

中国数学会专家推荐使用教材

21 世纪高等学校数学系列教材

高等数学

(上)

编写组 编

湖南教育出版社
www.hnep.com

内容提要:

本套书根据教育部最新制定的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》,并参考全国硕士研究生入学统考《数学考试大纲》编写而成.

本套书分上、下两册.上册内容为预备知识,极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程.书末附有 MATLAB 常用函数表,部分数学词汇汉英对照,部分数学家简介以及部分习题答案与提示.

本书遵循高等教育的教学规律,坚持“以服务专业为目的,以培养能力为宗旨”的编写原则,具有结构严谨,逻辑清晰,叙述详细,通俗易懂,题量适中,便于自学等优点,可作为高等院校工科类专业高等数学课程的选用教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/《高等数学》教材编写组编. —长沙:湖南教育出版社,2006.5

ISBN 7-5355-4824-5

I. 高... II. 高... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 035675 号

高等数学

上册

《高等数学》编写组 编

责任编辑:郑绍辉

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路 443 号)

网 址: <http://www.hnepi.com>

电子邮箱: csgaojiao@163.com

湖南华商文化商务有限公司印刷

787×960 16 开 印张:20.25 字数:380000

2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

ISBN7-5355-4824-5/G·4819

全套定价:48.00 元

本书若有印刷、装订错误,可向承印厂调换

前 言

“高等院校数学系列教材”是在中国数学学会有关专家的关心和指导下,由湖南教育出版社组织国内知名院校的专家和具有丰富教学经验的教师在研究国内外同类教材的各种版本的基础上,取长补短,并结合当前高等院校数学教学的改革实践编写而成,该系列教材包括《高等数学》(上、下)、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《大学文科数学》。

本套书是根据教育部最新制定的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》,并参考全国硕士研究生入学统考《数学考试大纲》编写而成,可作为高等院校工科类各专业高等数学课程的选用教材或教学参考书。

本套书分上、下两册,共12章。上册各章内容是:预备知识,极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程;下册各章内容是:向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数。本套书遵循高等教育的教学规律,坚持“以服务专业为目的,以培养能力为宗旨”的编写原则,力求体现“夯实基础,渗透思想,注重应用,重视创新”的特色。编写思想具体体现如下:

1. 高等数学与初等数学紧密衔接。增加预备知识一章,适当复习初等数学的相关内容,便于教师根据教学时数和学生的基础进行取舍。

2. 数学知识与数学思想方法紧密结合。对有重要应用的数学思想方法,如映射的思想、坐标方法的思想、极限的思想、局部线性化的思想、变换的思想以及最优化的思想等,予以足够的重视,使学生在学完本课程后,对这些思想方法有一定的领悟。

3. 抽象思维与直观形象紧密结合。尽量按照辩证唯物论的认识论,即由特殊到一般,再由一般到特殊的认识过程编写。引进重要的数学概念和定理时,在保证数学概念的准确性及基本理论的完整性、系统性的原则下,尽量借助几何直观图形、物理意义和现代教学手段来解释这些概念和定理,力求使抽象的数学概念形象化。

4. 理论知识与实际问题的紧密结合。适当减少纯理论的求证,根据各专业特点,尽量多选择工程上应用性例题和习题,以提高学生用数学知识解决实际问题的能力 and 意识。

5. 基本要求与知识拓宽紧密结合。在讲述基本要求的同时,结合知识的延伸

点,开辟“思考”栏目,引导学生进一步探究,拓宽他们的知识面,培养他们的数学思维能力.书后附有本书“部分数学词汇汉英对照”以及本书出现的“部分数学家简介”,以增加学生的课外知识,提高数学文化素养.

6. 传统内容与信息技术紧密结合. 开辟“实验空间”栏目,介绍了用 MATLAB 求解数学问题的方法,通过上机实验,让学生掌握用计算机求解疑难问题的方法,扩充解决实际问题的手段,从而可提高学生学习数学知识的兴趣和解决实际问题的能力.

7. 为专业服务与学生进一步发展紧密结合. 部分章节前加了*号,作为选修内容,以适应不同专业的需要. 同时,开辟“考研园地”栏目,选讲了历届全国研究生入学统考数学(一)试题,以满足部分准备进一步深造的学生的需要.

本套书从第2章开始,每节后都编有习题,供课内外选用. 每章后都编有复习题,作为每章复习用. 习题序号前加了*号的,是历届考研数学(一)试题,供需要考研的学生复习时选用;习题的序号加了外框的,是数学实验题,供学生上机实验用. 书后附有部分习题的解答或提示,供学生学习时查用.

