21世纪高职高专经济应用数学系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主编/詹耀华

中国金融出版社

21 世纪高职高专经济应用数学系列教材

线性代数

主　编　詹耀华
副主编　焦淑芬　宋　立

中国金融出版社

责任编辑：彭元勋　吕晶晶
责任校对：刘　明
责任印制：裴　刚

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（Xianxing Daishu）/詹耀华主编．—北京：中国金融出版社，2007.3
（21世纪高职高专经济应用数学系列教材）
ISBN 978-7-5049-4079-7

Ⅰ.线…　Ⅱ.詹…　Ⅲ.线性代数—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第142061号

出版发行　中国金融出版社
社址　北京市广安门外小红庙南里3号
市场开发部　(010)63272190，66070804（传真）
网上书店　http://www.chinafph.com
(010)63286832，63365686（传真）
读者服务部　(010)66070833，82672183
邮编　100055
经销　新华书店
印刷　北京华正印刷有限公司
尺寸　170毫米×228毫米
印张　11.25
字数　214千
版次　2007年3月第1版
印次　2007年3月第1次印刷
印数　1—5000
定价　17.50元
ISBN 978-7-5049-4079-7/F·3639

前 言

《线性代数》是中国金融出版社推出的高等职业教育基础类课程“十一五”规划教材，也是“经济应用数学”系列教材的第二分册。

本教材参照高职高专经济数学基础课程教学的基本要求，结合编者多年的教学实践和教学改革的实际经验，本着“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，对内容的取舍和编排进行了必要的处理。本教材强调理论联系实际，注意从实际例题引入概念；注意以技能训练为主线，淡化某些理论性的证明；在习题与例题的选择上注意难度适中；在数学模型与应用中删繁就简，语言通俗精练，降低了同等程度知识掌握上的难度。同时本教材引入了数值计算软件 Mathematica 的介绍，有利于学生提高应用计算机进行数值计算的能力；引入了线性代数、线性规划中一些有趣的数学史，以开阔学生的眼界。

本教材适用于高职高专经济类和管理类学生，同时也适合函授大学等成人教育专科学生。书中注有“*”号的内容可根据教学需要选择使用。

本教材由辽宁金融职业学院詹耀华任主编，山西金融职业学院焦淑芬、山东轻工业学院金融职业学院宋立任副主编，辽宁金融职业学院郭欣红参编。编写分工如下：詹耀华（第2章、第5章、第6章、第7章、附录1和附录2），焦淑芬（第3章），宋立（第4章、附录3），郭欣红（第1章）。

书中不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

2006年5月

目　录

1　行列式 …… 1

1.1　二阶、三阶行列式 …… 1

习题　1.1 …… 3

1.2　n 阶行列式 …… 4

习题　1.2 …… 7

1.3　行列式的性质 …… 8

习题　1.3 …… 13

1.4　克莱姆法则 …… 14

习题　1.4 …… 17

复习题一 …… 19

2　矩阵 …… 22

2.1　矩阵的概念 …… 22

习题　2.1 …… 25

2.2　矩阵的运算 …… 26

习题　2.2 …… 31

2.3　矩阵的秩 …… 32

习题　2.3 …… 35

2.4　矩阵的逆 …… 36

习题　2.4 …… 41

复习题二 …… 42

***3　n 维向量** …… 45

3.1　n 维向量 …… 45

习题 3.1 …… 47
3.2 向量组的线性关系 …… 47
习题 3.2 …… 51
3.3 向量组的秩 …… 52
习题 3.3 …… 55
复习题三 …… 56

4 线性方程组 …… 58

4.1 消元法和线性方程组解的判定 …… 58
习题 4.1 …… 64
*4.2 线性方程组解的结构 …… 65
习题 4.2 …… 69
复习题四 …… 71

***5 投入产出数学模型** …… 74

5.1 投入产出数学模型的基本结构 …… 74
习题 5.1 …… 78
5.2 直接消耗系数 …… 79
习题 5.2 …… 83
5.3 完全消耗系数 …… 84
习题 5.3 …… 86
5.4 投入产出数学模型应用举例 …… 86
习题 5.4 …… 92
复习题五 …… 93

