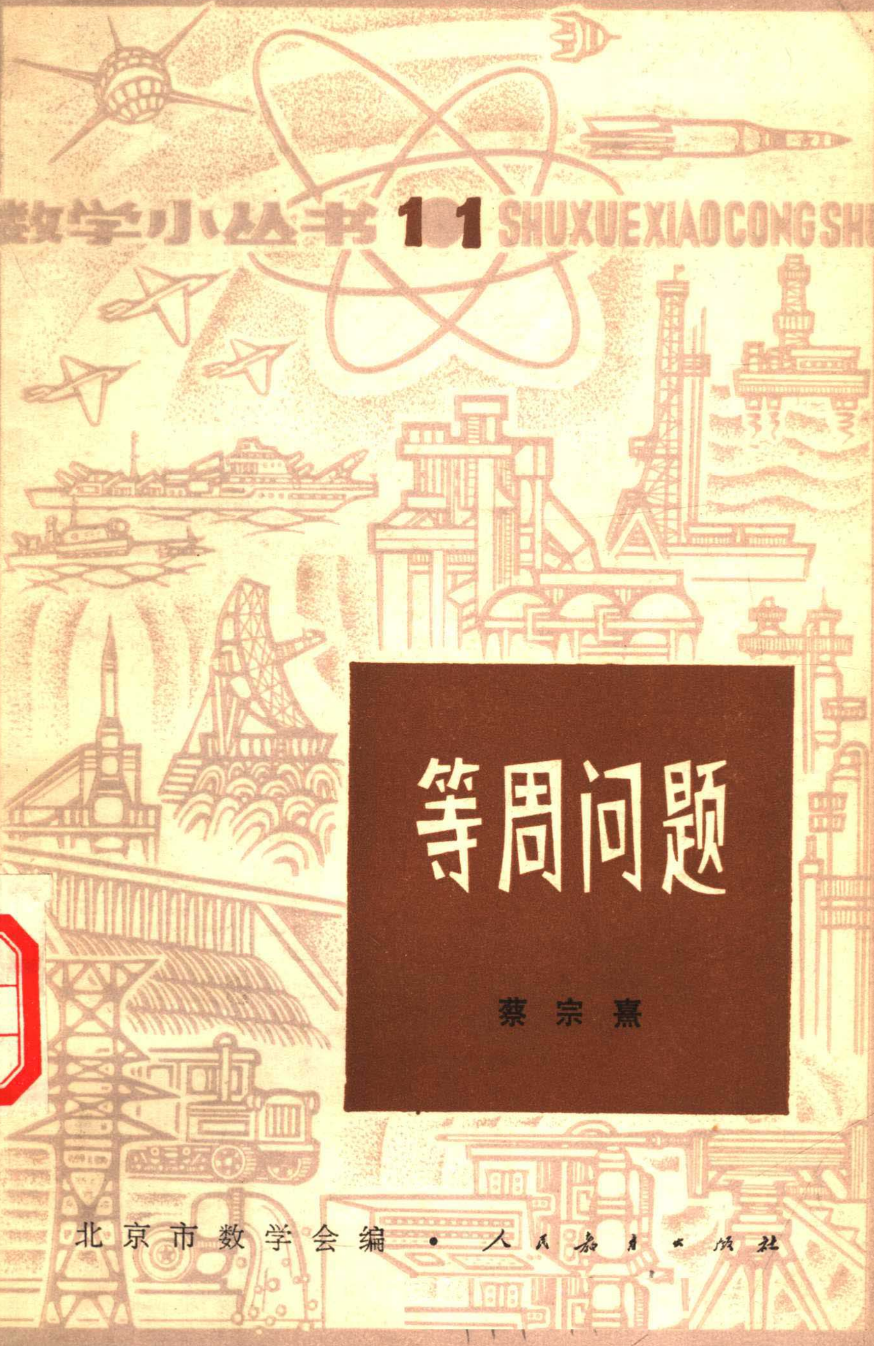
数学小丛书 11 SHUXUEXIAOCONGSHU



等周问题

蔡宗熹

北京市数学会编 · 人民教育出版社

等周问题的典型例子之一是："周长相等的所有封闭平面曲线中，怎么样的曲线所围成的面积最大？"这本小册子主要是介绍它的初等解法及一系列有趣的应用．念过平面几何及三角的读者完全能看懂它．

