



读考研书 找人大社

2008 考研

历届数学真题题型解析(数学四)

主编 黄先开 曹显兵

● 囊括**21年**全部真题 ● 名师归纳总结**94题型**

全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1987~2007年真题
题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路
章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见
每章后附自测练习题，全部来自数一、二、三的历年真题，互相借鉴，触类旁通
21年真题原样附录在后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明



中国人民大学出版社

考研历届数学真题 题型解析(数学四)

► 主 编 黄先开 曹显兵
► 编 者 黄先开 曹显兵
施明存 殷先军

正版查询及服务程序



← 刮 开 涂 层



← 获 取 20 位 数 字 编 码



← 上 www.lkao.net 注 册



← 登 录 增 值 服 务 进 免 费 课 堂

2008

图书在版编目(CIP)数据

考研历届数学真题题型解析(数学四)/黄先开,曹显兵主编.2版

北京:中国人民大学出版社,2007

ISBN 978-7-300-07366-8

I. 考…

II. ①黄…②曹…

III. 高等数学-研究生-入学考试-解题

IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 016902 号

考研历届数学真题题型解析(数学四)

主 编 黄先开 曹显兵

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室)

010-62511398(质管部)

010-82501766(邮购部)

010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司)

010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.net>(中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京东方圣雅印刷有限公司

规 格 210 mm×285 mm 16 开本

版 次 2006 年 6 月第 1 版

2007 年 2 月第 2 版

印 张 23.5

印 次 2007 年 2 月第 1 次印刷

字 数 623 000

定 价 29.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来,至今已 21 年,共命制试卷近百份,有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶,它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,展示出统考以来数学考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题,是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题,可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考典型题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料 and 进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心分析研究,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的,相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点:

1. 内容最全面。汇集了统考以来 21 年的所有试题,便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余三类试卷的相关典型真题作为习题提供(如数学一每章后面精选了数学二、数学三和数学四的同类型考题),以便考生进一步巩固相关知识,考生有了本书后,也就相当于拥有了其余三类试卷的资料。

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求,每一章节均按题型进行归类,并对每一题型进行了分析、归纳和总结。这样考生可通过题型研究,把握命题特点和命题思路,做到举一反三,触类旁通。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法,然后详解——详细、规范的解答过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及的知识、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头,先列出了考试大纲规定的内容与要求,与此相对照再进行题型归类和分析总结,顺序与考试大纲和一般教材一致,便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除每类题型均有归纳总结外,每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结,这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重,从而发现命题的重点、最常考的题型,以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排,又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、复习指导书同步进行,后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析,但希望读者不要輕易去查看分析、详解和评注,而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后,再去看书中的分析、详解和评注,仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同;如果存在问题,应尽量查清原因,看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺,还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。注意,这



样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2007年2月于北京

目 录

第一部分 微积分

第一章 函数、极限、连续 3

- 题型 1.1 函数的概念及其特性 3
- 题型 1.2 极限概念与性质 4
- 题型 1.3 函数极限的计算 5
- 题型 1.4 函数极限的逆问题 10
- 题型 1.5 数列的极限 11
- 题型 1.6 无穷小量的比较 14
- 题型 1.7 函数的连续性及间断点的
分类 15
- 本章总结 18
- 自测练习题 18
- 自测练习题答案或提示 21

第二章 一元函数微分学 22

- 题型 2.1 考查导数的定义 22
- 题型 2.2 利用导数求曲线的切线、
法线方程 25
- 题型 2.3 一般导函数的计算 27
- 题型 2.4 可导、连续与极限的关系 30
- 题型 2.5 微分的概念与计算 31
- 题型 2.6 利用导数确定单调区间
与极值 33
- 题型 2.7 求函数曲线的凹凸区间与
拐点 35
- 题型 2.8 求函数曲线的渐近线 37
- 题型 2.9 描绘函数的图形 39
- 题型 2.10 确定函数方程 $f(x) = 0$
的根 41
- 题型 2.11 确定导函数方程 $f'(x) = 0$
的根 42
- 题型 2.12 微分中值定理的综合
应用 44
- 题型 2.13 利用导数证明不等式 45
- 题型 2.14 导数在经济上的应用 48
- 本章总结 56

自测练习题 56

自测练习题答案或提示 59

第三章 一元函数积分学 61

- 题型 3.1 原函数与不定积分的概念 61
- 题型 3.2 定积分的基本概念与性质 65
- 题型 3.3 不定积分的计算 67
- 题型 3.4 定积分的计算 71
- 题型 3.5 变限积分 74
- 题型 3.6 定积分的证明题 82
- 题型 3.7 广义积分 87
- 题型 3.8 应用题 90
- 本章总结 97
- 自测练习题 97
- 自测练习题答案或提示 102

第四章 多元函数微分学 104

- 题型 4.1 二元函数的极限 104
- 题型 4.2 求复合函数的偏导数和
全微分 105
- 题型 4.3 求隐函数的偏导数和
全微分 111
- 题型 4.4 求多元函数的极值和最值 114
- 题型 4.5 解含有偏导数的方程 121
- 本章总结 122
- 自测练习题 122
- 自测练习题答案或提示 125

