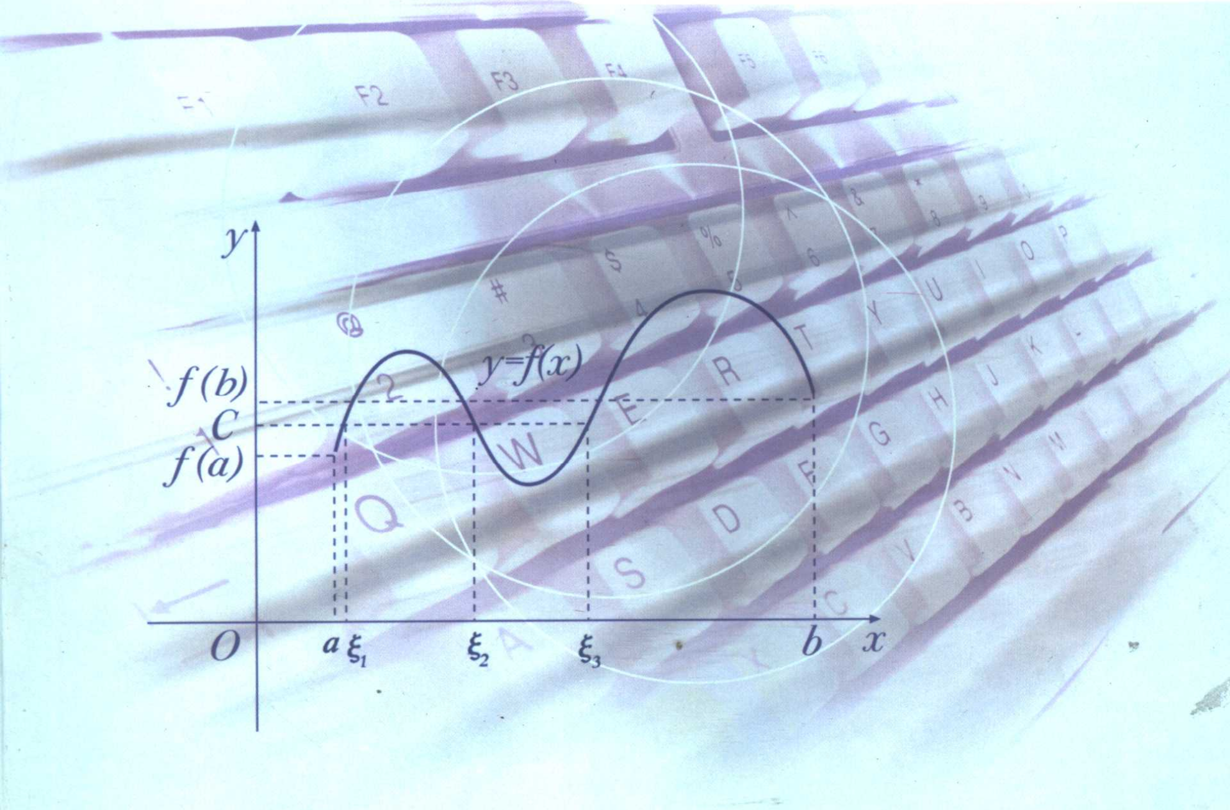
中国数学会专家推荐使用教材

21世纪高等学校数学系列教材

高等数学

（上）

编写组 编



湖南教育出版社
www.hneph.com

中国数学会专家推荐使用教材

21世纪高等学校数学系列教材

高等数学

（上）　编写组 编

湖南教育出版社
www.hneph.com

内容提要：

本套书根据教育部最新制定的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》，并参考全国硕士研究生入学统考《数学考试大纲》编写而成.

本套书分上、下两册. 上册内容为预备知识，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程. 书末附有 MATLAB 常用函数表，部分数学词汇汉英对照，部分数学家简介以及部分习题答案与提示.