小册子先从简单的三角形谈起，接着论述了：四边长度给定的一切四边形中，内接于圆的四边形具有最大的面积；周界长度给定的所有 n 边形中，正 n 边形具有最大的面积．进而给出了上述等周问题解答的两个证明和海伦公式的推广．最后证明了一切体积相同的立体中，球体具有最小的表面积．

等周问题

蔡宗熹

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国营五二三厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 2　字数 33,000

1964 年 5 月第 1 版　1979 年 4 月第 3 次印刷

印数 107,501-407,500

书号 13012·0253　定价 0.17 元

編者的話

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962 年 4 月

目　　次

一 自然現象之謎

你小时候吹过肥皂泡嗎？肥皂泡像无数五色繽紛的小球在空中飞舞着，多有趣！可你是否想过：为什么吹出来的肥皂泡总是一个个的圓球？你从来沒有見到吹出像蕃茄、辣椒那样形状的肥皂泡吧！

也許你还遇見过下列这些現象：

假如你一不小心，打破了一支水銀溫度計，水銀落到桌面上，你将看見許多銀色的珍珠在桌面上滾动着．

如果你參观过机械工厂的翻砂車間，翻砂时溢出来的铁水凝成許多球形的彈子．

要是你生长在农村，当你大清早繞过荷塘时，你会看到在荷叶的中心露水聚成一个“水銀球”，晶瑩欲滴．

……………………

对于这些自然現象，你也許会立即用物理知識加以解釋，因为中学物理书里告訴我們：“在表面張力的作用下，液体有力求使其表面积达到最小的趋势．”可是，由于水珠、水銀珠等变形时它們的体积是不变的，因此要使人們信服这一物理解釋，就无异于要求人們承认：“在一切具有相同体积的几何形体中，球体具有最小的表面积．”这一个数学命題的正确性是有待于严格证明的．

让我們来做另外的两个有趣的实驗：

〔实驗一〕取四根一样长的細铁絲，在每一根铁絲的两端

各繞上一个小圓圈（图 1. a）．将每一根上的小圓圈与另一根上的小圓圈套起来，做成一个菱形（图 1. b）．菱形每边的长度是固定的，四个頂角可以自由活动．将这个菱形的四个頂点

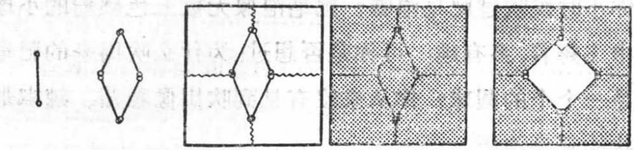


图 1.a　　图 1.b　　图 1.c　　图 1.d　　图 1.e

用細綫結在铁框上（如图 1. c）．这时，若将铁框在肥皂液中浸一下，铁框以及菱形的表面立即張蒙了一层肥皂膜（图 1. d）．如果用小針将菱形內的薄膜刺破，菱形就立刻变成一个正方形（图 1. e）．

我們知道，当菱形內的薄膜消失后，由于外部肥皂膜的表面張力的收縮作用，菱形的面积就尽可能地張大．实驗的結果表明：菱形最后变成了正方形．于是，这个实驗便向我們提出了一个数学命題：“在周长相同的一切菱形中，以正方形的面积为最大．”