第五章 重积分 126

- 题型 5.1 与二重积分性质有关的
问题 126
- 题型 5.2 交换积分顺序或坐标系 127
- 题型 5.3 选择适当坐标系计算
二重积分 128
- 题型 5.4 利用积分区域的对称性和
被积函数的奇偶性计算 132

题型 5.5	分块积分	135
题型 5.6	无界区域上的二重积分	136
题型 5.7	解含有未知函数二重积分的 函数方程	137
本章总结		139
自测练习题		139
自测练习题答案		141

第六章	常微分方程	142
题型 6.1	一阶微分方程	142
题型 6.2	微分方程的应用	143
本章总结		145
自测练习题		145
自测练习题答案		147

第二部分

线性代数

第一章 行列式

题型 1.1	利用行列式的性质和按行(列) 展开定理计算行列式	151
题型 1.2	利用行列式和矩阵的运算性质 计算行列式	155
题型 1.3	利用秩、特征值和相似矩阵等 计算行列式	157
本章总结		159
自测练习题		159
自测练习题答案		160

第二章 矩阵

题型 2.1	有关逆矩阵的计算与 证明	161
题型 2.2	考查矩阵的乘法运算	165
题型 2.3	解矩阵方程	167
题型 2.4	与初等变换有关的 命题	170
题型 2.5	与伴随矩阵 A^* 有关的 命题	172
题型 2.6	矩阵秩的计算与证明	174
本章总结		177
自测练习题		177
自测练习题答案		179

第三章 向量

题型 3.1	向量的线性组合与线性 表示	180
题型 3.2	向量组的线性相关性	184
题型 3.3	求向量组的秩与矩阵的秩	190
本章总结		191
自测练习题		192
自测练习题答案或提示		193

第四章 线性方程组

题型 4.1	解的判定、性质和结构	194
题型 4.2	求齐次线性方程组的基础 解系、通解	197
题型 4.3	求非齐次线性方程组的 通解	200
题型 4.4	抽象方程组的求解问题	206
题型 4.5	有关基础解系的命题	208
题型 4.6	讨论两个方程组解之间 的关系(公共解、同解)	209
题型 4.7	与 $AB = 0$ 有关的命题	214
题型 4.8	线性方程组的综合应用	215
本章总结		217
自测练习题		217
自测练习题答案或提示		219

第五章 特征值与特征向量

题型 5.1	求数字矩阵的特征值和特征 向量	220
题型 5.2	求抽象矩阵的特征值	221
题型 5.3	特征值、特征向量的 逆问题	224
题型 5.4	相似矩阵的判定及其 逆问题	225
题型 5.5	可对角化的判定及其 逆问题	227
题型 5.6	实对称矩阵的性质	230
题型 5.7	特征值、特征向量的应用	235
本章总结		237
自测练习题		237
自测练习题答案或提示		239

第六章 二次型

题型 6.1	合同变换与合同矩阵	240
--------	-----------	-----

第三部分 概率论

第一章 随机事件与概率 243

- 题型 1.1 事件的关系与概率的基本性质 243
- 题型 1.2 古典概型与几何概型 246
- 题型 1.3 乘法公式、条件概率公式 247
- 题型 1.4 全概率公式、贝叶斯(Bayes)公式 249
- 题型 1.5 事件的独立性 251
- 题型 1.6 贝努利(Bernoulli) 概型 253
- 本章总结 254
- 自测练习题 255
- 自测练习题答案 256

第二章 随机变量及其分布 257

- 题型 2.1 概率分布的基本概念与性质 257
- 题型 2.2 求随机变量的分布律、分布函数 259
- 题型 2.3 利用常见分布计算相关事件的概率 262
- 题型 2.4 常见分布的逆问题 265
- 题型 2.5 随机变量函数的分布 266
- 本章总结 271
- 自测练习题 271
- 自测练习题答案 273

第三章 多维随机变量及其分布 274

- 题型 3.1 二维离散型随机变量的联合分布、边缘分布、条件分布 274
- 题型 3.2 二维连续随机变量的联合分布、

边缘分布、条件分布 276

- 题型 3.3 二维随机变量函数的分布 277
- 题型 3.4 随机变量的独立性与相关性 282
- 本章总结 284
- 自测练习题 284
- 自测练习题答案 286

第四章 随机变量的数字特征 288

- 题型 4.1 数学期望与方差的计算 288
- 题型 4.2 一维随机变量函数的数学期望与方差 294
- 题型 4.3 二维随机变量函数的数学期望与方差 295
- 题型 4.4 协方差与相关系数的计算 298
- 题型 4.5 随机变量的独立性与相关性 301
- 题型 4.6 应用题 303
- 题型 4.7 综合题 305
- 本章总结 313
- 自测练习题 313
- 自测练习题答案 315

第五章 大数定理与中心极限定理 317

- 题型 5.1 切比雪夫(Chebyshev)不等式 317
- 题型 5.2 中心极限定理 318
- 本章总结 320
- 自测练习题 320
- 自测练习题答案或提示 321

