

声学译丛

总第7号

超声物理

(换能器专辑)

3

上海市物理学会声学工作委员会主编
上海市科学技术翻译馆出版

声学译丛 总第7号

超 声 物 理

第 3 輯

上海市物理学会声学工作委员会主編

*

上海市科学技术編譯館出版

(上海南昌路59号)

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印張 8 3/4 字數 265,000

1963年4月第1版 1963年4月第1次印刷

印数 1—2,200

編 号 : 5003 • 95

定 价 : 1.50 元

目 录

1. 关于气流笛的发声问题	1
2. 液体射流的横振动 I	3
3. 液体射流的横振动 II	9
4. 边棱音中的涡旋作用	15
5. 用于磁致伸缩换能器的经过改进的镍基合金	18
6. 磁致伸缩材料在产生强声方面的利用	22
7. 磁致伸缩辐射器及接收器	29
8. 减少损耗的超声换能器设计	38
9. 低频换能器的等效噪声压、自由场电压响应及效率等的决定因素	40
10. 供低频用的最佳水听器设计	43
11. 水声换能器的辐射声功率测量	44
12. 工业超声设备的声功率测量	47
13. 输入负载的弹性振动的功率测量	54
14. 压电特性对压力与温度之关系的测定	55
15. 二个假定完全相同的换能器的校正	60
16. 阻抗法校正换能器的测量	61
17. 用热噪声频谱分析法研究换能器频率响应的可能性	66
18. 声纳换能器的脉冲校正系统	68
19. 柱面波互易参量	77
20. 在扩散声场中传声器的互易校正	83
21. 若干压电换能器应用中须要考虑的有关电子线路与装置的设计问题	87
22. 超声换能器的新发展及其在无损检测中的应用	91
23. 超声压电换能器的瞬态与定态响应	94
24. 压电换能器的暂态性能	101
25. 复合换能器的超声强度增益	110
26. 压电晶体中的声源	114
27. 新型 1200 兆赫特超声换能器	118
28. 石英中特超声的激发	119
29. 低共振频率的钛酸钡换能器	121
30. 晶体管超声频率发生器	122
31. 极高强度超声振动的发生和研究	125
32. 超声聚焦用的固体材料共振设备	133
33. 带有损耗的固体声透镜的放大系数	134

1. 关于气流笛的发声问题

В. П. Куркин

АКУ. Ж., VII, 4: 442~445 (1961) [俄文]

近年来, 声学的气溶胶凝聚装置中所谓静笛有了极广泛的应用。Буме(布希)的工作^[1]在 Гартман(哈脱曼)的气流辐射器的基础上推动了静笛的创造, 文中指出了制造较大功率的气流笛的可能性。布希气流笛产生的声压级对于工业气溶胶的凝聚是不够的。虽然如此, 从工业应用的可能性观点来看, 气流笛比动力气笛有更大的前途, 因为气流笛具有显著的结构上和使用上的优越性。这主要由于在静笛中没有转动部分。

当超声速气流从喷嘴喷入共振器时, 气流辐射器中就发声, 此时引起了共振腔周期性充气过程, 这种过程可以从喷嘴到共振器的超声速气流图上来研究, 如图 1 所示。这种情况可分成如下的阶段: 1) 气流充满图右边的共振器, 在这种情况下 $v_c > v_p$ 。这里 v_c 和 v_p 相应于在喷嘴和共振器内的气体速度。流管的形式如图 1a 所示。2) $v_c = v_p$, 建立气流的瞬时动力平衡。流管构成 (图 1б) 的形式。因为共振器内气体的压力不能大于喷嘴内气体的压力, 所以气体充满共振器的过程是反复进行的。

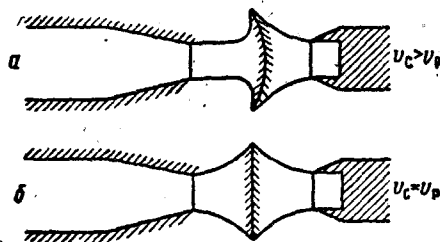


图 1

实际上在速度 v_c 和 v_p 的两个流管的卸接处所形成的流管的交迭地粗大, 不是别的, 而是振荡性稠密跃变, 它引起了气流辐射器的发声。

本文研究了一些振荡性稠密跃变的特性。它们的研究不仅改善静笛的声学经济参数, 而且制订出它们的计算方法。

研究工作是用图 2 所示的气笛^[2]进行的, 它是哈脱曼型气流辐射器的喷嘴 1 和共振器 2 的组合,

它们被径向装置在指数性扩展喇叭的咽喉处。气笛的结构不仅可以调节喷嘴和共振器之间的距离, 而且与布希气笛不同, 它还可以调节喷嘴共振器轴线和反射器 4 之间的距离。把反射器安放在离喷嘴共振器轴的一定距离时, 就得到共振, 而且发声强度尖锐地增大。当超声速流体送进 (通过连接管 5 和扩散器 6) 笛的喷嘴时, 就发出一定频率的声振动, 此频率与喷嘴直径有关。当共振器深度等于喷嘴直径时, 在喷嘴共振器距离 l 与喷嘴直径 d 的比率约为 1.4 时, 得到最大的声强 I (图 3)。图 4 是此时所得的辐射声频率 f 对喷嘴直径 d 的依赖关系。根据哈脱曼的资料^[3]所建的关系是 (1), 按作者测量的是 (2), 而按哈脱曼和作者共同的资料得到的是 (3)。点 2 和 3 是在气笛内依次更换不同直径的喷嘴和共

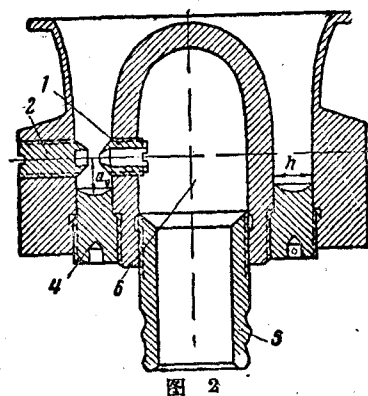


图 2

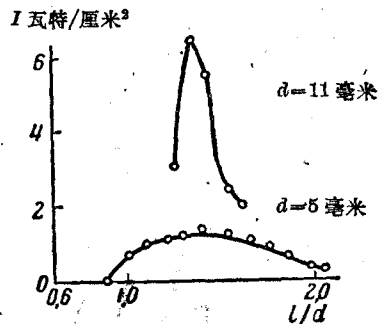


图 3

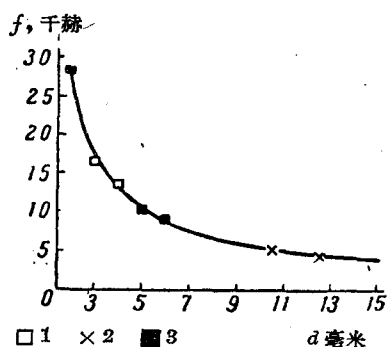


图 4

振器的方法所得到的。这些关系可写成如下公式

$$f = \frac{\xi c}{\pi d} \cdot 10^{-3}, \quad (1)$$

式中 f 是声的频率(千赫), d 是喷嘴的直径(毫米), ξ 是固定常数, 在空气中声速 $c = 331 \cdot 10^3$ 厘米/秒时, ξ 等于 0.5。

当喷嘴和共振器间的距离 l 不是 $1.4d$ 时, 观察到频率与方程(1)决定的数值有偏差, 这时频率变得很不稳定, 而且声强下降。在环形反射器的宽度 h (图2) 小于 $0.6d$ 时, 声的辐射强度同样急剧地减小。

图5指出了对于不同的喷嘴和共振器间的距离 l 所得到的, 具有5个5毫米直径喷嘴的气笛的声强与喷嘴共振器轴綫到反射器之间的距离 d_r 的关系。当喷嘴共振器轴綫到反射器的距离约为 1.3 和

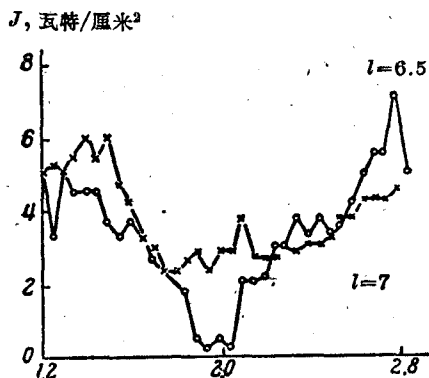


图 5

2.8 厘米时, 得到声强最大值。这些最大声强对应的距离 d_r 决定于公式

$$d_r = \frac{1}{2} \frac{\gamma c}{\pi f} \cdot 10^{-3} \text{ 厘米}, \quad (2)$$

式中 γ 是零级贝塞尔函数的根, c 是声速。

从公式(2)得出, 在气笛中对于给定的辐射声频率存在着一系列的距离 d_r , 在这些 d_r 处辐射声强度有最大值。可以看出, 公式(2)类似于决定所谓固定振动膜的容许半径的公式。

