怎樣學習三角

張元鼎著　呂學禮校

上海新科學書店出版

內容提要

本書採取蘇聯教材的精神，說明：三角學習的目的和研究的對象，三角函數概念的理解和記憶，三角與代數幾何的聯系。

怎樣學習三角

著者　張元鼎
校者　呂學禮
出版者　新科學書店
上海福州路606號電話93223
印刷者　中和印刷廠
上海淮安路727弄30號
發行者　新科學書店
上海福州路606號電話93223

開本　$762\times1067\ \frac{1}{32}$　印張　$2\frac{1}{2}$　字數　47千
1954年12月第一版第一次印　印數　0001—2000
定價　¥ 4,000元

前　　　言

三角這一科目，和代數及幾何關連很多。有些同學感覺學習困難，想係對於這兩科學習基礎較差，或是未能抓住一些和三角有關的東西在學習前重點地加以複習的緣故。爲此，才寫了本書的首章，也結合着解决了一些有關學習目的和研究對象的問題。

三角函數概念的培養與明確是學習三角的根本環節。不解决這個問題，就無法在學習上前進一步。而這個概念的明確，又不能單憑記憶或抽象地講解，必須通過單位圓形象化地去理解和記憶。因此，在"三角函數"及"一定要把單位圓學好"這兩個問題上，說得很多，并在有些地方故意重複或强調了一些。

關於前後連系，三角本身的發展，均採取了蘇聯新教材的精神（如三角函數不從直角三角形講起等）。限於水平，當然體會得很不夠，也一定有錯誤，歡迎讀者同志們指正。

張元鼎

1953.11.10.

怎樣學習三角

目錄

第一章　基本建設

第一節　離不開原有基礎

在剛學習三角的今天，回憶一下以前學習幾何代數時的情況，複習一下與學習三角有密切關連的問題，是完全必要的。

這是因爲對每一新課程的學習總是離不開原有基礎。好的學習基礎是前進的動力，是學習新知識的準備。

這是因爲新的東西總不會憑空產生的。牠是在發展原有基礎的積極的一面，否定或克服了其消極的一面的情況下發生和發展的。比如，代數上的負數就發展了正數的運算并克服了被減數小於減數（當然是存在的客觀事實）的減法困難。

已學過的幾何、代數，範圍很廣，從那兒複習起呢？複習的目的是爲了學好三角，因此，複習的重點，在代數方面，應該放在比例計算、方程解法（二次的）、對數基本定理及其應用，特別是函數及其圖解。在幾何方面，應放在角的定義、角的度法、三角形的邊角關係、有關三角形及正多邊形的計算等問題。這些，與今後三角的學習，均有很大關係。

在方法上，也不應孤立地、不求甚解地去複習牠們。在某些

問題上，必須深思熟慮，看是否還有什麼理解得不夠的地方。如"角的大小與邊的長短沒有關係"這句話就很值得仔細體會。又如三角形邊的大小和角的大小中間，究竟有那些關係，也要弄得淸楚。有些地方還須連系起來研究，如比例計算與相似形，如有關正多邊形和三角形的計算。特別是在函數方面，更應把牠和我們日常生活中一些現象結合起來去理解研究。複習是這樣一個過程：舊的東西需要我們進一步地去理解，新的東西在等待着我們去努力學習；"離不開原有基礎"的重要意義，就在這裏。

第二節　先弄懂函數

要弄懂函數，先須弄懂變數；而弄懂變數，又須大體上弄懂事物的變化及數學將怎樣研究事物的變化問題。

誰都不能否認一切客觀存在的事物是無時不在變化着的。每一事物的變化，有其內在的原因（內部矛盾，如生物的新陳代謝作用）及外在的原因（事物的相互依賴、制約、和影響，如在某種溫度下，水就結爲冰塊或者急速化爲蒸汽，而在一般情況下，緩緩蒸發）。外在的原因又必須通過事物的內在條件而起作用。水之能結冰化氣，主要還是由於水的本身有這個變化的條件。因此，事物的變化是有其自身規律的。人們掌握這個規律可以加速或延緩其變化，但不能違背牠的規律要牠隨我們的願望而變化，或者如某些閉起眼來亂說一通的人所說的"沒有什麼變化"。