本书的基本教学时数约84学时,另外安排6课时作为上机实验. 若安排每周6课时,则第1学期可学完.

在本套书的编写过程中,得到了高等院校许多专家的关心和支持,特别是冷岗松教授、张焱教授、刘建州教授,为本书的编写提出了许多有益的建议,特别是中国数学会张景中院士在百忙中抽出时间仔细审阅了全稿,并提出了很多建设性建议,谨在此表示衷心感谢. 湖南教育出版社的有关同志为本书的编辑和出版花了很多心血,在此一并致谢. 由于成书仓促,不足之处,请有关专家、学者及使用本书的师生指正.

编写组

2005年10月

目 录

第 1 章 预备知识	1
1.1 集合	1
1. 集合的概念(1) 2. 集合的运算(2)	
1.2 实数集	4
1. 实数与数轴(4) 2. 实数的绝对值(4) 3. 区间与邻域(5)	
1.3 映射	6
1. 映射的概念(6) 2. 几种特殊映射(7)	
1.4 函数	8
1. 函数的概念(8) 2. 函数的几种特性(11)	
1.5 反函数与复合函数	13
1. 反函数(13) 2. 复合函数(15)	
1.6 初等函数	15
1. 基本初等函数(15) 2. 初等函数(19)	
实验空间 数学实验简介	22
复习题一	24
第 2 章 极限与连续	27
2.1 数列的极限	27
1. 数列极限的定义(27) 2. 收敛数列的性质(30)	
习题 2-1	32
2.2 函数的极限	33
1. 函数极限的定义(33) 2. 函数极限的性质(38)	
习题 2-2	39
2.3 无穷小与无穷大	39
1. 无穷小(39) 2. 无穷大(41) 3. 无穷小与无穷大的关系(42)	
习题 2-3	42
2.4 极限的运算法则	43

1. 极限的四则运算法则(43)	2. 复合函数的极限法则(47)	
习题 2-4		48
2.5 极限存在准则 两个重要极限		49
1. 极限存在准则 I 与重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (49)		
2. 极限存在准则 II 与重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (51)	3. 柯西收敛原理(54)	
习题 2-5		55
2.6 无穷小的比较		55
1. 无穷小阶的定义(55)	2. 等价无穷小的性质(57)	3. 无穷小的主部(58)
实验空间 用 MATLAB 求极限		59
习题 2-6		60
2.7 函数的连续性		60
1. 函数连续的定义(60)	2. 函数的间断点(63)	
习题 2-7		64
2.8 连续函数的运算法则与初等函数的连续性		65
1. 连续函数的运算法则(65)	2. 初等函数的连续性(65)	
3. 连续性在极限计算中的应用(66)		
考研园地 用重要极限求极限		67
习题 2-8		68
2.9 闭区间上连续函数的性质		68
1. 最大值最小值定理(68)	2. 介值定理与零点定理(69)	
习题 2-9		70
复习题二		71
第 3 章 导数与微分		73
3.1 导数的概念		73
1. 导数的定义(73)	2. 求导数举例(76)	3. 单侧导数(78)
考研园地 求单侧导数		79
4. 导数的几何意义(79)		
考研园地 切线问题		80
5. 可导与连续的关系(80)		
习题 3-1		81
3.2 函数的求导法则		82
1. 函数的和、差、积、商的求导法则(82)	2. 反函数的求导法则(85)	
3. 复合函数的求导法则(86)	4. 初等函数的导数(88)	
习题 3-2		90
3.3 隐函数及参数方程所确定的函数的导数相关变化率		91