我们的观察指出, 在气流辐射器内, 空气的消耗不仅与它的压强和温度有关(这个关系存在于气流通过喷嘴时), 而且还与辐射声的频率有关。按照上面描述的发声机理, 当超声速气流从喷嘴到共振器时, 在 $v_0 = v_p$ 的流的动力平衡时刻就决定了辐射声的频率。当喷嘴直径相同时, 气流辐射器发出的声频率愈高, 消耗的气体数量愈少。在空气中工作的静笛其消耗可以借近似的经验公式来决定

$$Q = \frac{32 \cdot 10^4 p}{f^2 \sqrt{T}} \cdot K, \quad (3)$$

式中 Q 是空气的消耗量(米³/小时), p 是气笛内空气的过剩压强(千克力/厘米²), T 是空气的绝对温度, K 是喷嘴的数目。

从公式(3)得出, 在高频时气笛的工作是比较经济的。应该指出, 对于每个气流辐射器的喷嘴直径都有一个最适宜的气体压强值。在著作[3]里对于空气得到下表:

d 毫米	2	3	4	5	6
p 大气压	2.61	2.61	2.74	3.44	3.16

为了确定气笛的效率(气笛喷嘴直径5毫米, 喷嘴数目 $K=5$), 曾经得出它的指向性图案并计算了声功率和效率。图6是气笛的指向性图案, 它是限于立体角 2π 之间的球面上各辐射方向的声压平均值。指向性图案是在预定要进行能流积分的不同半径的表面上得到的。从图上看, 在半径为 28 和 49 厘米的表面上, 指向性图案在形状上差不多没有区别。通过这些表面上的声能流大约等于 1.55 千瓦。根据公式(3)决定的在 $T = 288^\circ \text{K}$ 时, 这气笛的空气消耗约为 292 米³/小时。把这些数量的空气压缩到 3.44 大气压所需的功率, 可以根据多方压缩公式决定

$$N = \frac{n}{n-1} p_1 v_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right], \quad (4)$$

式中 N 是功率(千瓦), n 是多方曲线的指数(对于空气 $n=1.3$), p_1 是空气的初始压强, 千克力/米²(绝对的), p_2 是气笛内的空气压强, 千克力/米²(绝对的), v_1 是每秒空气的消耗量, 米³/秒。功率的计算值等于 14 千瓦。因此声效率是 $\frac{1.55}{14} \cdot 100\% \approx 11\%$ 。

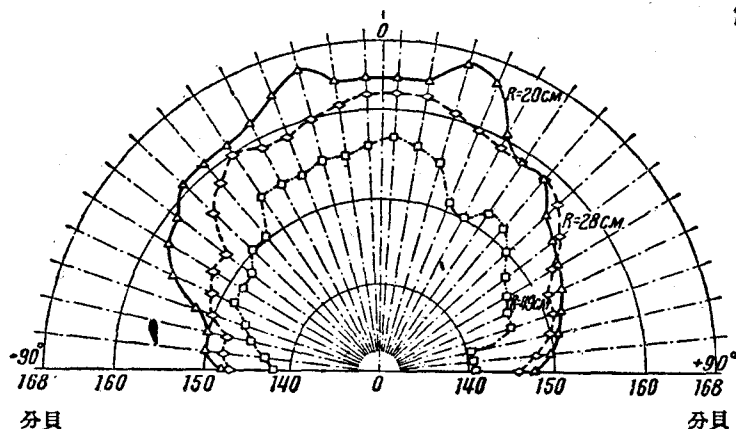


图 6

結 論

1. 制造了带有活动反射器的气流声辐射器, 可以把气流辐射器调节到最强的辐射。辐射器的声效率是 11%。

2. 确定了可以计算反射器的主要参数的基本规律。

(肖鉴涌、林維正譯 魏墨盒审校)

参考文献

- [1] R. M. G. Boucher. Lacoagulation des aerosols industries par ultrasons. Genie Chim., 1957, 77, 6, 163~173; 1957, 78, 1, 14~28.
- [2] В. П. Куркин. Статистическая сирена. Вулн. изобрет., 1960, 18, Стандартгиз.
- [3] Л. Бергман. Ультразвук и его применение в науке и технике. М. ИЛ., 1957.

2. 液体射流的横振动 I

J. B. Braekenridge

J. Acoust. Soc. Am., Vol. 32, No. 10, P. 1237~1242 (1960) [英文]

引 言

本文所讨论的是一股从孔口流出的薄矩形射流冲击在沿射流平面装置的刚性劈尖顶上的特殊流动情况。与此射流有关的准直管和劈尖所组成的系统, 称之为射流——边棱系统。在一定条件下, 发现在这种系统中, 射流会发生横振动。再者, 这些横振动的方式各不相同, 有时则称之为工作阶段。从射流振动频率、液流位形以及存在某一方式所必需的参数值等等特性来说, 每一方式或阶段都自有其独特的对孔口到边棱的距离 h 、液流速度 u 、液流宽度 w 和流体运动粘滞系数 ν 的依赖关系。

如果射流的振动频率是在可闻声范围内, 则常可听到一定频率的声音; 这些声音通称“边棱音”。大多数对边棱音以及有关问题的研究都是用在空气中

工作的射流——边棱系统来完成的^{[1][2]}。这项工作之所以受到重视, 一部分是由于风动发声所引起的, 一部分是由于大家对这种新颖的流体动力学——声学现象的兴趣。

Janovsky (茹诺夫斯基) 和 Pohlman (普尔曼) 最近的工作^[3]确定了液动的射流——边棱系统在实用上之重要性。后者曾指出, 用配备着调谐振动元件的一种特殊设计成的装置来制备乳液, 是很有成效的。作者与 Nyborg (尼堡)^[4]曾研究了备有振动元件的射流——边棱系统的输出谱和装有固定元件的参考射流——边棱系统 (如同本文的研究中所用的) 的输出谱之间的关系。

最近, Bouyoucos (玻尤可斯) 和 Gross (格罗斯)^{[5][6]}也对液动式射流——边棱系统进行了研究。射流——边棱系统除与发声器有关外, 其重要性还

在于提供了一种特别有趣的流体运动的典例, 这种流体运动, 随着涡旋的产生, 使本身处于振动状态。本文将处理这种系统能以给定方式进行自持振动的参数范围, 同时也处理每种方式的频率特性。

实验设备

在进行这种研究时, 使用了两种射流——边棱系统; 每一种系统中主要包含有: (1) 一个发射液流或射流的准直管和 (2) 一个沿流动平面支撑着的劈尖。其中的一种系统的准直管配有一些活动嵌片, 它们可以使液流的厚度为 0.051 厘米、0.102 厘米和 0.204 厘米; 而其孔口宽度为 2.54 厘米。第一种系统中的劈尖(不锈钢制, 长 5.10 厘米, 宽 2.89 厘米, 厚 0.65 厘米, 前边棱具有 28° 的尖削角) 装置在依附于准直管两侧的轨道上。这个轨道将劈尖牢固地支撑在液流平面上, 而且可以利用测微螺旋的传动来改变孔口到边棱的距离 h 。由此, 可以使边棱位置准确到 0.001 厘米以内。这个射流——边棱系统是水平地装置在一个矩形贮液箱的中心附近的, 贮液箱的尺寸为长 6 呎, 宽 1 呎和高 2 呎。

第二种射流——边棱系统与上述系统的区别在于: 这种系统的劈尖(黄铜制, 长 35 厘米, 宽 2.89 厘米和厚 0.65 厘米, 前边棱具有 28° 的尖削角) 牢固地装在小的小西脱 (Lucits) 贮液箱 (1 呎宽, 1 呎长和 2 呎高) 之底部上, 而在贮液箱上装有准直管, 使液流指向下面。用齿轨和副齿轮移动准直管来改变孔口到边棱的距离。在准直管上配有可以把 h 确定到 0.01 厘米的游标尺。

应用两种不同的装置来向准直管供给液体。第一种适用于 200 与 700 厘米/秒之间的流速, 其中包括一台环流式水泵, 这个水泵之一边与液体准直管相连, 而另一边则与贮液箱的排泄口相连。控制水泵的速度, 可使液流速度从 100 厘米/秒连续地变化到 700 厘米/秒。第二种供液的方法适用于 200 厘米/秒以下的流速, 液体并不进行再循环。而在压缩气体的作用下迫使液体从一有护罩的玻璃坛中泄出。在这两种装置中, 是把一个位于准直管上游的压强计当作流速计那样加以校准来测定液流速度的。