任何事物，都有其形狀與分量。事物的變化，必然會引起事物形量的變化。事物的變化有規律，形量變化也就有規律。人們適應着事物變化的規律，認識了或處理了事物，也就必然要同時認識了或處理了事物的形與量，從而構成了一般的形量概念及其變化的規律。這就使人們在各種實踐中獲得了有關事物的形和量的知識。這些知識，好像和事物分開了一樣，而其實幷未分開。這些知識，好像本身有一套完整體系，而其實正是忠實地反映着客觀事物變化的規律。這些知識就是數學。這些特點就構成了數學的現實性和抽象性的矛盾，而被有些唯心論者曲解爲數學是人們主觀創造的產物。

但另一方面，我們也必須承認有這樣的事實：卽在某一情況下，事物的變化方面，有其相對靜止的情況，或通過我們主觀努力，根據其發展的規律使之保持相對靜止狀態。如在一定溫度下（溫度的暫時穩定或主觀地加以控制）研究氣體與其壓力間的關係。在這裏就發生了變與暫時不變的情況。反映在數學上，就產生了變數與常數。而在我們日常生活當中，這樣的事例俯拾皆是。有變數的地方，常常伴隨着常數；反之亦然。正因爲有某些是變數，才看得出某些是常數。在變數之間，也存在着嚴密的彼此制約的關係，如 $y=3x+2$ 中，y 是隨着 x 的變化而變化的。x 具有不同的值，則 y 必變爲具有與 x 相適應的對應數值，而 3、2 則保持不變。在這裏，就產生了函數。函數，牠本身也是一個變數，但牠同時是跟着另一個變數的變化而變化的。如

上例 y 就是 x 的函數。

圓面積的大小決定於牠的半徑的長短。在同圓或相等的圓內，等弧所對的圓心角相等，若兩弧不等，大弧所對的圓心角大。均是很明顯的例子。

總之，因爲事物在變化，事物的形量才有變化，反映在作爲研究事物形量變化的數學上才有變數與常數，因而也有函數，這就是函數的實際意義。數學將怎樣研究事物的變化呢？這很簡單，就是通過研究函數。所以弄懂函數是學習數學任一部門帶根本性質的問題，特別是學習三角。

弄清楚函數的圖象，對於研究函數是很重要的。小孩子識字，從看圖開始，邊看邊學，津津有味，旣識得又記得。人們對一件生疏事物的認識，總是從觀察開始。人們常常從電影受到更深刻的敎育。這些都說明我們人類對事物的研究，總要先有足夠的感性知識，才有可能提高到理性知識。人們的思想發展過程，總是由具體的形象進入到抽象的概括。數學是經常被認爲比較抽象難於學習的學科，因此怎樣具體化和形象化，就成爲一個重要問題了。

$y=mx+b$ 這個式子，并不希奇，只是一個一次方程罷了。牠表示 y 是關於 x 的一次函數。y 是隨着 x 的變化而變化的。命 x 以各種數值作點的橫坐標，用 y 的對應數值作點的縱坐標，描出各點，連起來恰成一根直綫。這根直綫是和 $y=mx$ 直綫(另一根通過原點的直綫)平行的，是和縱軸相交的，其相交處距

離原點恰好是 b 個單位。那個 m 是與直綫的位置密切關連着的，叫做直綫的斜率。我們進一步可以知道關於 x、y 兩個變數的任何一次方程的圖象都是直綫。

又如 $y=x^2$，看上去也不過是一個極簡單的二次方程罷了，但畫出圖象來，才知道牠是一個頂點在原點的拋物綫，以縱軸爲對稱軸而向橫軸上方（左右）無限擴張。我們并可知道 $y=ax^2$、$y=ax^2+b$、$y=a(x+c)^2$ 等乃至 $y=ax^2+bx+c$ 的圖象都是拋物綫。

通過這兩個以前我們曾經學過的例子，可知圖象的重要意義在於能使我們對函數的認識形象化、完整化、普遍化，在於能使我們明確函數的實際意義和內容，在於能進一步地知道所謂軌跡的意義（只是通過幾何的學習對軌跡的認識顯然是不夠的）。