〔实驗二〕将一条有固定长度的柔軟細絲的两头連接起来，圍成一条有任意形状的封閉曲綫（图 2. a）．将此曲綫輕輕

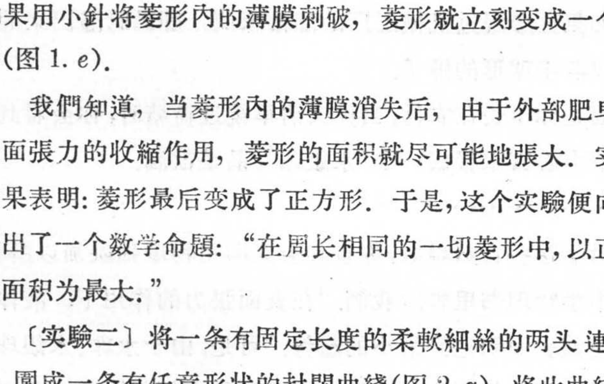


图 2.a　　图 2.b　　图 2.c

地擱置在一个蒙有肥皂膜的铁框上(图 2. b). 如果用小針将曲綫內的薄膜刺破，这条曲綫就立刻变成一个圓(图 2. c).

用与前一个实驗同样的理由来解釋这个实驗的結果，必然地引导出另一个新的数学命題:“在周长相同的所有封閉平面曲綫中,以圓所圍的面积为最大.”

上面两个数学命題有一个相同的特点，即在对周界加上一些限制后,断言某些平面图形具有最大的面积. 这一类型的数学問題統称为**等周問題**. 前面提出的就是等周問題的几个特例，它們的正确性当然有待于用严格的数学方法来加以证明. 除上面提出的几个特殊的等周問題外，还有不少著名的等周問題. 高等数学里关于这类問題已經有了非常丰富的理論. 这本小册子的主要任务是用中学平面几何和平面三角的方法来討論某些簡单的等周問題。

二　几个簡单的引理

我們从最簡单的关于三角形的几个等周問題談起.

先考虑这样一个問題: 在两边长度給定的所有三角形中，怎样的三角形面积最大? 任取长度給定的一边 CA 为底,其对应的高将随着两給定边 CA、CB 的夹角 θ 而改变(图 3). 从图上可以看出，开始时面积随着 θ 的增大而增大$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; 但当 θ 增大到

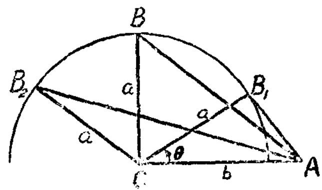


图 3

了$\frac{\pi}{2}$以后，面积却随着θ的增大反而减小$\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\right)$. 从这个变化过程可以导出:

引理一 两边长度給定的所有三角形中，以給定的两边相互垂直时的三角形的面积最大.

证明 設两給定边的长度为a、b，夹角为θ(图 3). 此时，三角形面积S的表达式是

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，正弦函数具有最大値. 因此，三角形面积也就具有最大値.

下面我們再考慮: 在底边及頂角給定的所有三角形中，怎样的三角形面积最大? 在底边及另外两側边之和給定的所有三角形中，怎样的三角形面积最大?这些簡单的等周問題在往后的討論中起着重要的作用.

引理二 在底边及頂角給定的所有三角形中，以等腰三角形的面积最大.

证明 以給定的底边AB为弦，做圓弧$\overset{\frown}{BCA}$，使其所張的圓周角等于給定的頂角$\angle BCA$(图 4). 由頂点C到底边AB引垂綫CD，三角形的面积等于$\frac{1}{2}AB\cdot CD$. 由于AB是給定的，故当CD取最大値时，三角形的面积亦取最大値. 易知，当C点位于圓弧$\overset{\frown}{BCA}$的中点时，高CD具有最大

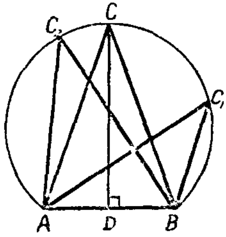


图 4

值，因而 $\triangle ABC$ 的面积亦最大. 而此时，显然有 $BC=AC$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

为了使用方便起見，我們把引理二表成另一种形式:

引理二* 以圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弦 AB 为底，頂点 C 在圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的所有三角形中，当頂点 C 位于圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，三角形的面积最大.