在测量 200 周/秒以上的频率时, 使用了一个水听器和一个波分析器。在测量低于 200 周/秒的频率时, 应用玻尤可斯方法^[1], 用染料将液流染色, 并且使用了频闪观测器或电影摄影机。

将甘油加入贮液箱内的水中, 可以改变液体的

粘滞性。这种混合液体的粘度是用 Brookfield (白罗克菲尔德) 的同步电动粘滞计 (型号 LVF) 来测定的。为了保证甘油和水能充分混和, 需要使液体循环地以高速率重复流经射流——边棱系统。从混合液的各部分取样, 并且使液体继续环流, 直到这些任意取得的样品显示出液体已彻底混和为止。

实验结果

从以下讨论的结果来看, 在本文中发现使用液体的射流——边棱系统的行为跟使用空气时的行为极为相似。所出现的自持射流振动包括各种阶段或振动方式。对这些不同的方式, 其自持振动的条件以及频率特性与以前发表过的对于空气中的情况十分相似。当液体粘度的范围在 1 到 100 (厘泊) 时, 使用液体与空气的系统的行为是相似的。粘度, 作为一个参数来说, 对各种振动方式的频率特性的影响是很小的; 但它对确定自持的条件却是非常重要的。

下面的讨论将分为两个部分: (1) 自持振动的条件和 (2) 频率特性。

自持振动的条件

图 1 中的实线 A 及 B 确定了 (h, u) 空间内的一个区域 (对流速低于 400 厘米/秒与距离 h 小于 0.8 厘米的情况来说的), 这个区域内的每一点代表着工作阶段 1 的一组 h 和 u (不存在一个有关的阶段 2 的振动方式)。虚线所确定的是在空气中的相同的区域^[2]。具体地说, 曲线 A 就是当流速增加, 阶段 1 的工作开始时, h 对流速值的图线, 仿此, 曲线 B 则表示当流速加大, 阶段 2 的工作开始时的流动条件。当流速减小而并非增大时, 曲线略低。当速度在 200 厘米/秒以下时, 可利用频闪观测器观察液流剖面并记录剖面突变处的 u 值, 来测定这些曲线。当流速在 200 厘米/秒以上时, 可由观测谐波分析器上的水听器输出, 并记录波谱中发生变化处的 u 值。即可得到图中的曲线。

如图 1 所示的这些图线, 确定了在以一定方式振动时得到稳定的射流的条件。在利用外来因素 (例如, 用机械方法使系统受到扰动) 使射流振动时, 更可以直接证明这一点。如果由 h 和 u 的数值可以在曲线 A 的下方或左方的 (h, u) 空间中确定一个点时, 用人为方法激发的液流振动就要受到阻尼的作用。阻尼率决定于 (h, u) 空间中的位置: 对于曲线 A 左上方的代表点 (u 大, h 小), 振动的衰减要比对直接在曲线右下方的点 (u 小, h 大) 迅速得多。

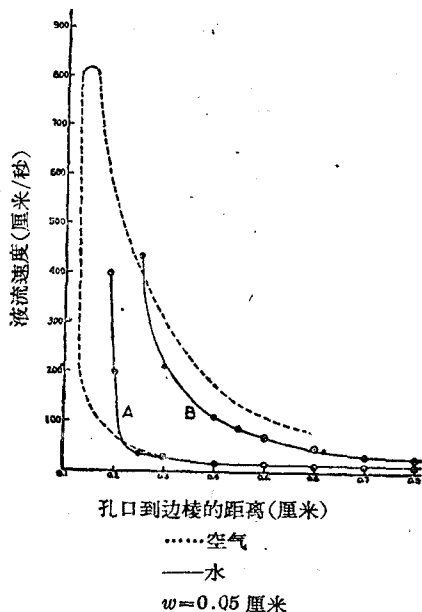


图1 在水中的阶段1与在空气中阶段1的工作条件比较。实线A与B为对水而言的较低和较高的边界，而虚线则对空气而言的

曲线A, B有两种特别值得注意的特征。可以来考察标有符号A的实线, 它代表在水中自持振动情况下, (h, u) 空间内的下限。当 $u > 150$ 厘米/秒时, 曲线A几乎是垂直的, 就是说, 它趋近于一条 $h = \text{常数}$ 的直线。在这个区域内有一个 h 的极小值, 在低于此极小值时, 则不论液流速度如何, 都不能观测到振动。第二个有意义的特征是, 当 h 值大于0.4厘米时, 曲线A几乎是水平的, 而接近于一条 $u = \text{常数}$ 的直线。我们发现, 在对各种厚度的液流和对粘度在一定范围内的液体所测定的与A类似的曲线上, 这两个特征是颇为普遍的。以前曾在空气中观测到, h 为常数的区域, 可从图1所示的虚线看出, 但是对于在水中 u 为常数的曲线部分, 没有在空气中进行过研究。

紧接在曲线B以上的区域的意义, 不象上述在B以下的区域那样容易确定。直接在曲线B以上的每一点代表当工作阶段1和阶段2能够并存时的 h 及 u 值。在观测水听器的输出时, 阶段1和阶段2的同时工作的情况是极为显著的; 我们发现这两个阶段的基频和谐频都出现了。在速度较低(即低于200厘米/秒)的区域内, 较难确定有两个阶段共存的情况, 这时, 必须用频闪观测器来进行考察。但在流速过低时即低于30厘米/秒时, 则很少记录到这两个阶段共存的情况, 而射流——边棱系统好象仅以一

种方式振动。Brown(布朗)^[1]曾发现, 对空气中的类似系统, 仅在流速大于600厘米/秒的情况下, 阶段1的振动方式才能延续到阶段2开始之后。

图2指出了液流厚度对进入阶段1的要求的影响。液流厚度为0.051厘米, 0.102厘米和0.204厘米的曲线是在与图1的曲线A相同的情况下获得的。这些曲线代表着将发生阶段1的振动时的 h 与 u 的极小值, 它们是在使 h 保持恒值并增大流速的条件下确定的。每条曲线都显示出以前讨论过的特征形式: 亦即, 每一曲线具有一个与 h 无关的区域(或者, 接近于这样一个区域) 以及一个与 u 无关的区域。增加液流厚度的表现效应是, 曲线在 (h, u) 空间中向右上移动; 因此, 对于给定的孔口到边棱的距离来说, 当液流厚度增大时, 进入阶段1需有较高的流速。在空气中也得到了类似的结果。

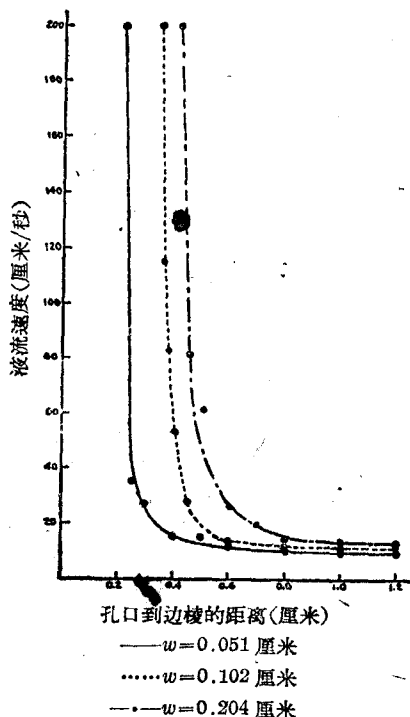


图2 在水中发生阶段1的自持振动的 h 与 u 的极小值。实线代表液流厚度为0.051厘米的情况, 细虚线代表液流厚度为0.102厘米的情况, 而粗虚线代表液流厚度为0.204厘米的情况

图3包括了与图1的曲线B类似的一些曲线, 这些图象指出了增大液流厚度 w 对在水中阶段2振动的开始条件的影响。如前所述, 人们发现, 对水来说, 与在空气中的通常情况不同, 阶段2常与阶段1同时存在, 而很难单独存在。因此对适用有某一已

知液流厚度为 w 的曲线以上的 h 和 u 值, 阶段 1 和阶段 2 的振动能够同时存在。在这里, 和关于阶段 1 的开始条件的情况一样, 液流增大厚度, 会使曲线在 (h, u) 空间中向右上方移动。