第三節　三角函數

角是一個圖形（附屬於許多事物）。牠是一根射綫圍繞着牠的端點旋轉而成的，如圖 1 的角 AOP. 牠的大小由 OP 旋轉的多少所決定，因此牠是一個量。OP 變動時，角 AOP 的大小即行改變。因此，角在某些實際應用中牠將是一個變數，而就有也必然會有另一些變數跟着

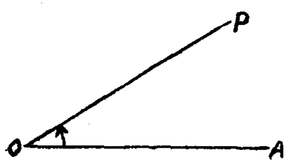

圖 1

牠的變動而變動而作爲牠的函數。

角的函數是什麼呢？在幾何學中，可能有這麼幾種：將此角頂爲中心任意長爲半徑作一圓（圖 2），AP 弧是 $\angle AOP$ 的函數，AP 弦是牠的函數，或者由圓心到 AP 弦的距離是牠的函數，因爲牠們都是跟住 $\angle AOP$ 的大小而變動的。

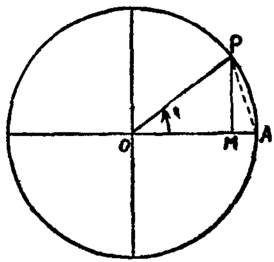

圖 2

但人類在實際測量工作中，發覺這些雖然符合函數定義，幷不能對實際問題的解決有多大幫助。而由 P 點所作至 OA 的垂綫 MP，倒是大有用處的一種函數，幷從而發現 OM 也是一種有用的函數。而且在開始時，從第一象限中，發現在 OP、OM、MP 三綫之間的關係正是勾股弦定理。若不變 $\angle AOP$ 的大小，而放大或縮小半徑 OP，則 MP、OM 亦隨之放大或縮小，但 MP 與 OP 的比值、OM 與 OP 的比值不變。於是 $\frac{MP}{OP}$ 及 $\frac{OM}{OP}$ 就被定名爲 $\angle AOP$ 的正弦及餘弦而作爲 $\angle AOP$ 的兩種函數了。

其後，通過人們的實踐，又發展而爲圖 3，得到另四種函數 $\frac{AT}{OA}$、$\frac{OT}{OA}$、$\frac{BS}{OB}$ 及 $\frac{OS}{OB}$，分別定名爲正切、正割、餘切及餘割，其中 AT、BS 爲過 A、B 兩點的切綫。這六種函數總稱爲三角函數，其符號爲 sin（正弦）、cos（餘弦）、tan（正切）、cot（餘切）、sec（正割）及 csc（餘割）。

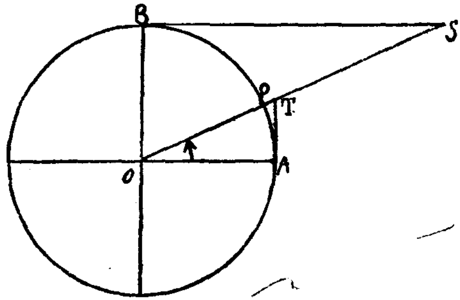

圖　3

這些函數的獲得，有極大的意義和價值。在幾何裏，我們只知道一些三角形中邊與邊的關係，和角與角的關係，如勾股弦定理及其推廣、三角形三角和等定理，只知道一些初步的邊角關係，如在一三角形中，大邊對大角等定理。但邊與邊間的比值和角的關係，則毫未涉及、毫無所知，致使我們對事物的形狀的研究，特別是有關形狀的數值的計算，受到極大的限制，而無法解决一些實際問題。

現在，新的邊角關係建立起來了。我們將通過這些新的關係進一步認識事物形狀發展的更多的性質和規律，以擴大我們數學的領域，將更充實和提高我們的幾何知識，而解决前此局限於幾何範圍內所不能解决的而其他科學所要我們解决的更多的問題。

第四節　認清對象、明確目的

三角學是數學的分科，和幾何、代數一樣，研究事物的形量性質。三角學的原意是三角形的量度。是人類在測量土地中，由三角形已知條件求未知條件的勞動成果，經過長期積累和組織起來的系統知識。

三角學的主要內容是研究三角函數的性質及變化，并在此基礎上解三角形。在中國，很早就有八綫表。在西方則創始於古希臘。牠的創立與天文學有很大關係。人們在航海中辨別方位、避免危險；在農業方面，看星宿、估計時間、預料氣候，往往要通過天文氣象，因之就創立了三角學。所以三角學的發生與發展是和社會的需要與進步分不開的。