1. 隐函数的导数(91)	2. 参数方程所确定的函数的导数(93)	
3. 相关变化率(94)		
习题 3-3		95
3.4 高阶导数		96
考研园地 求导问题		99
实验空间 用 MATLAB 求函数的导数		100
习题 3-4		101
3.5 函数的微分		102
1. 微分的定义(102)	2. 微分的几何意义(104)	
3. 微分基本公式与法则(104)	4. 微分在近似计算中的应用(106)	
习题 3-5		109
复习题三		111
第 4 章 中值定理与导数的应用		113
4.1 中值定理		113
1. 罗尔(Rolle)定理(113)	2. 拉格朗日(Lagrange)定理(114)	
3. 柯西(Cauchy)定理(117)		
考研园地 用拉格朗日定理求证		118
习题 4-1		118
4.2 洛必达法则		119
1. 未定式 $\frac{0}{0}$ 型的极限求法(119)	2. 未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限求法(121)	
3. 其他类型的未定式极限的求法(122)		
考研园地 用洛必达法则求极限		123
习题 4-2		123
4.3 泰勒公式		124
1. 泰勒公式(124)	2. 泰勒公式的应用(127)	
考研园地 泰勒公式的应用		129
习题 4-3		130
4.4 函数单调性的判别法		130
考研园地 用单调性证明不等式		132
习题 4-4		133
4.5 函数的极值		133
1. 函数极值的定义(133)	2. 函数极值的判定和求法(134)	
考研园地 极值问题		137
习题 4-5		137
4.6 函数的最大值和最小值		138
考研园地 用最大值和最小值证明不等式		140

实验空间 用 MATLAB 求函数的最大值和最小值	140
习题 4-6	140
4.7 函数的凹凸性与拐点	141
习题 4-7	144
4.8 函数图形的描绘	144
1. 曲线的渐近线(144) 2. 函数图形的描绘(146)	
考研园地 函数的图形问题	148
实验空间 用 MATLAB 作函数的图形	149
习题 4-8	149
4.9 曲率	150
1. 弧微分(150) 2. 曲率及其计算公式(152) 3. 曲率圆和曲率半径(154)	
习题 4-9	155
复习题四	156
第 5 章 不定积分	158
5.1 不定积分的概念	158
1. 原函数的概念(158) 2. 不定积分的定义(159)	
3. 不定积分的几何意义(160)	
习题 5-1	161
5.2 不定积分的基本公式和运算法则	162
1. 不定积分的基本公式(162) 2. 不定积分的运算法则(164)	
习题 5-2	165
5.3 换元积分法	166
1. 第一类换元积分法(166) 2. 第二类换元积分法(169)	
习题 5-3	174
5.4 分部积分法	174
考研园地 求不定积分问题	179
习题 5-4	179
*5.5 几种初等函数的积分	179
1. 有理函数的积分(179) 2. 三角函数有理式的积分举例(184)	
考研园地 有理三角函数的不定积分	186
实验空间 用 MATLAB 求不定积分	186
习题 5-5	187
复习题五	187
第 6 章 定积分及其应用	189
6.1 定积分的概念与性质	189

1. 两个实例(189)	2. 定积分的定义(191)	
3. 定积分的几何意义(193)	4. 定积分的性质(194)	
考研园地 用定积分的几何意义解题		198
习题 6-1		198
6.2 微积分基本公式		199
1. 积分上限的函数及其导数(199)		
考研园地 关于变限积分的问题		201
2. 微积分基本公式(201)		
习题 6-2		203
6.3 定积分的换元积分法与分部积分法		204
1. 定积分的换元积分法(204)		
考研园地 用定积分的换元法解题		207
2. 定积分的分部积分法(207)		
考研园地 用定积分的分部积分法解题		209
习题 6-3		210
6.4 广义积分		211
1. 无限区间上的广义积分(211)		
考研园地 广义积分问题		213
2. 无界函数的广义积分(213)	* 3. Γ 函数(215)	
实验空间 用 MATLAB 求定积分和广义积分		217
习题 6-4		218
6.5 定积分在几何上的应用		219
1. 平面图形的面积(219)	2. 空间立体的体积(222)	3. 平面曲线的弧长(225)
考研园地 定积分的几何应用问题		227
习题 6-5		228
6.6 定积分在物理上的应用		229
1. 功(229)	2. 液体的压力(231)	
考研园地 定积分的物理应用问题		232
习题 6-6		233
复习题六		233
第7章 微分方程		235
7.1 微分方程的概念		235
习题 7-1		238
7.2 可分离变量的微分方程		239
习题 7-2		244
7.3 齐次方程		244
1. 齐次方程及其解法(244)	* 2. 可化为齐次方程的微分方程(247)	