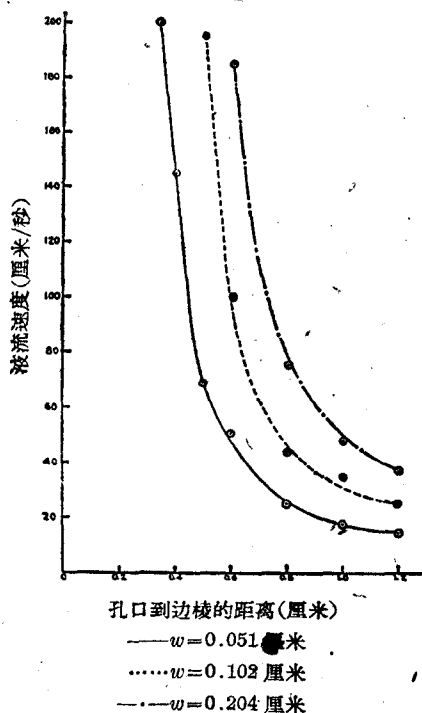


图 3 在水中发生阶段 2 的自持振动的 h 与 u 之极小值。各曲线所代表的液流厚度与图 2 相同

图 4 所示为在水中进入阶段 3 振动的条件, 仍以液流厚度作为参数。对于给定厚度的射流, 在图 4 中相应的曲线以上的 (h, u) 值, 代表发现有阶段 3 的条件, 而且阶段 1 与 2 同时存在。如再增大液流厚度, 也将使曲线在 (h, u) 空间中向右上方移动。

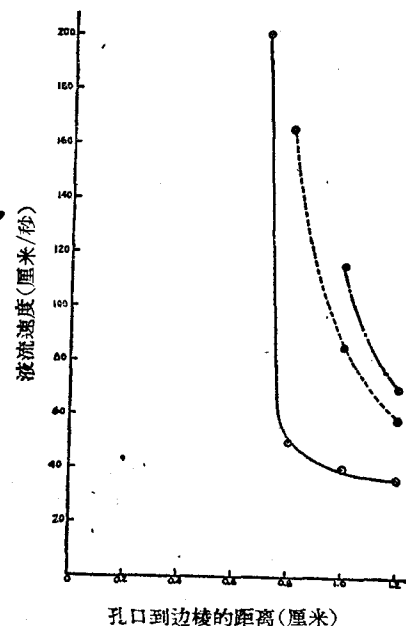


图 4 在水中发生阶段 3 的自持振动的 h 与 u 的极小值。各曲线代表的液流厚度同图 2

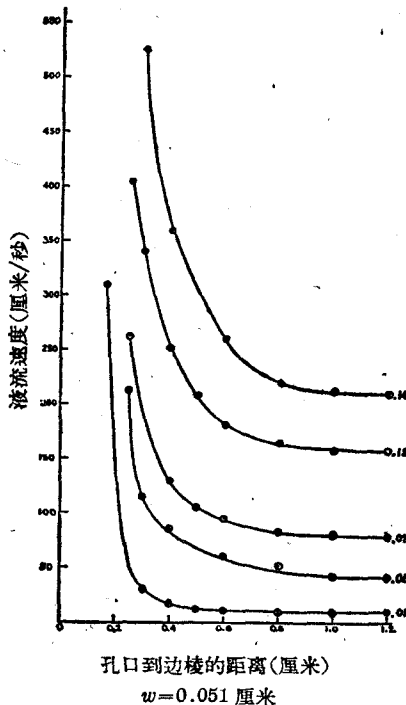


图 5 发生阶段 1 的自持振动的 h 与 u 的极小值。标有 0.01 的曲线系对 $\nu=0.01$ 厘米²/秒的水而言。其它曲线分别代表运动粘度为 0.053、0.074、0.12、0.14 厘米²/秒的情况。所有曲线均代表液流厚度为 0.051 厘米

除图 5 所给出的一些结果外, 实验还证明甚至在粘度高达 1.0 厘米²/秒的液体中也会发生射流自持振动现象。看起来, 只要系统的取适当数值的参数, 在任何一种液体中都有可能产生这样的振动。

頻率特性

一般地說，在液体中与在空气中观察到的頻率特性是相似的。图6为水中的射流——边棱系統(h 为0.3厘米， w 为0.05厘米)其基頻 f 对流速 u 的图象。当液流的速度从零增大时，在达到27厘米/秒之前，不能观测到液流的振动。在达到这个速度时，液流以阶段1的特征液流位形开始振动。振动頻率随速度 u 的变化是連續的且近似綫性的。当 u 达到270厘米/秒时，則进入基頻为 f_2 的阶段2的振动方式。这时，声譜是相当复杂的。除基頻 f_1 (453周/秒)和 f_2 (1015周/秒)外，出现了頻率為 $2f_1$, $3f_1$ 等等以及 $2f_2$, $3f_2$ 等等的諧頻。更值得注意的是，也发现頻率為两个阶段的式頻之和(f_1+f_2)及差(f_1-f_2)的成分。Cornett (康南脫)^[7]曾指出，在空气的边棱音中有頻率之和与差的存在。

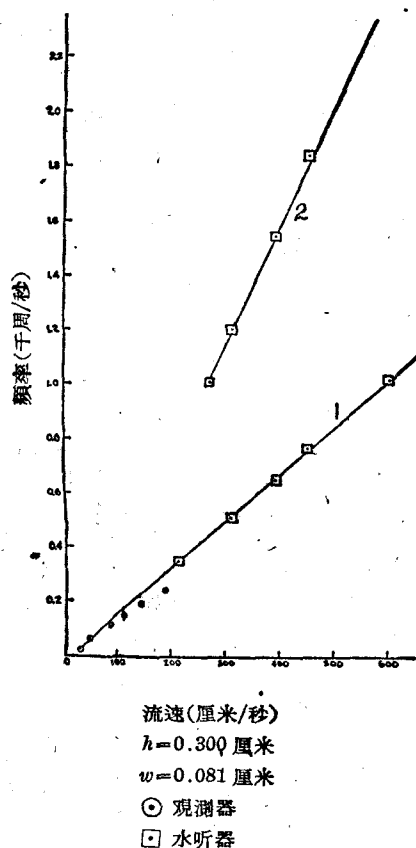


图6 水動式射流——邊棱系統之頻率與流速關係。標有1的曲綫為階段1的基頻，而標有2的曲綫為階段2的基頻。圓點是用頻閃觀測器測得，而方形點則由水听器測得。液流厚度為0.051厘米。孔口到邊棱距離為0.300厘米

图7为 f 对 u 的另一个图；其中 h 为1.0厘米， w 为0.102厘米。当流动开始之后，而液流速度未达到10厘米/秒之前，没有观察到振动；在到达此速度时，才出现阶段1的振动方式。当流速增大时，液流仍保持着这种振动方式，在速度未达到27厘米/秒之前，当 u 增大时，頻率作綫性增大。在达到此速度时，液流从阶段1突变到以阶段2为主。如果要用頻閃觀察器来截止阶段2的图样的运动时，那是可以做到的，但整个图样会有微小的起伏。这个起伏的頻率具有相当于阶段1的工作頻率。在用諧波分析器对来自水听器的信号进行测量时，进一步证明了在阶段2开始之后，阶段1的振动仍繼續存在的推論。若流速繼續增大时，則在70厘米/秒时达到另一个临界速度，在此速度时，液流跃进阶段3的工作。

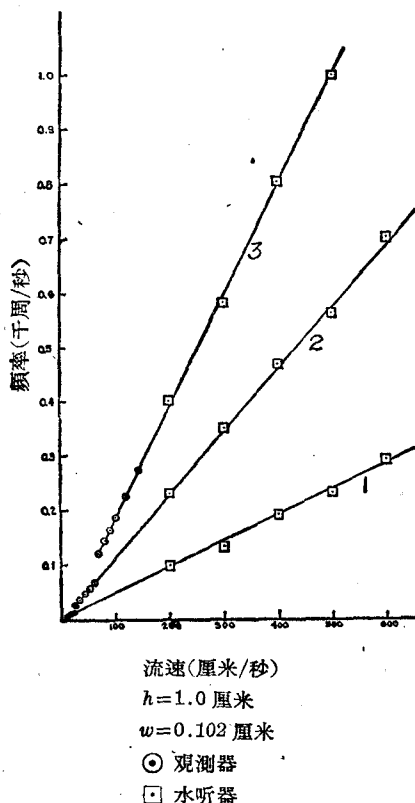


图7 水動式射流——邊棱系統之頻率與流速關係。除孔口到邊棱距離為1.0厘米外，其它條件均同圖6

对于 h 在0.3厘米与1.0厘米之間的一些其它数值，曲綫所显示的特性与图6和图7相似。这时頻率几乎是綫性地随 u 值变化的，在 h 减小时，振动方式之間的过渡发生在較高的速度。