本书遵循高等教育的教学规律，坚持"以服务专业为目的，以培养能力为宗旨"的编写原则，具有结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂，题量适中，便于自学等优点，可作为高等院校工科类各专业高等数学课程的选用教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/《高等数学》教材编写组编. —长沙：湖南教育出版社，2006.5

ISBN 7-5355-4824-5

Ⅰ.高... Ⅱ.高... Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 035675 号

高 等 数 学

上册

《高等数学》编写组 编

责任编辑：郑绍辉

湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）

网　　址：http://www.hneph.com

电子邮箱：csgaojiao@163.com

湖南华商文化商务有限公司印刷

787×960　16 开　印张：20.25　字数：380000

2006 年 5 月第 1 版　　2006 年 5 月第 1 次印刷

ISBN7-5355-4824-5/G·4819

全套定价：48.00 元

前　言

“高等院校数学系列教材”是在中国数学学会有关专家的关心和指导下，由湖南教育出版社组织国内知名院校的专家和具有丰富教学经验的教师在研究国内外同类教材的各种版本的基础上，取长补短，并结合当前高等院校数学教学的改革实践编写而成，该系列教材包括《高等数学》(上、下)、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《大学文科数学》.

本套书是根据教育部最新制定的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》，并参考全国硕士研究生入学统考《数学考试大纲》编写而成，可作为高等院校工科类各专业高等数学课程的选用教材或教学参考书.

本套书分上、下两册，共12章. 上册各章内容是：预备知识，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程；下册各章内容是：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数. 本套书遵循高等教育的教学规律，坚持“以服务专业为目的，以培养能力为宗旨”的编写原则，力求体现“夯实基础，渗透思想，注重应用，重视创新”的特色. 编写思想具体体现如下：

1. 高等数学与初等数学紧密衔接. 增加预备知识一章，适当复习初等数学的相关内容，便于教师根据教学时数和学生的基础进行取舍.

2. 数学知识与数学思想方法紧密结合. 对有重要应用的数学思想方法，如映射的思想、坐标方法的思想、极限的思想、局部线性化的思想、变换的思想以及最优化的思想等，予以足够的重视，使学生在学完本课程后，对这些思想方法有一定的领悟.

3. 抽象思维与直观形象紧密结合. 尽量按照辩证唯物论的认识论，即由特殊到一般，再由一般到特殊的认识过程编写. 引进重要的数学概念和定理时，在保证数学概念的准确性及基本理论的完整性、系统性的原则下，尽量借助几何直观图形、物理意义和现代教学手段来解释这些概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化.

4. 理论知识与实际问题紧密结合. 适当减少纯理论的求证，根据各专业特点，尽量多选择工程上应用性例题和习题，以提高学生用数学知识解决实际问题的能力和意识.

5. 基本要求与知识拓宽紧密结合. 在讲述基本要求的同时，结合知识的延伸

点，开辟“思考”栏目，引导学生进一步探究，拓宽他们的知识面，培养他们的数学思维能力. 书后附有本书“部分数学词汇汉英对照”以及本书出现的“部分数学家简介”，以增加学生的课外知识，提高数学文化素养.

6. 传统内容与信息技术紧密结合. 开辟“实验空间”栏目，介绍了用 MATLAB 求解数学问题的方法，通过上机实验，让学生掌握用计算机求解繁难问题的方法，扩充解决实际问题的手段，从而可提高学生学习数学知识的兴趣和解决实际问题的能力.

7. 为专业服务与学生进一步发展紧密结合. 部分章节前加了 * 号，作为选修内容，以适应不同专业的需要. 同时，开辟“考研园地”栏目，选讲了历届全国研究生入学统考数学(一)试题，以满足部分准备进一步深造的学生的需要.

本套书从第 2 章开始，每节后都编有习题，供课内外选用. 每章后都编有复习题，作为每章复习用. 习题序号前加了 * 号的，是历届考研数学(一)试题，供需要考研的学生复习时选用；习题的序号加了外框的，是数学实验题，供学生上机实验用. 书后附有部分习题的解答或提示，供学生学习时查用.

本书的基本教学时数约 84 学时，另外安排 6 课时作为上机实验. 若安排每周 6 课时，则第 1 学期可学完.

在本套书的编写过程中，得到了高等院校许多专家的关心和支持，特别是冷岗松教授、张垚教授、刘建州教授，为本书的编写提出了许多有益的建议，特别是中国数学会张景中院士在百忙中抽出时间仔细审阅了全稿，并提出了很多建设性建议，谨在此表示衷心感谢. 湖南教育出版社的有关同志为本书的编辑和出版花了很多心血，在此一并致谢. 由于成书仓促，不足之处，请有关专家、学者及使用本书的师生指正.