引理三 在底边及两側边的长度之和分别給定的所有三角形中，以等腰三角形的面积最大.

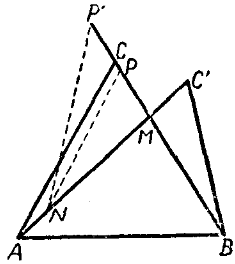


图 5

证明 作等腰三角形 ABC 和不等腰三角形 ABC'，其公共底边 AB 等于定长，C 与 C' 在 AB 的同側，且 $AC+BC=AC'+BC'$ 亦为定长 (图 5). 容易看出 $\triangle ABC'$ 的頂点 C' 不可能落在 $\angle BCA$ 或其对頂角內，否則将有

$$AC'+BC'<AC+BC \text{ 或 } AC'+BC'>AC+BC,$$

这是不允許的. 因此，C' 只能落在同 $\angle BCA$ 相邻的 $\triangle ABC$ 的一个外角內. 由于 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，不妨設 C' 落在 BC 边的外側，AC' 与 BC 相交. 設 AC' 和 BC 相交于 M，交点 M 将 AC' 和 BC 各分为两段 AM、MC' 及 BM、MC. 由于

$$\angle MAB<\angle CAB, \text{ 而 } \angle CAB=\angle CBA=\angle MBA,$$

所以

$$\angle MAB<\angle MBA.$$

因此，在 $\triangle MAB$ 中，$AM>BM$.

这样，我們就可以在綫段 AM 上取一点 N，使 $MN=MB$; 再在直綫 MC 上取一点 P，使 $MP=MC'$. 如果 P 点落在綫

段 MC 上，那末在$\triangle NPM$ 和 $\triangle BC'M$ 中，由于 $MN=MB$，$MP=MC'$且$\angle NMP=\angle BMC'$，所以 $\triangle NPM\cong\triangle BC'M$. 因此，$\triangle NPM$ 的面积 $S_{\triangle NPM}$ 也就等于$\triangle BC'M$ 的面积 $S_{\triangle BC'M}$. 于是

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle NMP}+S_{\square ANPC}\\&=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle BC'M}+S_{\square ANPC}\\&>S_{\triangle ABM}+S_{\triangle BC'M}=S_{\triangle ABC'}.\end{aligned}$$

这就是我們要证的結果. 由此，問题全部归結为证明 P 点落在綫段 MC 上. 如果不是这样，設 P 点落在 MC 的延长綫上(記为 P')，那么由于

$$AC+BC=AC'+BC',$$

而 $$BC=BM+MC=BM+MP'-CP',$$

$$AC'=AM+MC'=AN+NM+MC',$$

从而有 $$AC+BM+MP'-CP'=AN+NM+MC'+BC'.$$

由于 $$MP'=MC',\quad MN=MB,$$

$$\triangle NP'M\cong\triangle BC'M,\quad NP'=BC'.$$

所以上式可簡化为 $$AC-CP'=AN+BC'=AN+NP',$$

即 $$AC=AN+NP'+P'C.$$

这显然是不可能的，因为两点間直綫最短. 故知 P 点必落在綫段 MC 上.

用完全相同的步驟可以证明:

引理三* 設两三角形的底边长度及两側边长度之和分别相等，那末两側边之差較小的三角形具有較大的面积.