频率对孔口到边棱距离 h 的依从关系如图 8 所示, 其中包含有图 6 及图 7 中频率对流速的曲线的斜率对 $\frac{1}{h}$ 的曲线。下面一条曲线代表阶段 2 的值, 而上面一条曲线代表阶段 3 的值。在所有的情况中, f 对 u 的斜率表现得与 h 成反比例。

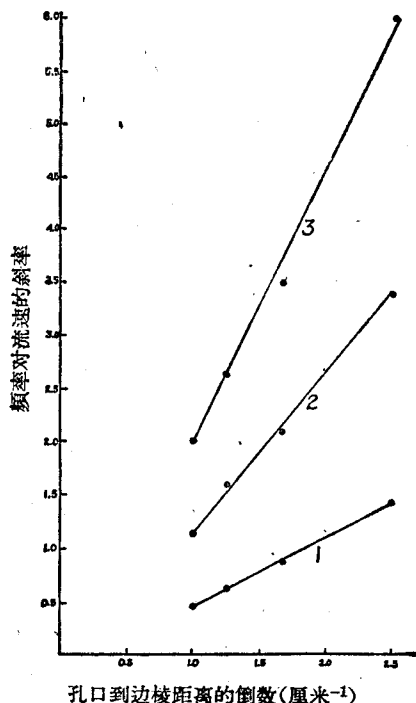


图 8 频率对流速曲线的斜率(图 6 及 7) 与 $\frac{1}{h}$ 的关系。标有 1, 2, 3 的曲线分别代表阶段 1, 2, 3

Brown (布朗) [1] 对空气中边棱音的频率, 发表了如下的经验公式:

$$f = AJ_N(u-a)(1/h-b),$$

式中, J_N 为工作方式的函数。在 $h < 10$ 厘米和 $u > 40$ 厘米/秒的情况下, 上式实际上可以简化为:

$$f = AJ_N u/h.$$

显然, 本文所提出的实验结果对上述形式的方程是适用的。从图 8 的三条曲线的斜率, 就可能计算 A 与 J_N , 且从截距可得出 b 。图 7 与图 8 的一些曲线的截距给出了 a 值。对于液流厚度为 0.102 厘

米的水和空气的系统, 在表 1 中列出了这些常数的对比值。这些结果适用于 $h > 0.4$ 厘米的情况。从其他的数据发现的情况是, A 值依赖于液流的宽度, 而与运动粘度无关。 J_2 及 J_3 的值则与液流厚度和运动粘度均无关。在所有情况中, 按照定义, 常数 J_1 等于 1。

表 1 水和空气之工作常数比较

	空 气 [1]	水
A	0.446	0.63
J_1	1.0	1.0
J_2	2.3	2.4
J_3	3.8	4.2
a	40.0	6.0
b	0.07	0.23

在本文的下一篇文章中, 将要提出射流——边棱系统的射流过程的照相。这些照片是用每秒能摄取 8000 个镜头的高速电影摄影机摄取的, 它们说明了射流从稳定流动向振动流动的过渡, 以及阶段 1, 2, 3 的稳态运动。同时, 在适当的情况下, 还要将本文结果及照相过程, 和按照与自持振动有关的现行理论预测的数值进行比较。

(严导淦译 魏墨盒审校)

参考文献

- [1] Brown, G. B. Proc. Phys. Soc., (London). A49, 508 (1937)
- [2] Nyborg, W. L.; Burkhard, M. D. & Schilling, H. K. J. Acoust. Soc. Am., 26, 174 (1954)
- [3] Janovsky, W. & Pohlman, R. Z. angew., Phys. 1, 222 (1948~1949)
- [4] Brackenridge, J. B. & Nyborg, W. L., J. Acoust. Soc. Am., 29, 459 (1957)
- [5] Bouyoucos, J. & Nyborg, W. L., J. Acoust. Soc. Am., 26, 5110 (1954)
- [6] Gross, M. T., Acustica, 9, 164 (1959)
- [7] Cornett, O. J., Ph. D. dissertation, University of Texas, (1940)

3. 液体射流的横振动 II

J. B. Brackenridge, W. L. Nyborg

J. Acoust. Soc. Am., Vol. 33, No. 8, p. 1078~1084 (1961) [英文]

引言

在前一篇論文^[1]〔今后称为(I)〕中,作者提出了发生在射流——边棱系统中的液体射流自持振动的实验结果。本文将提出进一步的实验成果,并将其结果与可采用的理论进行比较。

大家业已知道,在射流——边棱系统中所引起的振动,是与周期性涡旋的形成有联系的,而且常常出现一种可以听到的声音,即所谓边棱音。这类现象——包括流线的自持横振动,周期性涡旋的形成以及不连续频率的声之产生——可以在各种环境下发生,特别是当射流撞击在障碍物上或流经锐角周围时。近来,大家对这种运动的基本性质方面已经有了进一步的了解。

在讨论上述的这种运动时,如何来描述从稳恒层流到含有有序横振动而与时间有关的流动的过渡,是我们所面对的一个问题。Schlichting(施立席廷)^[2], Tollmien(托尔明)^[3]与 Lin(林家翘)^[4]等,在关于流体动力学稳定性问题的论述中,曾经提出了对与此大体相似的现象的一般处理方法。在他们所用的方法中,必定要知道适用于给定的层流情况的速度和压强与时间无关的解。然后,还需要考虑和这些与时间无关的解略有不同的速度与压强的初值问题。如果当时时间趋向无限大时,初值问题的解趋近于稳恒状态的解,则运动为稳定的,反之,则为不稳定的。

利用 Von Karman(卡门)的理论,可以了解涡旋行列形成的原因^[5]。在雷诺数(Reynold's number)足够大的液流中,与障碍物后面相隔一段距离处,有可能看到涡旋的一种有规则的图样。有鉴于此, Von Karman 曾研究了理想涡旋的类似的分布情况。他证实了这种称为“涡街”的涡旋的图样,即对于横越涡街的微小扰动,一般来说是不稳定的,并且计算了随遇平衡的安排。

对于边棱音现象,在试图应用流体动力学稳定性理论时,首先必须找出在稳恒射流对称地撞击在

刚性劈尖尖顶上的场合下,速度与压强的分布。早期的文献所提出的实验曾指出,基本边棱音特性是与劈尖的角无关的(如果此角不太大的话),或者与沿流动方向的劈尖的线度无关的(如果线度不太短的话)。因此,在这里,劈尖的尾流显然是不重要的。在数学模型中,以一块无限薄(但为刚性)的半无限大薄板来代表“劈尖”,看来应当是合理的。这样,就可能确定在给定的流动条件下,可放大的扰动之波长。这种方法在目前是不切合实际的;因为还没有关于具有两个液——液分界面及两个半无限的固——液分界面的稳恒射流的速度分布的资料。Bickley(别克莱)^[6]与 Andrade(安德雷特)^[7]曾经推导出在较简单的自由射流(即挪去边棱)条件下,稳恒流动的速度分布;可是,甚至这种解也只适用于较本问题中所讨论的为小的平均速度。

显然,在目前仅根据流体动力学基本原理来完全求解射流——边棱系统的行为是无法实现的。新近有人利用一些辅助假定,提出了两个理论^{[8][9]}。他们是从稍有分歧的观点来探讨这个问题的,鉴于没有比较适宜的名称,我们拟称第一个理论为涡旋理论,而称第二个理论为动力学理论。

涡旋理论

第一个要研究的理论是 Curle(克尔)^[8]的理论,他直接利用了流体动力学稳定性理论以及卡门涡街理论。Curle 首先研究了自由射流的振动,亦即无劈尖情况下的射流。他用 Lighthill(莱特海爾)^[10]理论来预测以假定的扰动所引起的被扰速度来表示的由自由射流所产生的声。为了找出被扰速度场,在 Tollmien 的扰动方程中引用了 Bickley-Andrade 的稳恒射流的速度分布。Curle 发现,对不同波长的扰动,辐射声的最大振幅都应发生在波长 λ_0 约为 $7.0w$ 时,其中, w 为狭缝的宽度。

在解释射流——边棱系统的各阶段之间的过渡时,可以参考上述对自由射流所定义的波长 λ_0 。在射流——边棱系统情况下,可把一个相应的量 λ 定

义为沿振动射流出现的相继向上的涡旋间的距离。Curle 在将自由射流波长 λ_0 的计算值与射流波长 λ 的实测值比较时,发现自然发生的振动方式的任何变化都具有使波长 λ 向边棱音波长 λ_0 转变的效应。