编写组

2005 年 10 月

目 录

第1章 预备知识

集合是数学的基础,函数是高等数学主要的研究对象.本章在中学数学的基础上,对集合、函数概念作归纳总结和加深,为后面学习高等数学知识打基础.

1.1 集合

1. 集合的概念

我们在初等数学中学过集合的概念.我们把具有某种特定性质的一组对象组成的整体称为**集合**(简称**集**).集合里的各个对象称为这个集合的**元素**.常用大写字母 A,B,C 等表示集合,用小写字母 a,b,c 等表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a **属于** A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a **不属于** A,记作 $a\notin A$(或 $a\,\overline{\in}\,A$).集合中的元素具有**确定性**,**互异性**,**无序性**.若一个集合只含有有限个元素,则称为**有限集**,否则称为**无限集**.

表示集合的常用方法有列举法和描述法.把集合的元素一一列举出来(不必考虑元素之间的顺序)写在大括号内表示集合的方法,称为**列举法**.例如,由元素 a_1,$a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

把集合中的元素所具有的特定性质描述出来,写在大括号内表示集合的方法称为**描述法**.若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,则可表示为

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\},$$

其中,竖线左边的部分表示这个元素的一般形式,竖线右边的部分表示这个集合的元素具有的特定性质.例如,不等式 $x+1>0$ 的解集可表示为

$$\{x\mid x+1>0\}.$$

由数组成的集合称为**数集**.有几个经常遇到的数集,用特定的字母表示.全体自然数(即非负整数)组成的集合称为**自然数集**,记作 $\mathbf{N}$,即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数组成的集合称为**整数集**,记作 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体有理数组成的集合称为**有理数集**,记作 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle| p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0,\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\};$$

全体实数组成的集合称为**实数集**,记作 $\mathbf{R}$. 全体复数组成的集合称为**复数集**,记作 $\mathbf{C}$,即

$$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}.$$

有时还把上述数集记号的右上方加上"+","-"等标记,表示某些特定的数集,如 $\mathbf{R}^-$ 表示负实数集,$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集等等.

对于两个集合 A 和 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 称为集合 B 的**子集**,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

不含有任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$,且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subseteq A$. 至少含有一个元素的集合称为**非空集**.

任何一个集合 A 是它本身的子集,即有 $A\subseteq A$. 若 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 称为集合 B 的**真子集**,记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$). 例如,自然数集 $\mathbf{N}$ 是它本身的子集,但不是它的真子集,即 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{N}$. $\mathbf{N}$ 是实数 $\mathbf{R}$ 的子集,也是 $\mathbf{R}$ 的真子集,即 $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{R}$. 空集是任何非空集的真子集.

对于两个集合 A 和 B,若 A,B 中的元素完全相同,则称这两个集合**相等**,记作 $A=B$. 当 $A=B$ 时,有 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$;反之,当 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$ 时,有 $A=B$.

2. 集合的运算

设 A 与 B 是两个集合,由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 }x\in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 }x\in B\};$$

由所有属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**),记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A,\text{且 }x\notin B\};$$

由所研究的全体对象构成的集合称为**全集**,记作 U,并把差集 $U-A$ 称为 A 的**补集**(简称**补**)或**余集**(简称**余**),记作 A^c. 例如,设 $A=\{x\mid x>1\}$,$B=\{x\mid 0<x<2\}$,$U=\mathbf{R}$,则

$$A-B=\{x\mid x\geqslant 2\},$$

$$A^c=U-A=\{x\mid x\leqslant 1\}.$$

设 A,B,C 为任意三个集合,则下列运算律成立:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 摩根律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

上述运算律可根据集合包含和相等的定义证明,下面我们来证明摩根律第一式,其他类似可证.

先证$(A\cup B)^c\subseteq A^c\cap B^c$:因为

$\forall x\in(A\cup B)^c\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Rightarrow x\in A^c$ 且 $x\in B^c\Rightarrow x\in A^c\cap B^c$,
所以由包含的定义,得$(A\cup B)^c\subseteq A^c\cap B^c$;

再证$(A\cup B)^c\supseteq A^c\cap B^c$:因为

$\forall x\in A^c\cap B^c\Rightarrow x\in A^c$ 且 $x\in B^c\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\in(A\cup B)^c$,
所以由包含的定义,得$(A\cup B)^c\supseteq A^c\cap B^c$.