习题 7-3	249
7.4 一阶线性微分方程	249
1. 一阶线性微分方程(249) 2. 伯努利方程(254)	
考研园地 伯努利方程的求解问题	255
习题 7-4	255
* 7.5 可降阶的二阶微分方程	256
1. $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程(256) 2. $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程(258)	
考研园地 微分方程应用题	259
习题 7-5	260
7.6 线性微分方程解的结构	260
1. 二阶线性微分方程解的结构(260) 2. n 阶线性微分方程解的结构(262)	
习题 7-6	263
7.7 常系数线性微分方程	264
1. 二阶常系数齐次线性微分方程(264) 2. n 阶常系数齐次线性微分方程(270)	
习题 7-7	271
7.8 常系数非齐次线性微分方程	271
考研园地 二阶线性微分方程的求解问题	276
习题 7-8	278
7.9 欧拉方程	278
习题 7-9	281
* 7.10 常系数线性微分方程组解法举例	281
实验空间 用 MATLAB 求解微分方程	283
习题 7-10	284
复习题七	285
附录一 MATLAB 常用函数表	287
附录二 部分数学词汇汉英对照	289
附录三 本书出现的部分数学家简介	290
部分习题的答案或提示	292

第 1 章 预备知识

集合是数学的基础,函数是高等数学主要的研究对象.本章在中学数学的基础上,对集合、函数概念作归纳总结和加深,为后面学习高等数学知识打基础.

1.1 集合

1. 集合的概念

我们在初等数学中学过集合的概念.我们把具有某种特定性质的一组对象组成的整体称为**集合**(简称**集**).集合里的各个对象称为这个集合的**元素**.常用大写字母 A, B, C 等表示集合,用小写字母 a, b, c 等表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$ (或 $a \bar{\in} A$).集合中的元素具有**确定性**,**互异性**,**无序性**.若一个集合只含有有限个元素,则称为**有限集**,否则称为**无限集**.

表示集合的常用方法有列举法和描述法.把集合的元素一一列举出来(不必考虑元素之间的顺序)写在大括号内表示集合的方法,称为**列举法**.例如,由元素 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的集合 A 可表示为

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

把集合中的元素所具有的特性质描述出来,写在大括号内表示集合的方法称为**描述法**.若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,则可表示为

$$M = \{x | x \text{ 具有性质 } P\},$$

其中,竖线左边的部分表示这个元素的一般形式,竖线右边的部分表示这个集合的元素具有的特性质.例如,不等式 $x+1 > 0$ 的解集可表示为

$$\{x | x+1 > 0\}.$$

由数组成的集合称为**数集**.有几个经常遇到的数集,用特定的字母表示.全体自然数(即非负整数)组成的集合称为**自然数集**,记作 \mathbf{N} ,即

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\};$$

全体整数组成的集合称为**整数集**,记作 \mathbf{Z} ,即

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\};$$

全体有理数组成的集合称为**有理数集**,记作 \mathbf{Q} ,即

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\};$$

全体实数组成的集合称为**实数集**,记作 \mathbf{R} . 全体复数组成的集合称为**复数集**,记作 \mathbf{C} ,即

$$\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}.$$

有时还把上述数集记号的右上方加上“+”,“-”等标记,表示某些特定的数集,如 \mathbf{R}^- 表示负实数集, \mathbf{R}^+ 表示正实数集等等.

对于两个集合 A 和 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 称为集合 B 的**子集**,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).

不含有任何元素的集合称为**空集**,记作 \emptyset ,且规定空集 \emptyset 是任何集合 A 的子集,即 $\emptyset \subseteq A$. 至少含有一个元素的集合称为**非空集**.

任何一个集合 A 是它本身的子集,即有 $A \subseteq A$. 若 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,那么集合 A 称为集合 B 的**真子集**,记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$). 例如,自然数集 \mathbf{N} 是它本身的子集,但不是它的真子集,即 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$. \mathbf{N} 是实数 \mathbf{R} 的子集,也是 \mathbf{R} 的真子集,即 $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{R}$. 空集是任何非空集的真子集.

对于两个集合 A 和 B ,若 A, B 中的元素完全相同,则称这两个集合**相等**,记作 $A = B$. 当 $A = B$ 时,有 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$;反之,当 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$ 时,有 $A = B$.

2. 集合的运算

设 A 与 B 是两个集合,由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**并集**(简称并),记作 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**交集**(简称交),记作 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\};$$

由所有属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**差集**(简称差),记作 $A - B$,即

$$A - B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \notin B\};$$

由所研究的全体对象构成的集合称为**全集**,记作 U ,并把差集 $U - A$ 称为 A 的**补集**(简称补)或**余集**(简称余),记作 A^c . 例如,设 $A = \{x \mid x > 1\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 2\}$, $U = \mathbf{R}$,则

$$A - B = \{x \mid x \geq 2\},$$

$$A^c = U - A = \{x \mid x \leq 1\}.$$

设 A, B, C 为任意三个集合,则下列运算律成立:

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(4) 摩根律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

上述运算律可根据集合包含和相等的定义证明,下面我们来证明摩根律第一式,其他类似可证.