在计算射流——边棱系统中各阶段的频率绝对值时, Curle 用 Richardson (理却孙)^[11] 的论文作为依据,考虑了劈尖任一边的涡街,并由此推导出孔口到边棱的距离 h 与射流——边棱的波长之间的关系。由此,利用所得的结果 $\lambda_0 = 7.0w$ 和 Savie (薩維克) 的层流的卡門渦街的速度公式^[12],他就計算了边棱音的各种振动方式或“阶段”的振动频率。

动力学理論

在动力学理論^[9]中,所用的方法不同。着眼点是构成射流的流体质点,以及当质点从孔口流向边棱时,作用在每个质点上的横向力(显然,这些力是由于射流振动所形成的压强梯度而显现的)。利用力场的一些未知函数,建立了一个积分方程。当有理由相信于任一瞬間存在的“反饋”力场为简单地与瞬时射流位形之某些情况有关时,这个方法是特别适宜的。对于力场,假定了一些试探函数;并且对自持振动計算了频率、射流剖面以及参数的范围。

实验結果

在本节中,将介绍一些关于各阶段的射流振动的照相;对于以每一种方式工作的射流——边棱系统,用一系列的射流剖面来表示。

首先,让我们来看图1,图中显示了从稳恒流动向含有发展成熟的阶段1振动的流动过渡的射流。每列(即图1中标有A到B)含有十张依次取得的染色水射流的运动照片,此射流随其速度的逐渐增大而自行建立振动。在20秒的时间间隔中使用了一架 Fastax (法斯泰克斯) 电影摄影机(速率为每秒200个镜头)。摄影机是在建立起振动的一段时间内按计划开动的。在低流速情况(A列)下,射流循直线路径进行,而不随时间变化。当流速微增(B列)时,振动开始。图上的小箭头,是为了便于看清楚微小的垂直扰动而画出的,因为在小图片上很难看出这些扰动①。

当流速进一步继续增大(C列)时,扰动显示出与B列中的相同的对称性;但是在C列中,可以观

察到在劈尖下面形成了极小的“先驱涡旋”或涡胚。在C—5到C—8中,指出了先驱涡旋的尖端并没有随扰动而移向下游的现象。当先驱涡旋伸展到静止流体中时,它好象削过扰动顶端的流体一样,而在扰动前进时则落在后面。

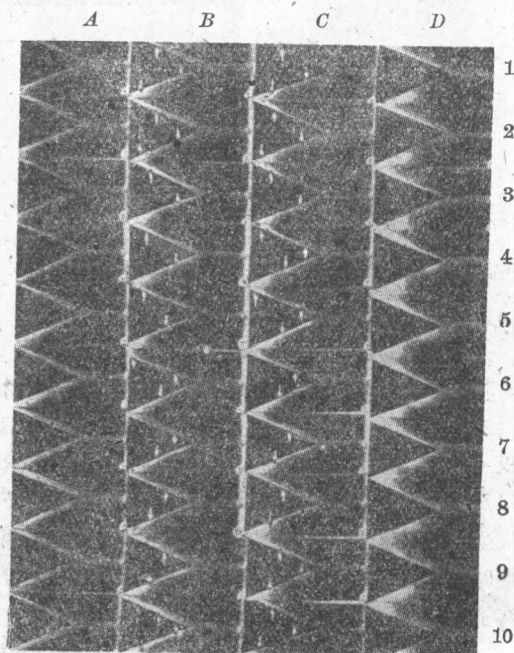


图1 标有大写字母的每一列为由染色水射流得到的一系列电影照片。这些照片都经过整饰,劈尖已被涂黑,以增强它与周围流体之间的对照,并插入小箭头以指出重要的特征。各列是按流速增大的次序排列的

图1的最末一列(D列),显示了随着流速的再增大,以发展成熟的阶段1振动方式工作的射流——边棱系统。在这些照片上,涡旋的形成显得很清楚,并且发生在劈尖的前边棱附近。以后将对已确知速度的图列进行更详细的讨论。

图2为一系列以不同的振动方式在水中工作的射流——边棱系统的照片。4组(A列)表现了当射流的 (h, u) 值适足以让它能进行自持振动时,在阶段1工作的一个全周期,(孔口到边棱距离 $h = 1.0$ 厘米,液流速度 $u = 11$ 厘米/秒,液流宽度 $w = 0.10$ 厘米), (从每一个图片到下一个图片的相位增加为一个周期的 $1/10$)。因为在孔口与劈尖前边棱之间的液流中, (通常)存在着一个弯曲,从这种几何性质就可以判断这种位形是阶段1 (也可以由其频率特性来判断)。今后尚需讨论的重要特点还有: 竖向

① 将软片做成动画片时,扰动显得特别清楚。当然为了便于看到这些图样,可将它在银幕上放大。此外,用红色射流与周围的纯净液体对照的有色影片比用黑白对照的复制片可能更好。

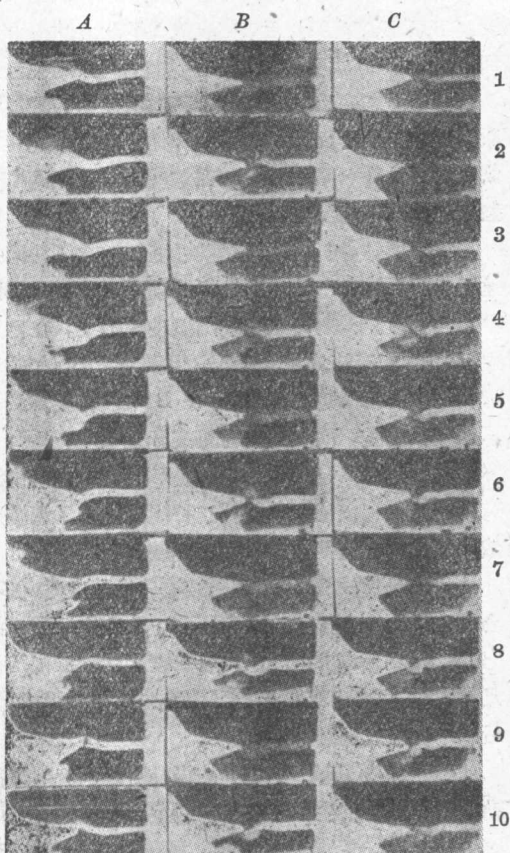


图2 和图1一样的染色水射流之电影照片。各列依次代表第一种、第二种及第三种振动方式

扰动在移向下游时的“滋长”，射流在劈尖的前边棱处之最大位移（约等于射流的宽度），以及射流本身从边棱一边移向另一边的速度。（在这一系列图中，仅在A—2及A—7中，液流在边棱处自行分裂成可量度的大小）。

B组（图2的B列）的十张图片，表示同一射流——边棱系统在阶段2工作的一个全周期。这时，射流的速度较大，为45厘米/秒。鉴于在孔口与边棱之间的射流位形（通常）要多一个弯曲，阶段2的振动方式在几何形状上是不同于阶段1的。在图2中，将B列的阶段2与C列所示同一系统（ $u=113$ 厘米/秒）的阶段3振动方式相比，就可以看出，对于一个给定的振动方式（例如第“ n ”方式），液流的位形要比下一方式（第 $n-1$ 方式）多一个弯曲。这个在阶段3中增添的弯曲，往往是很难观察的，它出现在上游，它的振幅也不象其它的振幅那样显著。但是，在仔细观察图B—5与C—5后，仍然可以看出这种差异。

如果，根据图2A中的这些图片，对 h 与 u 值适

足以激发自持振动的系统之液流剖面，和在 (h, u) 空间中的代表点完全处于自持区域 Π 内的系统之液流剖面进行比较，则可得到以下的一些论断：（1）所有射流位形的一般形状是相同的；（2）在所有情况中，边棱处的最大横向位移约等于液流的宽度，虽然在前一种情况中，液流有稍微加宽的表现，以及（3）在所有情况中，在大多数时间内，液流有移向劈尖的一边或另一边的表现。在用图2所示的射流运动的电影底片来做成的动画片（有效放大率为50:1）进行详尽的比较后，即可证实这些特点存在。

图3对上述的液流加宽现象有较充分的描述。在此图中，我们画出了对 (h, u) 空间中两点， $w(x)/w_0$ 对 x 的图象[其中 $w(x)$ 为距孔口任一距离 x 处的液流厚度， $w_0=w(0)$ 而 $x_0=h$]。图中的实线对应于完全位于自持区域中的一点（ $h=0.6$ 厘米， $u=18$ 厘米/秒及 $w_0=0.10$ 厘米）。可以看出，在这种情况下，液流有比较微小的加宽现象。虚线所对应的系统在 (h, u) 空间中有代表点（ $h=1.0$ 厘米， $u=11$ 厘米/秒； $w=0.10$ 厘米），其 h 或 u 值恰足以使系统进行自持振动。在这里，我们发现液流宽度增大很多；在 $x=x_0$ 处，液流宽度比在 $x=0$ 处大1.6倍。