综上,由集合相等的定义,得

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c.$$

说明　在上述证明中,我们用到了记号"$\forall$"(是单词 All 第一个字母的倒写),意为"对任意的"或"对每一个". 另外还有一个记号"$\exists$"(是单词 Exist 第一个字母的反写),意为"存在". 这两个记号都是逻辑量词记号,今后经常用到.

由两个元素组成的有序数组(x_1,x_2),称为**二元有序数组**;由三个元素组成的有序数组(x_1,x_2,x_3),称为**三元有序数组**;一般地,由 n 个元素组成的有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称为 **n 元有序数组**.

设 A,B 是任意两个集合,且 $x\in A,y\in B$,则所有二元有序数组(x,y)构成的集合,称为 A 与 B 的**直集**(或**笛卡儿乘积**),记作 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

例 1　设 $A=\{0,1\},B=\{1,2,3,4\}$,求 $A\times A,A\times B$.

解　$A\times A=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$,

$A\times B=\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$.

注意　$A\times A$ 常记作 A^2. 例如,xOy 平面上全体点的集合可表示为 $\mathbf{R}^2$,即

$$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}.$$

类似地,可定义

$$A\times B\times C=\{(x,y,z)\mid x\in A,y\in B,z\in C\}.$$

例 2　设 $A=\{1,2\},B=\{2,3\},C=\{0\}$,求 $A\times B\times C$.

解　$A\times B\times C=\{(1,2,0),(1,3,0),(2,2,0),(2,3,0)\}$.

1.2 实数集

1. 实数与数轴

有理数和无理数统称为**实数**. 实数常常用一直线上的点来作为它的几何表示. 这样一条可用来表示实数的直线称为**实直线**或**数轴**. 在直线上选定一点表示 0,选定另一点表示单位 1,这样就确定了一条实直线. 在相应的欧几里得的公理体系下,实直线上的每一点对应且只对应一个实数;反之,每一个实数可以用一条直线上的点表示. 即实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点集构成了一一对应. 因此,我们有时不将一个实数和一个表示该实数的点加以区别. 表示实数 x 的点,通常说成"点 x".

实数集是有序集,即实数集的任何两个元素之间可比较大小. 这种可以比较大小的关系有一个简单的几何解释:若 $x<y$,则点 x 位于点 y 的左边(图 1-1). 正数位于 0 的右边,负数位于 0 的左边. $a<b$,且 $\exists x$ 满足 $a<x<b$,当且仅当点 x 在点 a 与点 b 之间.

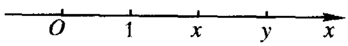


图 1-1

实数有一个很重要的性质,称为连续性,即 $\forall a,b\in\mathbf{R}$,若 $a<b$,则 $\exists r\in\mathbf{R}$,使 $a<r<b$. 这就是说,在任何两个实数之间,必有另一个实数,即实数充满数轴而没有空隙.

2. 实数的绝对值

一个实数 x 的绝对值记为 $|x|$,其定义如下:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

在几何上,它表示数轴上点 x 与原点之间的距离.

根据绝对值的定义,可证明下述性质:

(1) $|x|=C(C>0)\Rightarrow x=C$ 或 $x=-C$.

(2) $|x|<C\Leftrightarrow -C<x<C(C>0)$.

(3) $|x|>C\Rightarrow x<-C$ 或 $x>C(C>0)$.

(4) $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(5) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$.

(6) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$.

(7) $|xy|=|x||y|$.

(8) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0)$.

例 1 设 $\varepsilon>0$,且 $|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,$|y-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,求证 $|(x+y)-(a+b)|<\varepsilon$.

证 因为 $|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,$|y-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,所以

$$|(x+y)-(a+b)|=|(x-a)+(y-b)|\leqslant$$
$$|x-a|+|y-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

例 2 设 $\varepsilon>0$,当自然数 n 为何值时,不等式 $\left|\frac{2n-3}{n}-2\right|<\varepsilon$ 成立?

解 $\left|\frac{2n-3}{n}-2\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{3}{n}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{3}{\varepsilon}.$

所以,当 $n>\frac{3}{\varepsilon}$时,原不等式成立.