6 线性规划数学模型 …… 95

6.1 线性规划问题的数学模型 …… 95
习题 6.1 …… 98
6.2 两个变量的线性规划问题的图解法 …… 99
习题 6.2 …… 103

6.3　单纯形法 …… 103
习题　6.3 …… 113
6.4　两阶段法 …… 114
习题　6.4 …… 122
复习题六 …… 124

7　运输问题数学模型 …… 126

7.1　表上作业法 …… 126
习题　7.1 …… 133
7.2　图上作业法 …… 134
习题　7.2 …… 141
复习题七 …… 143

附录 1　线性代数知识结构图 …… 145
附录 2　Mathematica 系统简介 …… 146
附录 3　数学史话 …… 150

习题答案 …… 155

1 行列式

行列式在线性代数中是一个基本工具，许多问题的研究都需要用到它，比如线性方程组、矩阵、矩阵的特征值、二次型等。在初等代数中，为了便于求解二阶和三阶线性方程组，引进了二阶行列式和三阶行列式。进一步研究一般的 n 元线性方程组的求解，就需要把二阶、三阶行列式加以推广。本章将讨论 n 阶行列式的概念、基本性质及其应用，还将介绍常用的几种计算 n 阶行列式的方法和用行列式解线性方程组的一种重要方法——克莱姆法则。

1.1 二阶、三阶行列式

在初等代数中，用加减消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

可得：

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了研究和记忆的方便，引入二阶行列式的概念。

定义 1 由 2^2 个数组成记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示数值 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称之为**二阶行列式**，用 D 来表示，即：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中，a_{11}、a_{12}、a_{21}和a_{22}为这个二阶行列式的**元素**；横排称为**行**，竖排称为**列**；从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**。

利用二阶行列式的概念，如果记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & b_{12} \\ b_2 & b_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，可得二元一次线性方程组（1-1），当所有未知数的系数组成的行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解，它的解可以表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}$$

用行列式求解线性方程组，必须要注意：

（1）分母 D 是由方程组的未知数的系数按原来顺序排列而成的行列式，D 称为**系数行列式**。

（2）第一个未知数 x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 分别代替系数行列式 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21}后构成的行列式；第二个未知数 x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 分别代替系数行列式 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22}后构成的行列式。

（3）如果系数行列式 $D\neq 0$，那么线性方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}$$

【例 1-1】 解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=5 \\ x_1-4x_2=-3 \end{cases}$$

解：因为 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=3\times(-4)-2\times 1=-14\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=5\times(-4)-2\times(-3)=-14$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=3\times(-3)-5\times 1=-14$$

所以，$x_1=\frac{D_1}{D}=1$，$x_2=\frac{D_2}{D}=1$。

类似地，讨论含有三个未知数的线性方程组的求解问题，可引入三阶行列式。

定义 2　由 3^2 个数组成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示数值 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$，称为三阶行列式，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式由 3^2 个元素以三行三列形式组成，它表示 $3!=6$ 项的代数和，其中正负项各半，每一项都是取不同行不同列的 3 个元素的乘积。如图 1－1 所示，实连线的三个元素之积带正号，虚连线的三个元素之积带负号。

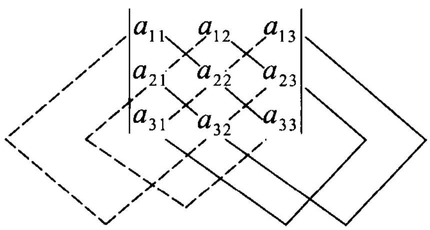

图 1－1

【例 1－2】　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 的值。

解：$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-7)\times(-1)+2\times0\times2+3\times(-3)\times1$
$-2\times(-7)\times1-(-3)\times0\times1-2\times3\times(-1)=18$

习　题　1.1

1. 用行列式求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2=6 \\ -x_1+2x_2=2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ 7x_1-4x_2=12 \end{cases}$

2. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. 已知$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$，求 x 的值。

4. 验证下列等式：

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

1.2 n 阶行列式

现在来分析一下三阶行列式的定义，即：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

首先，三阶行列式右端三项，是三阶行列式 D 中第一行的三个元素 a_{11}，a_{12}，a_{13}分别乘上三个二阶行列式，而所乘的二阶行列式是 D 中划去该元素所在的第一行与第 j 列元素后余下的元素所组成的（$j=1，2，3$）。