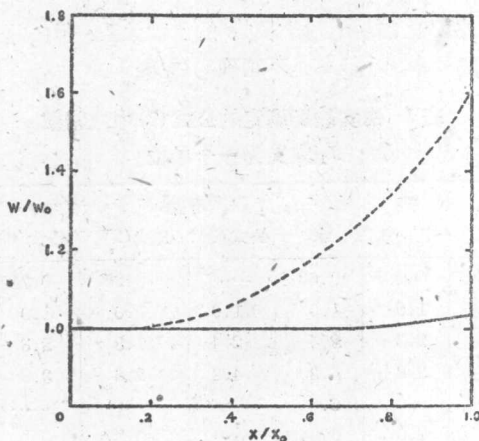


图3 液流的相对厚度与离孔口的相对距离的关系。对于图中的实线， $x_0=0.6$ 厘米， $u=18$ 厘米/秒，而 $w_0=0.10$ 厘米。对于虚线 $x_0=1.0$ 厘米， $u=11$ 厘米/秒而 $w_0=0.10$ 厘米

结果与理论的比较

现在，我们可以考察上述两种关于射流自持振动的理论与本文及(I)所得的实验结果相符的程度。

涡漩理论^[8]

首先，我们来探讨Curle的贡献。他(1)利用层

流的射流的渦街之速度,并(2)假定在劈尖前边棱处形成的所謂“內”渦旋及孔口处形成的“外”渦旋之間有相位关系,而将各阶段的振动頻率用公式来表示。Curle 用不同的渦街速度值得出两个頻率公式。第一个頻率公式是利用 Savic 的結果^[12]得到的,其形式如下:

$$f = \frac{uw^{1/2}}{h^{3/2}} \{1.43, 3.46, 6.00, \dots\}, \quad (1)$$

式中, w 为液流的厚度, u 及 h 的定义与以前相同。頻率对 u 的依賴关系是与实验結果相符的,但是从实验結果来看对 h 的依賴关系是有疑問的[例如,参阅(I),其中曾証明 f 与 u 成正比,而与 h 成反比]。由表 I 可以看出,各种振动方式的頻率对阶段 1 振动方式的頻率之比 J_n , 是与实验值很相符的。当 w 增大时,頻率亦稍有增加,但与方程(1)所推測的变化相比,則稍微緩慢。

在获得其第二个頻率方程时, Curle 以实验結果为根据,对 Brown^[13] 关于空气的射流——边棱系統中渦旋运动的数据进行了修正,修正后的形式为:

$$f = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) u \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{30w \left(n + \frac{1}{4} \right)} \right] \quad (2)$$

上式正确地給出了頻率对 h 的依賴关系,但由此得到的頻率比(J_n)却是不正确的(見表 1)。

表 1 由实验所确定的公式(7)中之常数
 J_1 定义为一个单位

	实 驗		渦旋理論		动力学理論
	空 气	水	公式(1)	公式(2)	公式(6)
A	0.466	0.63		0.25	0.71
J_1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
J_2	2.3	2.4	2.4	1.8	2.3
J_3	3.8	4.2	4.2	2.6	3.8
a	40.0	6.0			
b	0.07	0.24		0.27	
				0.15	
				0.10	

現在,我們可以根据射流剖面的照片,来評價 Curle 的基本前提,即有一个强渦旋正从劈尖頂端处退向下游,而其环流方向則与最近的(在射流外边形成的)向上渦旋的方向相反,他认为,正是由于形成了这个內渦旋,在孔口处的液流才发生了微小偏折,而这个渦旋則在移向下游时逐漸成长,終于变成一个外渦旋。图 1 和 2 中的一系列的照片,是用电影摄影机拍摄的,它們显示了在进行稳态振动的射

流。在考察这些图片后,在液流与劈尖之間沒有看到內渦旋。但并不能以此作为結論,因为用染色液流来显示沿劈尖出現的渦流,不象沿染色射流与洁淨流体之間的界面显示渦流时那样容易。因此讓我們来考察另外一系列照片,在这些照片中能得出一些与前稍异的想法。

如前所述,图 1 有四組連續的照片,它們共同描述了水中射流——边棱系統中振动的形成。在 A 列中, u 的值还小,射流未表现出振动的迹象。在 B 列中, u 稍大,有横向扰动出現,但极为微小(如前所述,用箭头指出这些扰动)。在 B 中沒有观察到强烈的“內”渦旋,而在这一时刻实际上也沒有看到有“外”渦旋。在 B 与 C 中,有横向振动存在,但其中沒有渦旋或仅有极微弱渦旋,这种现象說明了渦旋形成的本身并不是促使射流振动的基本机构。

反之,也許一直到振动已頗充分地建立时,仍不会产生渦旋。这显然就是图 1 的 C 列中所显示的“先驱渦旋”形成的情况;只有在豎向扰动振幅变得足够大时,才会有这种很小的綫状先驱渦旋形成,最后它才卷曲成渦旋的形式。

因此,我們就对 Curle 的渦旋可以引起射流振动的特殊假說产生了怀疑(他的主要論点是沒有問題的,即当振动已充分建立时,渦旋是重要的)。然而,可以看出(表 I),他从简单的,經過修正理論得到的公式,却合理地說明了不同阶段的頻率特性之一般性质。如果我們考虑到,不管渦旋对射流振动究竟起着什么作用,与稳态振动中渦旋形成有关的頻率总是和射流振动的頻率等同的話,我們就可以理解这一点。

近来 Gross, M. J. (格罗斯)^[14] 也曾提出与上述結論頗相似的論断。

动力学理論^[9]

現在我們可以来探討第二个理論,这个理論是以假設的射流质点运动方程为基础的。所研究的論題依次是:所推測的頻率特性、自持振动的条件和液流的剖面。同时,也和上一节一样,要将理論推測的結果与实验結果特别是本文与(I)中的实验結果,进行比较。

在动力学理論中,对边棱处一个流体质点的横向位移 $y(t)$, 建立了一个积分方程:

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau) \alpha[x'(\tau), y(\tau)] d\tau \quad (3)$$

式中, α 为作用在从孔口流向边棱的质点上的横向

力的一种量度。具体地说, $\alpha(x', y)$ 就是这个质点的瞬时横向加速度; 在指出简化的近似式时使它仅依赖于质点离边棱的距离 $x'(\tau)$ 和在同一时刻液流在边棱处的横向位移 $y(\tau)$ 。利用 $\alpha(x', y)$ 的试探函数, 可以求得式(3)的解。即设

$$\alpha(x', y) = g(x') \phi(y) \quad (4)$$

对 g 及 ϕ , 假定了有如下的简单形式, 可以得到重要的结论。

$$g(x') = 1 \quad (5a)$$

$$\phi(y) = \begin{cases} B & \text{当 } y < 0 \\ -B & \text{当 } y > 0 \end{cases} \quad (5b)$$

在求解时, 假定有周期运动 $y(t)$ 存在, 并要求这些解能满足积分方程。我们发现, 这样的解有无限多组, 每组解都自有其特征频率和射流位形。

频率特性

对射流速度为 u_0 而与 x' 无关的特殊情况, 频率公式简化为

$$f_n = \frac{1}{2} [n(n+1)]^{1/2} u_0 / h, \quad (6)$$

上式可与经验结果相比较:

$$f_n = A J_n (u - a) (1/h - b) \quad (7)$$

表 I 列出了对空气和水的 A 和 J_n 的实验值。从表 I 还可以看出, 由方程(6)中得到的这些常数的相应数值, 是与实验大致相符的。这个表里的数值是对液流厚度 w 为 0.10 厘米的情况而言的。以前在(I)中曾提出, A 依赖于 w , 动力学理论中并不能预测到这种关系。

自持振动的条件

对于射流——边棱系统振动现象, 有一个基本问题, 这就是, 必须了解在什么条件下, 各种振动方式才会是自持的。在实验上已发现 [见 (I) 之图 2~5], 任一给定的振动方式, 仅在 h, u, w 及 v 值的一定范围内存在。但是, 我们发现, 用上一节中的试探函数 [式(4)及(5)] 导出的结果, 在射流——边棱系统的参数取任何值时, 任何方式的自持振动都会发生。这种理论上缺点并非来自基本方程(3), 或者方程(4)所规定的一些限制, 而是来自式(5a)与(5b)中假定的试探函数。幸而, 只需要对函数使用一个稍微复杂一点的形式来求出积分方程, 方程的周期解之存在便与参数有关。现在保留式(5a)的假定, 而把 ϕ 设为下列形式:

$$\phi(y) = \begin{cases} -B & \text{当 } y > y_0 \\ 0 & \text{当 } -y_0 < y < y_0 \\ B & \text{当 } y < -y_0 \end{cases} \quad (8)$$