降至近世，在測量工作、地形測繪、天體研究、力的合成與分解、力學機械計算、軍事科學、航海技術等等方面，均需應用三角。所以三角學的重要及其應用的廣泛實不亞於代數和幾何，我們學習三角的目的，就在這裏。

就三角本身來說，內容複雜，公式繁多，研究的對象是形狀，因之和幾何學在很多地方不能分割，但在方法上前者重推演計算，後者重分析論證，又顯有不同之處。三角也研究量，也常解方程，因之和代數不能分割，但由於三角函數本身的複雜性，在實際運算上也多所區別。這是我們在數學內部連系間應注意之點。

就其應用的廣泛性說，牠連系着物理學、天文學、地理學、軍事技術、工程學等許多方面，所以在普通高中這一階段，三角學

是不容忽視的一門基礎知識，必須加强學習、牢固掌握。

就其抽象性和現實性矛盾方面來說，也比幾何和代數更麻煩一些。這是由於三角函數具有更高的抽象性的結果。比如根據某種測量，繪得一圖，這圖形已離開具體事物了，但有形可查，倘屬較為具體。及至運用到邊的比值，就離開事物的本身更遠了。在演算過程中，將見滿是三角函數，錯綜變化，像失去原題一樣，所以怎樣掌握和連系實際，也是我們應該特別注意之點。

第五節 有困難、有辦法、有希望

據上所述，能不能說我們今後的三角學習就沒有困難了呢？不能，千萬不能以為這樣。

學習一開頭，就有人以為三角既和幾何有相同的研究對象，學不學都可以，就是學，還不是和幾何一樣，由已知論證到未知了事。那知翻開課本，上了幾課，和他所以為的不盡相同，他一開頭就碰到了困難。

又有人以為三角是偏重計算的，由三角形的已知條件，列出方程，再求未知條件就得了，這和代數沒有什麼兩樣，那知翻開課本，上了幾課，也和他所想像的不完全一樣。

有的人以為既然必須弄懂三角函數，那麼記得這六種函數的定義及其記法，不就完事了？但這六種函數中間，偏又有那麼許許多多複雜的相互關係，反映在運算上有那麼多層出不窮的公式，記無從記起，不記又不行，而每一函數又隨着角的變化，而

引起千變萬化，角有正負，一會兒在第二象限，一會兒在第三象限，函數的符號也有正負，搞得頭昏腦脹、莫明其妙。

角有無窮多，角變函數也變，但函數值却只有薄薄一張三角函數表而應用無窮，有的人對此感覺新奇有趣而說不出道理所在。

單角函數的變化已經夠多了，偏又有什麼二角和差的函數、倍角函數半角函數等等，內容越過越複雜，公式越來越多。有人對此一方面感覺在實際應用上有其必要，另一方面在論證或演算上大有困難。

從有些舊教材看，大都由直角三角形內的銳角函數講起，什麼斜邊除對邊叫做正弦、斜邊除鄰邊叫做餘弦等等還好懂，還能用以解直角三角形及一些簡單問題。但後來又是什麼坐標啊！單位圓啊！函數的數值和符號變化啊！越來越模糊，這是什麼一回事？

從有些三角恆等式看，很整齊也似乎很簡單，但證明却大不易。用這一公式不行，用那一公式也不能解決。代數方法在這裏施展不開，什麼道理？

從三角方程看，在代數上，未知數只有一個，而在三角上，未知角雖只一個，但這個角的函數却往往不止一個。那就要化，化却也不容易，又在其解答上由於具有相同函數值的角往往不止一個，這一特點也引起很大困難。

說艱難、道苦衷，稍談談，困難就是這麼一堆。我們怎麼能

說沒有困難呢？解決困難的步驟是先找原因，再想辦法，最後指出遠景。這也就是毛主席所指示我們的“有困難、有辦法、有希望”。

任何一種知識、一門學問，都是人類長期實踐的成果。我們來學習它，是從不知或稍有所知到知，與人們在實踐中的時間相比，是很短很短的。這一矛盾的存在就是困難。所以我們常提出所謂直觀教學、連系實際、具體化、形象化等方法以克服這一困難。又從不知到知，也不是一個簡單的一蹴可成的過程，而是一個艱苦學習，不斷與困難作鬥爭的過程。所謂“知”，是把書本上的知識和教師的講解消化爲自己思想認識上的東西，并又把這個東西作爲學習新的東西的基礎的意思。這個過程的本身就是困難，同樣也是興趣。興趣和困難常在一道，克服困難後才可能得到興趣，而這一興趣又推動着我們進一步克服新的困難。