附注 引理三有一簡单的证明:

設 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，$\triangle ABC'$ 不等腰，其公共底边 AB 等于定长，且 $AC+BC=AC'+BC'$(图 5*)．茲证:

$$S_{\triangle ABC}>S_{\triangle ABC'}.$$

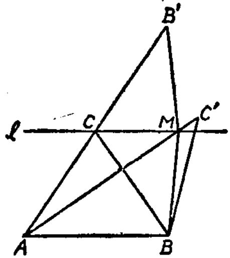


图 5*

不妨設 C、C' 在 AB 的同側，过 C 引直綫 l 平行 AB，現只需证 C' 落在 l 与 AB 之間．不然，若 AC' 与 l 相交于 M(可能 M 和 C' 重合，但 M 和 C 必不重合)．作 B 关于 l 的对称点 B'，即延长 AC 至 B'，使 $AC=CB'$，連 BM、$B'M$，則有:

$$AC'+BC'\geqslant AM+BM=AM+MB'>AC+CB'=AC+BC.$$

这是不可能的．

这证明方法虽言簡单，但它不能用来证明引理三*．

习　　題

1. 試证：对角綫为給定值 $2a$、$2b$ 的平行四边形中，以菱形的面积最大．

2. 試证：边长給定的平行四边形以矩形的面积为最大．

3. 要把一根圓柱形的木料鋸成截面是矩形的柱子(图6)，怎样鋸能使廢料最少？

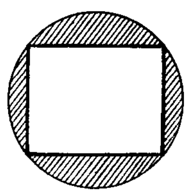


图　6

4. 內接于給定半圓周的所有矩形中，怎样的矩形的面积最大？

5. 圓 O 上給定一点 A，試引弦 BC 平行于 A 点的切綫而使三角形 ABC 的面积为最大．

6. 試证：上底、下底及周长給定的所有梯形中，以等腰梯形的面积

最大.

7. 試证：底边及面积給定的所有三角形中，以等腰三角形的周界最短.

8*. 設两三角形的底边长度及其側边长度之和都相等，試证側边之差較小的三角形具有較大的面积.

三　一些簡单的等周問題

这一节里，我們要用上节三个引理作为工具推出一些有趣的結果.

問題一　在周长一定的一切三角形中，怎样的三角形面积最大？

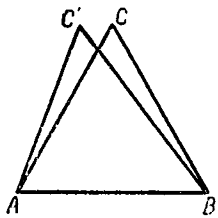


图 7

設 $\triangle ABC$ 就是那个面积最大的三角形（图 7），可以证明它一定是正三角形. 若不然，不妨設 $AC \neq BC$，那末将 AB 看作固定的底边，改变頂点 C 的位置到另一点 C'，使得 $AC'=C'B$，$AC'+BC'=AC+BC$. 此时 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 具有相同的底边 AB，且两側边之和亦相等. 因此根据引理三，等腰 $\triangle ABC'$ 的面积比 $\triangle ABC$ 的面积大. 另一方面这两三角形又具有相同的周长（因为它們有公共的底边，且两側边之和相等），这就与“$\triangle ABC$ 是所有周长相等的三角形中具有最大面积”的假設相矛盾. 这个矛盾表明周长一定面积最大的三角形不可能有不等长的边，所以是一个正三角形. 于是我們证明了这样的結論：“在周长一定的一切三角形中，以正三角形的面积为最

大.”

这个结论除了本身的兴趣外，利用它还可推出另一有趣的结果.

“n 个正数的几何平均不超过它们的算术平均”是一个重要的不等式. 这个不等式对 $n=2, 4, 8, 16, \cdots 2^m\cdots$ 等形状的数很容易证明，但对 $n\neq 2^m$ 形状的数证起来颇为不易，就是对 $n=3$亦不容易证明. 现在我们就想利用上面的几何事实给出 $n=3$ 时的证明，即要证

$$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\leqslant\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}, \text{其中}\,\alpha, \beta, \gamma\,\text{都是正数.}$$

命 $a=\beta+\gamma$，$b=\gamma+\alpha$，$c=\alpha+\beta$，以 a、b、c 为边作 $\triangle ABC$（图 8). 由于 a、b、c 三正数中，任两数之和都大于第三个数，因此可以做成一个三角形是无疑的.