将 ϕ 改变成这种形式, 相当于对物理条件提出了下述假定, 即当液流近似地被边棱分截为二时, 力是微小的, 而仅当位移大时力才是大的。不难证明^[1], 按照这个假定与式(6), 以及液流在 y_0 与 $-y_0$ 间的时间间隔小于周期 T_n 之半的这个事实, 就可以得出如下不等式:

$$B \delta_0^2 / y_0 > (2n), \quad (9)$$

式中, $\delta_0 = \int_0^h u^{-1} dx$ 。上式给出了为了得到自持振动所必需满足的条件。 B, δ_0 和 y_0 值都是未知的。但是, 假定 $\delta_0 \sim h/u_0, y_0 \sim \frac{1}{2} w_0$ 及 $B \sim u_0^2 / 2w_0$, 而 w_0 为孔口处的液流宽度, 则有可能进行粗略的数量级的计算。第一个假定表示 u 与 x 无关。第二个假定 $y \sim \frac{1}{2} w_0$ 主要是表示如边棱处的液流位移等于液流宽度的二分之一, 则力将达到其极大值。

对 B 作合理的推测或估计, 则更困难。设如压强差等于间距为 w_0 的两边之间的伯努利压强, 则由所设的值 (亦即 $u_0^2 / 2w_0$) 可以得到所产生的横向加速度。(为了了解这个数量级的压强如何产生, 假设射流的“自由端”暂时是在边棱的上面, 经受着很快的减速作用而造成了一个与伯努利压强同一数量级的超压。此外, 还假设恰好在射流之上的区域内, 各处均承受着这个超压, 而在射流之下的压强则为环境压强)。

利用这些粗略的数值, 第 n 振动方式的自持条件就是:

$$h/w_0 > (2n)^{1/2} \quad (10)$$

这个不等式说明自持的条件与液流速度 u 无关, 并给出了发生第 n 方式的振动时, h 的极限值:

$$h_{\min} = (2n)^{1/2} w_0. \quad (11)$$

将此结果与 (I) 中的图 2~4 相比较, 说明了与公式(11)相反, 发生给定阶段的 h 极小值依赖于 u , 尤其是在 u 值较低时。但是, 在每张图中确实表现了当 u 增加时, $h_{\min}$ 趋向于一个与 u 无关的值。表 2 第四列的 $h_{\min}$ 正是这些在高速时所趋近的 $h_{\min}$ 值; 这些结果是自 (I) 的图 2~4 得到的。表 2 的第三列为由公式(11)所得的值。其中尤以在 $w_0 = 0.05$ 厘米情况下给出的 $h_{\min}$ 的实验值特别正确。 $h_{\min}$ 的计算值与实验值的数量级是相符的, 但是 $h_{\min}$ 的计算值有偏低的倾向。

表2 $h_{\min}$ 的计算值和实验值之比较

液流厚度 (w)	阶段	计算的	实验的
0.05	1	0.07	0.20
0.10	1	0.14	0.33
0.20	1	0.28	0.40
0.05	2	0.10	0.30
0.10	2	0.20	0.45
0.20	2	0.40	0.50
0.05	3	0.12	0.70

以上由公式(9)~(11)作出的假设是经过高度简化的,可是由这些公式得到的结果却与观测事实这样接近,这是很值得惊奇的。由此可以得出如下的结论,即以上对 δ_0 , y_0 及 B 所假定的值,在 u 值足够大的条件下,必定具有正确的数量级。不过,这些假定的值只不过是一些合理的猜测。此外并无所述。

可是为什么式(11)在高速时对 $h_{\min}$ 给出了合理的值,而在低速范围内则不能呢?在低速范围内可以观测到[例如,(I)中的图2~4]只要 u 超过某个阈值 $u_{\min}$ 时, $h_{\min}$ 将随 u 的减小而增大。在 $u < u_{\min}$ 时,足以使问题中有关的阶段开始出现的 h 值似乎并不存在,这就是说 $h_{\min}$ 为无限大。考察(I)之图5,也可以清楚地看出,在较低的流速范围内, $h_{\min}$ 随粘度的增加而增大。

再参考式(9),并考虑到在那里出现的常数对 u 可能有依从关系,可以得到 $h_{\min}$ 随 u 与 ν 而变化的定性解释。在这一方面,液流的性质显然是重要的。对此前已指出(图3),液流的宽度 w 不是真正的常数,它是随着至液流下游的距离 x 而增大的。在距离 $x=h$ 处出现的这个加宽的大小取决于流速与液体的粘度,当然,还取决于距离 h 。

我们可以将这种加宽的现象看作扁平射流上侧及下侧的附面层扩大的结果。这些附面层所代表的区域,就是最初以射流速率 u_0 行进的质点的速率将显著减缓的区域。在下游离孔口的任一距离 x 处,(在考虑到Schlichting^[13]及其它人对类似的附面层的计算后而选定的)附面层厚度的一个指数为

$$s(x) = (\nu x/u)^{1/2}, \quad (12)$$

式中, ν 为运动粘度,而 u 为射流速度。在 $x=h$ 处,式(12)应为:

$$s(h) = (\nu h/u)^{1/2} \quad (13)$$

当流速继续减缓时,其宽度 w 必将以这样的方式增大,使 $u(x)$ 沿射流横截面的积分与 x 无关。这

就说明了把由式(13)给出的 $s(h)$ 看作液流在 $x=h$ 处增大的宽度的量度是合理的。由它本身提出的一个加宽的无量纲指数是

$$\varepsilon = s(h)/w_0 \quad (14)$$

现在,我们回到公式(9),再考虑其中出现的一些常数,这主要是因为液流的减速和加宽对这些常数可能有所影响。对其中出现的乘积 $B\delta_0^2$ 加以考虑是有好处的。我们可以回忆到,这个 δ_0 是质点从孔口流向边棱的过渡时间,而 B 的单位则与加速度相同。因此 $(\frac{1}{2}B\delta_0^2)$ 为在加速度 B 的影响下,质点从孔口流向边棱的过程中所遭受的横向位移。液流的减慢将引起 δ_0 的增加,这个增大的 δ_0 超过了假定液流以恒速 u_0 行进时所得的值。另一方面,也可能是更重要的,因粘性而引起的显著滞缓很可能使得“反馈”加速度 B 比在导出公式(11)时所假定的伯努利值($u_0^2/2w_0$)小得多。因此,这种关于液流减速和加宽就会减小乘积($B\delta_0^2$)的假定似乎是合理的。就已加宽的液流来说,在式(9)中 y_0 的相应值将增大而超过推导式(11)时所设定的值 $(\frac{1}{2}w_0)$,这也似乎是合理的。(例如,也可以这样假设,即以 w_h 来代替 w_0 , w_h 为在 $x=h$ 处已加宽的液流之实际宽度)。简言之,液流的减缓和加宽的效应在于减低了式(9)左边的数量。

不难证明,这个假定的结果即就是如下的条件:

$$h_{\min} = (2\nu)^{1/2} w_0 g(\varepsilon), \quad (15)$$

式中, ε 为液流加宽的一个指数[式(4)],而 $g(\varepsilon)$ 为 ε 的递增函数,在 $\varepsilon=0$ 时简化为1。所以,可以将式(11)设想为当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 $h_{\min}$ 的一个极限形式。由式(13)、(14)及(15)显然可见, $h_{\min}$ 随 u 的减小和 ν 的增大而增大,这正是实验所指出的结果。考察(I)的图5,看来,式(11)的适用性的一个粗略的判据就是 ε 应小于1/4;这个图上的数据是对各种粘度的液体及 $w_0=0.05$ 厘米而言的。对其它的 w_0 值[见(I)的图2~4],这个判据是较难适用的。

液流剖面

在前面几节中,我们已讨论过在 $x=h$ (即在劈尖尖顶上)处射流的运动。动力学理论能够处理在孔口与边棱间任一点之位移 (x, t) 。这些知识使我们能够决定在一个周期的不同部分的液流剖面。Bouyoucos(玻尤可斯)和Nyborg(尼堡)^[14]曾对阶段1的照相(如图1和2)与由计算得到的剖面进行了比较,发现射流的一般形式与行为是相符的。