先证 $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$: 因为

$\forall x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ 且 $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$,
所以由包含的定义,得 $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$;

再证 $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$: 因为

$\forall x \in A^c \cap B^c \Rightarrow x \in A^c$ 且 $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^c$,
所以由包含的定义,得 $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$.

综上,由集合相等的定义,得

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

说明 在上述证明中,我们用到了记号“ \forall ”(是单词 All 第一个字母的倒写),意为“对任意的”或“对每一个”. 另外还有一个记号“ \exists ”(是单词 Exist 第一个字母的反写),意为“存在”. 这两个记号都是逻辑量词记号,今后经常用到.

由两个元素组成的有序数组 (x_1, x_2) , 称为二元有序数组; 由三个元素组成的有序数组 (x_1, x_2, x_3) , 称为三元有序数组; 一般地, 由 n 个元素组成的有序数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 称为 n 元有序数组.

设 A, B 是任意两个集合, 且 $x \in A, y \in B$, 则所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合, 称为 A 与 B 的直集(或笛卡儿乘积), 记作 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

例 1 设 $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$, 求 $A \times A, A \times B$.

解 $A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$,

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

注意 $A \times A$ 常记作 A^2 . 例如, xOy 平面上全体点的集合可表示为 \mathbf{R}^2 , 即

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

类似地, 可定义

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) | x \in A, y \in B, z \in C\}.$$

例 2 设 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{0\}$, 求 $A \times B \times C$.

解 $A \times B \times C = \{(1, 2, 0), (1, 3, 0), (2, 2, 0), (2, 3, 0)\}$.

1.2 实数集

1. 实数与数轴

有理数和无理数统称为**实数**. 实数常常用一直线上的点来作为它的几何表示. 这样一条可用来表示实数的直线称为**实直线**或**数轴**. 在直线上选定一点表示0, 选定另一点表示单位1, 这样就确定了一条实直线. 在相应的欧几里得的公理体系下, 实直线上的每一点对应且只对应一个实数; 反之, 每一个实数可以用一条直线上的点表示. 即实数集 \mathbf{R} 与数轴上的点集构成了一一对应. 因此, 我们有时不将一个实数和一个表示该实数的点加以区别. 表示实数 x 的点, 通常说成“点 x ”.

实数集是有序集, 即实数集的任何两个元素之间可比较大小. 这种可以比较大小的关系有一个简单的几何解释: 若 $x < y$, 则点 x 位于点 y 的左边(图1-1). 正数位于0的右边, 负数位于0的左边. $a < b$, 且 $\exists x$ 满足 $a < x < b$, 当且仅当点 x 在点 a 与点 b 之间.

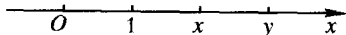


图1-1

实数有一个很重要的性质, 称为连续性, 即 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a < b$, 则 $\exists r \in \mathbf{R}$, 使 $a < r < b$. 这就是说, 在任何两个实数之间, 必有另一个实数, 即实数充满数轴而没有空隙.

2. 实数的绝对值

一个实数 x 的绝对值记为 $|x|$, 其定义如下:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

在几何上, 它表示数轴上点 x 与原点之间的距离.

根据绝对值的定义, 可证明下述性质:

$$(1) |x| = C (C > 0) \Rightarrow x = C \text{ 或 } x = -C.$$

$$(2) |x| < C \Leftrightarrow -C < x < C (C > 0).$$

$$(3) |x| > C \Rightarrow x < -C \text{ 或 } x > C (C > 0).$$

$$(4) \forall x \in \mathbf{R}, \text{ 有 } -|x| \leq x \leq |x|.$$

$$(5) |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$(6) |x - y| \geq |x| - |y|.$$

$$(7) |xy| = |x| |y|.$$

$$(8) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

例1 设 $\varepsilon > 0$, 且 $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, 求证 $|(x + y) - (a + b)| < \varepsilon$.

证 因为 $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, 所以

$$|(x+y) - (a+b)| = |(x-a) + (y-b)| \leq$$

$$|x-a| + |y-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

例2 设 $\varepsilon > 0$, 当自然数 n 为何值时, 不等式 $\left| \frac{2n-3}{n} - 2 \right| < \varepsilon$ 成立?