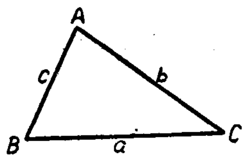


图 8

根据海伦公式，这个三角形的面积:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

这儿

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\alpha+\beta+\gamma.$$

所以

$$p-a=(\alpha+\beta+\gamma)-(\beta+\gamma)=\alpha,$$

$$p-b=\beta,\ \ p-c=\gamma.$$

于是$\triangle ABC$ 的面积可以写为 $S=\sqrt{p(\alpha\beta\gamma)}$.

由于这个三角形的周长等于 $a+b+c=2p$，由刚才证明

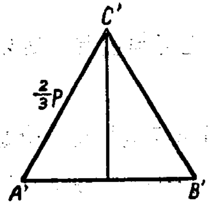


图 9

的命题知道，以 $2p$ 为周长的正三角形 $A'B'C'$ 的面积 S'(图 9)一定比 S 大. 但

$$S'=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2p}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{9}p^2.$$

于是得

$$\sqrt{p\alpha\beta\gamma}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}p^2.$$

两边平方，得

$$p\alpha\beta\gamma\leqslant\frac{3}{81}p^4=\frac{1}{27}p^4,$$

即 $$\alpha\beta\gamma\leqslant\frac{1}{27}p^3=\frac{1}{27}(\alpha+\beta+\gamma)^3.$$

在不等式两端开立方，即得

$$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\leqslant\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

問題二 周长一定的一切四边形中，怎样的四边形面积最大？

設四边形 $ABCD$ 就是那个具有最大面积的四边形(图 10). 連对角綫 AC，易知当底边 AC 及两側边 AB、BC 之和一定的条件下，$\triangle ABC$ 的面积亦为最大. 否則，将 $\triangle ABC$ 剪下来换上另一个以 AC 为底，两側边之和等于 $AB+BC$ 而面积更大的 $\triangle AB^*C$. 此时四边形 AB^*CD 的周长和 $ABCD$ 的周长相等，但却具有更大的面积，这和假設四边形 $ABCD$ 的面积最大相矛盾. 于是，根据引理三 $\triangle ABC$ 是一

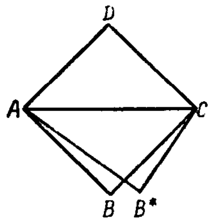


图 10

个等腰三角形即 $AB=BC$. 同理可知 $BC=CD$、$CD=DA$, 因此 $ABCD$ 是一个菱形（图 11）. 設該菱形的边长为 a, 銳角为 θ. 菱形面积等于底乘高, 即

$$S_{ABCD}=a^2\sin\theta,$$

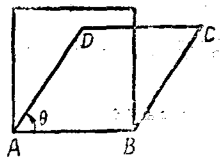


图 11

但因这个菱形是所有边长一定的菱形中具有最大面积者, 故必須 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 也就是說四边形 $ABCD$ 是正方形. 周长一定的正方形是唯一的, 于是我們得到了类似于問題一的結果:

定理 周长一定的一切四边形中, 以正方形的面积最大.

由于矩形是一种特殊的四边形; 正方形又是一种特殊的矩形, 因此根据剛才的定理我們又可推出众所周知的結果:

周长一定的一切矩形中, 正方形的面积最大, 即两正数 a_1、a_2 的几何平均 $\sqrt{a_1a_2}$ 不超过它的算术平均 $\frac{a_1+a_2}{2}$.

我們还可用它来解答下面的一道題:

如图 12, $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 都是正方形, 而 A', B', C', D' 顺次分 AB, BC, CD, DA 成 $m:n$, 并設 $AB=1$. 試证正方形 $A'B'C'D'$ 的面积不小于 $\frac{1}{2}$.

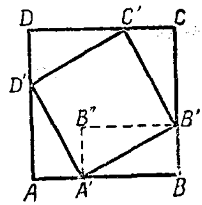


图 12

我們只要证明在所有可能的正方形 $A'B'C'D'$ 中面积最小的等于 $\frac{1}{2}$ 就行了.