3. 区间与邻域

在 a 与 $b(a<b)$之间的一切点构成的集合称为**区间**,其中 a,b 称为区间的**端点**,而 $b-a$ 称为**区间的长度**. 有时区别区间是否含有端点是很重要的,根据不同情况分别定义如下:

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 组成的集合称为**闭区间**,记作$[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\};$$

满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 组成的集合称为**开区间**,记作(a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\};$$

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 x 组成的集合称为**半开半闭区间**,分别记作$(a,b]$或$[a,b)$,即

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}\text{或}[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}.$$

它们的几何表示如图 1-2 所示.

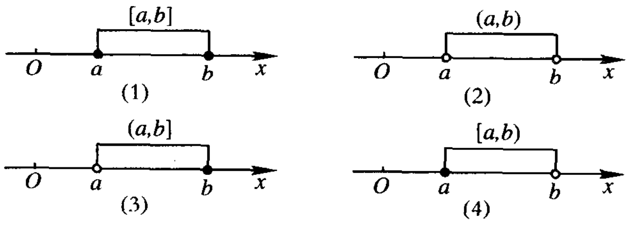


图 1-2

上述区间的长度都是有限的,称为**有限区间**(或**有界区间**). 当区间的长度为无限时,称为**无限区间**(或**无穷区间**). 无限区间有以下几种:

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\},(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

其中记号"$+\infty$"读作正无穷大,"$-\infty$"读作负无穷大. 前面 4 个区间的几何表示如图 1-3 所示,最后一个区间就是全体实数构成的集合 $\mathbf{R}$.

以后,当不需要指明是哪一类区间时,我们就简单地称它为"区间",且常用字母 I 表示.

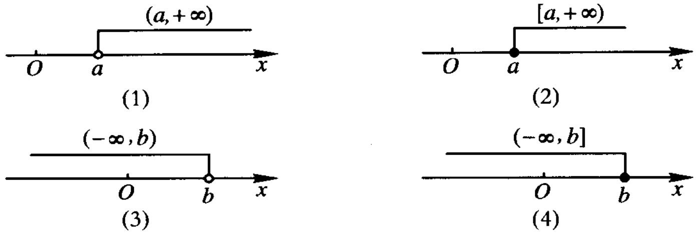


图1-3

特别,我们把开区间$(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$称为点$a$的$\delta$**邻域**,记作$U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

或用绝对值可写作

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

其中a称为**邻域的中心**,δ称为**邻域的半径**(图1-4).

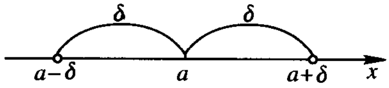


图1-4

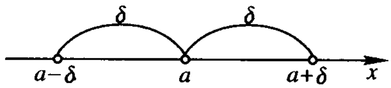


图1-5

若在点a的δ邻域中去掉它的中心a,则得集合为$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$,称它为点$a$的**去心$\delta$邻域**(图1-5),记作$\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a,\text{或 } a<x<a+\delta\},$$

或用绝对值可写作

$$\mathring{U}=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

其中$0<|x-a|$等价于$x\neq a$. 为了方便,有时称开区间$(a-\delta,a)$为a的**左邻域**,$(a,a+\delta)$为a的**右邻域**.

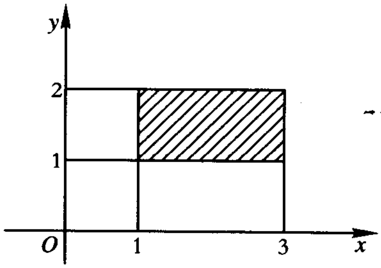


图1-6

两个区间的直积,表示xOy平面上的一个矩形区域. 例如,闭区间$[1,3]$和$[1,2]$的直积

$$[1,3]\times[1,2]=\{(x,y)\mid x\in[1,3],y\in[1,2]\}$$

表示如图1-6所示的矩形区域.

1.3 映射

1. 映射的概念

设A,B是两个非空集合,如果存在一个法则f,使得对于A中的每一个元素a,都有集合B中惟一确定元素b与之对应,则称f为A到B的一个**映射**,记作

$$f:A\to B,$$
$$a\mapsto b.$$