解 $\left| \frac{2n-3}{n} - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon}.$

所以, 当 $n > \frac{3}{\varepsilon}$ 时, 原不等式成立.

3. 区间与邻域

在 a 与 b ($a < b$) 之间的一切点构成的集合称为区间, 其中 a, b 称为区间的端点, 而 $b-a$ 称为区间的长度. 有时区别区间是否含有端点是很重要的, 根据不同情况分别定义如下:

满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 组成的集合称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\};$$

满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 组成的集合称为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\};$$

满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的一切实数 x 组成的集合称为半开半闭区间, 分别记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$, 即

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\} \text{ 或 } [a, b) = \{x | a \leq x < b\}.$$

它们的几何表示如图 1-2 所示.

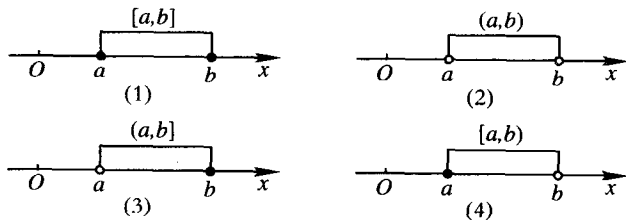


图 1-2

上述区间的长度都是有限的, 称为有限区间 (或有界区间). 当区间的长度为无限时, 称为无限区间 (或无穷区间). 无限区间有以下几种:

$$(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}, [a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\},$$

$$(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\}, (-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$$

其中记号“ $+\infty$ ”读作正无穷大, “ $-\infty$ ”读作负无穷大. 前面 4 个区间的几何表示如图 1-3 所示, 最后一个区间就是全体实数构成的集合 \mathbf{R} .

以后, 当不需要指明是哪一类区间时, 我们就简单地称它为“区间”, 且常用字母 I 表示.

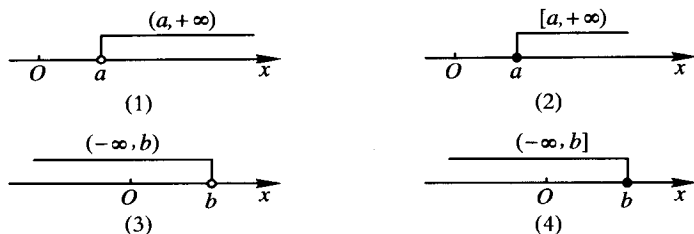


图 1-3

特别,我们把开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ ($\delta>0$)称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

或用绝对值可写作

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\},$$

其中 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径(图 1-4).

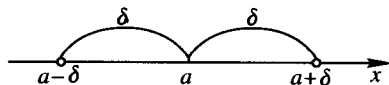


图 1-4

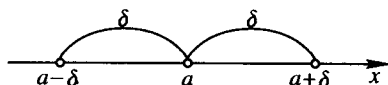


图 1-5

若在点 a 的 δ 邻域中去掉它的中心 a ,则得集合为 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$,称它为点 a 的去心 δ 邻域(图 1-5),记作 $\dot{U}(a, \delta)$,即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a, \text{ 或 } a < x < a+\delta\},$$

或用绝对值可写作

$$\dot{U} = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\},$$

其中 $0 < |x-a|$ 等价于 $x \neq a$.为了方便,有时称开区间 $(a-\delta, a)$ 为 a 的左邻域, $(a, a+\delta)$ 为 a 的右邻域.

两个区间的直积,表示 xOy 平面上的一个矩形区域.例如,闭区间 $[1, 3]$ 和 $[1, 2]$ 的直积

$$[1, 3] \times [1, 2] = \{(x, y) \mid x \in [1, 3], y \in [1, 2]\}$$

表示如图 1-6 所示的矩形区域.

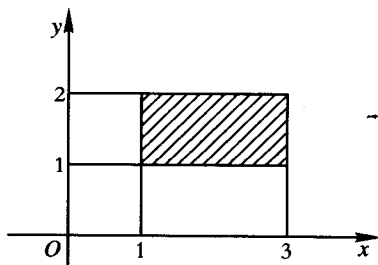


图 1-6

1.3 映射

1. 映射的概念

设 A, B 是两个非空集合,如果存在一个法则 f ,使得对于 A 中的每一个元素 a ,都有集合 B 中惟一确定元素 b 与之对应,则称 f 为 A 到 B 的一个映射,记作

$$f: A \rightarrow B,$$

$$a \mapsto b.$$