理解了這些，就可以知道上面所提出的一些困難是并不奇怪的。除開上述原因之外，我們認爲還有這兩個方面應該提出來談一談。

第一，有關教材問題。在講授三角函數方面，一些舊教本及不少習慣於用這些教本的常常是由直角三角形的銳角三角函數講起，用斜邊、銳角的對邊、鄰邊三者的比值作爲六種函數的定義。同時，又運用直角三角形三邊關係（即勾股弦定理）及兩角互爲餘角的性質講授有關三角函數的基本公式，及互爲餘角的二角的函數關係。又在此基礎上講一點兒簡易測量及直角三角

形解法。

這樣講錯不錯呢?不錯。好不好呢?不好。爲什麽不好呢?首先是把同學們的思維局限於直角三角形當中，不能很好培養他們對角的旋轉觀念，在學生思想上易於養成“這就是三角函數了，這就是三角函數間關係的全部了”固定的滿足的觀念。其次是在講了銳角三角函數之後，便很快地轉入坐標講授，并擴展至鈍角乃至第三、四象限之角。不久，卽又轉入單位圓用綫段表示函數。這樣一再的迅速急驟的變化，是違背學生的思想發展規律的。他們實在來不及攷慮，來不及跟住變化。他們很滿足於那個熟悉的直角三角形中的銳角，他們至多是比較關心坐標的和單位圓的第一象限，對於用綫段表示函數甚至覺得沒有意思。因爲這些實在和他們學過的什麽斜邊、對邊、鄰邊比値距離更遠了。教師雖費盡氣力，說這是更好的方法，這是前後一致的，但效果很少。這不是學生不好，也不是我們教師不好，而是教材本身不能切合學者思維發展規律的緣故。這就造成學者無法深刻了解三角函數而造成學習上很大困難。

在講恆等式方面，舊教材也有很大毛病。列爲專章專題，故爲割裂，大講其證明方法(并不是說不要方法)，炫奇競勝，不顧學生的理解能力，不管實際運用，以致造成學生的死鑽證法，競尙難題，而放鬆了三角學習的主要任務。

第二，是我們學習上的毛病。單靠學代數時的一些運算經驗，單靠幾何的一些單純的邊角關係，不管三角本身的特點，死

記公式、亂搬亂套，而碰得頭青臉腫，一無是處。把 $sin(A+B)$ 算成 $sinA+sinB$ 便是上面這種錯誤的典型的例子。其次是不管所學的定理、公式或問題本身的特點及其條件間的相互關連，也不問這一定理、公式或問題所由提出的基礎及其證明的全部過程，只是抓住終結形式，生硬搬用，而結果造成大錯。如不管 $A+B+C$ 是否等於 $180°$ 而總以爲 $tan\,A+tan\,B+tan\,C=tan\,A\,tan\,B\,tan\,C$，卽是這種錯誤的一例。

克服的辦法，在於我們要認識對任一新事物學習的過程就是克服困難的過程，只要我們有足夠的幾何、代數的基礎，加上克服困難的信心與決心，明確了三角學是什麽，三角函數是什麽，在新敎材裏三角函數是在什麽基礎上提出的，這一些基本概念，然後循序漸進，不急不燥，在老師的講授與啓發之下，糾正一切如上所說的學習上的敎條主義和形式主義的毛病，將一定會克服困難，把三角學好的。

關係很複雜，公式很多，但歸根結底，總要有一個根本關係和一個基本公式的。抓住牠，先重點地理解牠，然後再慢慢順着敎本上的系統逐一認識理解，自會融會貫通。正如你開始學幾何時感覺定理太多，而現在不感覺太多一樣。

三角函數太抽象，難理解。但具體地研究牠是有辦法的，在圖 2 及圖 3 中，六種函數是比較具體的。抓緊牠們，幷做到你思想上常有這樣一個圖，則三角函數就不再是一個太抽象的東西了．這是新敎材的特點。