要使正方形 $A'B'C'D'$ 的面积最小, 只要边上四个直角三

角形的面积最大．由于这四个直角三角形是全等的，因此只要使其中一个有最大面积就可以了．现在考虑 $\triangle A'BB'$，由于 $S_{\triangle A'BB'}=\frac{1}{2}S_{\square A'BB'B''}$，因此只要看在什么情况下矩形 $A'BB'B''$ 有最大面积．因为这种矩形的周长等于 $2AB=2$，是一个常数，于是根据刚才证明过的定理知道，当这矩形是正方形时面积最大．此时 $A'B=BB'$，但因 $A'B+BB'=AB=1$，

$\therefore\quad A'B=BB'=\frac{1}{2}$，即 A'、B' 分别是 AB、BC 的中点．也就是说，当 A'、B'、C'、D' 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点时，正方形 $A'B'C'D'$ 具有最小的面积，此时 $A'B'=\sqrt{A'B^2+BB'^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

所以 $\quad S_{\square A'B'C'D'}=A'B'^2=\frac{1}{2}$.

问题三 内接同一圆的所有 n 边形中，怎样的 n 边形面积最大？

解 设 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 就是那个面积最大的 n 边形(图13)．连结 A_1A_3，则所有以 A_1A_3 为底，而顶点在给定圆弧 $\overset{\frown}{A_1A_2A_3}$ 上的一切三角形中以 $\triangle A_1A_2A_3$ 的面积为最大．不然的话，必能在 $\overset{\frown}{A_1A_2A_3}$ 上找到另一点 A_2^*，使 $S_{\triangle A_1A_2^*A_3}>S_{\triangle A_1A_2A_3}$，于是 n 边形 $A_1A_2^*\cdots A_n$ 的面积就大于 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积，即 $S_{A_1A_2^*A_3\cdots A_n}>S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}$，这和假设矛盾．因此，

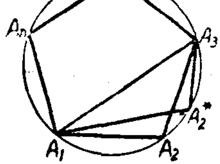


图 13

$\triangle A_1A_2A_3$ 的面积为最大，根据引理二得知 $A_1A_2=A_2A_3$. 同理可知 $A_2A_3=A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}=A_{n-1}A_n$，故知 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是等边的. 一个 n 边形既等边且又内接于圓，一定是正 n 边形. 由此，我們得到了下面的定理:

定理 內接同一圓的所有 n 边形中，以正 n 边形的面积最大.

当 $n=3$ 时，这个定理告訴我們: 內接同一圓的所有三角形中，以正三角形的面积最大. 这个結論虽和問題一的結論一致，但并不是一回事. 問題一所考慮的是一切周长相等的三角形，它不能內接于同一圓; 而內接于同一圓的三角形，其周长不可能全部相等. 因此，这两个結論的意义是不一样的.

使用完全相同的方法，可以得到下面类似的定理.

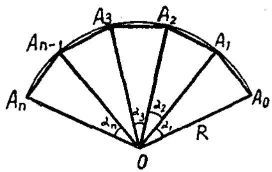


图 14

定理 以扇形两半徑为邻边，內接同一扇形的所有 $n+2$ 边形中，当內接于圓弧的 n 条边(弦)相等时，$n+2$ 边形的面积最大(图 14).

这个定理使我們能推出一个重要的正弦函数的不等式.

将半徑为 R 的扇形 $O-\overset{\frown}{A_0A_1\cdots A_n}$*) 任意分为 n 个小扇形 $O-\overset{\frown}{A_0A_1}$、$O-\overset{\frown}{A_1A_2}$、$\cdots O-\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$(图 14)，它們的頂角分别是 α_1、α_2、$\cdots\alpha_n$. 連小扇形弧的两端，得 n 个三角形 OA_0A_1、OA_1A_2、$\cdots OA_{n-1}A_n$，它們的面积之和是

---

*) 中学課本上記为: 扇形 OA_0A_n.