其次，每一项前面都要乘一个 $(-1)^{1+j}$，1 和 j 正好是元素 a_{1j}的行标和列标。

按照这一规律，可以用定义三阶行列式的方法定义四阶行列式，并依次类推，在已定义了 $n-1$ 阶行列式之后，便可定义 n 阶行列式了。

定义 1 由 n^2 个数组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示数值

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。

定义 2 在 n 阶行列式 D 中划去 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列的元素后，剩下的元素按原来相对位置不变所组成的（$n-1$）阶行列式，称为 a_{ij}的余子式，记为 M_{ij}，即：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在 M_{ij}的前面冠以符号 $(-1)^{i+j}$称为元素 a_{ij}的代数余子式，记作 A_{ij}，即：$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$。

这样，由 n 阶行列式的定义，n 阶行列式又可以表示为：

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

此式称为 n 阶行列式按第一行元素的展开式。

【例 1-3】 求三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 中，元素 $a_{11}=1$、$a_{12}=3$、$a_{13}=2$ 的余子式和代数余子式。

解：$M_{11} = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 7$，$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$，$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 7$

$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 7$，$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -1$，$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = 7$

在代数余子式的概念的基础上，可以得出下述定理和推论。

定理 行列式的值等于行列式的任一行（或任一列）的各元素与其对应的

代数余子式的乘积之和，即：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

推论 行列式任意一行（或一列）的各元素与另一行（或一列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即：

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \cdots + a_{rn}A_{sn} = 0\ (r \neq s)$$

或

$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0\ (r \neq s)$$

【例1-4】 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。

解：显然，此行列式按第四列展开较容易。

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -(-3-20+0-2+0-30) = 55$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1-40+8-4-8-10) = -55$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -(0-30-4+0-6+5) = 35$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0+6-8+0-12-1) = -15$$

行列式按第四列展开，得：

$$\begin{aligned} D &= a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} \\ &= 0 \times 55 + 1 \times (-55) + 0 \times 35 + 1 \times (-15) \\ &= -70 \end{aligned}$$

【例1-5】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值。

解：根据定义，有：

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例1-5所示的行列式，其主对角线上方的元素皆为零，称为下三角形行列式；同样，主对角线下方的元素全为零的行列式称为上三角形行列式，其形式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

下三角形行列式与上三角形行列式统称为三角形行列式。

由例1-5可知，下三角形行列式的值等于主对角线元素之积。

习　题　1.2

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

2. 解方程 $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 3 \\ 1 & x & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$

3. 求证：$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$

4. 设四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

（1）写出 D 中元素 A_{13}，A_{22} 的代数余子式。　（2）计算行列式 D 的值。

1.3 行列式的性质

三阶及三阶以上的行列式根据定义来计算是比较复杂的。例如，一个三阶行列式是 6 项的代数和，一个五阶行列式就是 120 项的代数和。因此有必要讨论行列式的性质，进而简化行列式的计算。

下面给出 n 阶行列式的基本性质：

定义 将行列式 D 的行变为相应的列，得到新的行列式，称它为行列式 D 的**转置行列式**，记作 D^T。

例如，令 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$，那么 D 的转置行列式就是：

$$D^T = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式转置后其值不变，即 $D^T = D$。

此性质说明行列式对行成立的性质对列也成立。

【例 1-6】 计算上三角形行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值。

解：应用行列式的性质 1 及定义，得：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

据此不难得出结论：三角形行列式的值都等于其主对角线上所有元素的乘积。

性质 2 交换行列式的两行（或两列），行列式的值变号，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 如果一个行列式的两行（或两列）相同，那么这个行列式等于零。

证明：交换行列式 D 中对应元素相等的两行，得到的行列式仍是 D，但由性质 2 知，行列式的值应变号，即 $D=-D$，所以 $D=0$。

性质 3 行列式的某一行（或一列）中所有元素都乘以同一个数，等于将该数提到行列式外相乘，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 如果行列式中的某一行（或一列）的所有元素都是零，那么这个行列式等于零。

推论 2 如果行列式中有两行（或两列）的对应元素成比例，那么这个行列式等于零，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 4 如果行列式的某一行（或一列）的元素都是两个元素的和，那么这个行列式等于相应的两个行列式的和，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的某一行（或一列）的所有元素都乘以数 k 后，加到另一行（或一列）的对应元素上去，行列式的值不变，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1}+ka_{s1} & a_{r2}+ka_{s2} & \cdots & a_{rn}+ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

计算行列式的值，直接应用定理按照某一行（列）展开，一般来说，并不一定能简化计算，只有在行列式中某一行（列）含有较多的零时，才能简化计算。特别是，如果能利用行列式的性质先将行列式的某一行（列）化为仅含有一个非零元素，再按此行（列）展开，则会使计算大大简化。

【例 1-7】 计算 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。