附 录

- 附录一 1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 322
- 附录二 1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 323
- 附录三 1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 325
- 附录四 1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 327
- 附录五 1991 年全国硕士研究生入学

- 统一考试数学四试题 329
- 附录六 1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 331
- 附录七 1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 333
- 附录八 1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 334
- 附录九 1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 336

附录十	1996 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	337	附录十六	2002 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	348
附录十一	1997 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	339	附录十七	2003 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	350
附录十二	1998 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	341	附录十八	2004 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	352
附录十三	1999 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	343	附录十九	2005 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	354
附录十四	2000 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	344	附录二十	2006 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	356
附录十五	2001 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	346	附录二十一	2007 年全国硕士研究生入学 统一考试数学四试题	359

PART ONE

第一部分

微 积 分

第一章 函数、极限、连续

考试内容与要求

考 试 内 容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数
基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立 数列极限与函数极限的定义及其性质
函数的左极限和右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较
极限的四则运算 极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

考 试 要 求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

题型 1.1 函数的概念及其特性

1. (90,3分)* 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是

- (A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

【答案】 应选(B).

【详解 1】 令 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \infty$.

因此 $f(x)$ 是无界函数,故应选(B).

【详解 2】 可用排除法.

由于 $f(-x) = -x \cdot \tan(-x) \cdot e^{\sin(-x)} = x \tan x e^{-\sin x} \neq f(x)$,
故 $f(x)$ 不是偶函数,显然 $f(x)$ 也不是周期函数.

* (90,3分) 表示该题为 1990 年考研数学四真题,其分值为 3 分. 全书同.

而 $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

故 $f(x)$ 也不是单调函数. 所以只有(B)项正确.

【评注】 本题主要考查函数的基本性质: 奇偶性、周期性、单调性、有界性.

2. (92, 3分) 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____ 的定义域为 _____.

【答案】 应填 $\arcsin(1 - x^2)$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

【分析】 由 $f(x)$ 可得 $f[\varphi(x)]$, 再由 $f[\varphi(x)]$ 表达式即可得 $\varphi(x)$.

【详解】 由 $f(x) = \sin x$, 得

$$f[\varphi(x)] = \sin \varphi(x) = 1 - x^2, \text{ 即 } \varphi(x) = \arcsin(1 - x^2),$$

其定义域为 $|1 - x^2| \leq 1$, 即 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

3. (04, 4分) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?

(A) $(-1, 0)$.

(B) $(0, 1)$.

(C) $(1, 2)$.

(D) $(2, 3)$.

【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 如 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

【详解】 当 $x \neq 0, 1, 2$ 时, $f(x)$ 连续, 而

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty,$$

所以, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界, 故选(A).

【评注】 一般地, 如函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界; 如函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有界.

小结

函数的概念及复合, 包括分段函数的复合, 本质上是函数关系的建立问题, 而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性, 奇偶性和周期性一般用定义检验; 单调性则大多用导数符号分析; 而有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2 极限概念与性质

1. (00, 3分) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零.

(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.

(D) 不一定存在.

【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 若不能得出肯定的结论时, 可举反例进行说明.

【详解】 若令 $\varphi(x) = 1 - e^{-|x|}$, $g(x) = 1 + e^{-|x|}$, $f(x) = 1$, 则有

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x), \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1.$$

可排除(A), (C) 两个选项.

又如 $\varphi(x) = e^x - e^{-|x|}$, $g(x) = e^{-|x|} + e^x$, $f(x) = e^x$, 显然 $\varphi(x), g(x), f(x)$ 满足题设条件, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

不存在,因此(B)也可排除,剩下(D)为正确选项.

【评注】 注意由 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ 并不能推出 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ 存在且相等.

2. (03, 4分, 数学一) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【 】

【答案】 应选(D).

【详解1】 本题考查极限概念, 极限值与数列前面有限项的大小无关, 可立即排除(A), (B); 而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 可能存在也可能不存在, 举反例说明即可; 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 属“ $1 \cdot \infty$ ”型, 必为无穷大量, 即不存在. 故应选(D).

【详解2】 用举反例法, 取 $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = 1$, $c_n = \frac{1}{2}n$ ($n = 1, 2, \dots$), 则可立即排除(A), (B), (C), 因此正确选项为(D).

【评注】 关于极限的存在性, 以下几点是值得注意的:

(1) 若 $\lim f$ 存在, $\lim g$ 不存在, 则 $\lim(f \pm g)$ 一定不存在, 但 $\lim(fg)$, $\lim \frac{f}{g}$ 可能存在, 也可能不存在;

(2) 若 $\lim f = l \neq 0$, $\lim g = \infty$, 则 $\lim fg = \infty$;

(3) 若 f 有界, $\lim g = \infty$, 则 $\lim[f \pm g] = \infty$, 但 $\lim fg$ 不一定为 ∞ .

3. (07, 4分) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 0.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} = 0$, 而 $\sin x + \cos x$ 有界, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = 0.$$

题型 1.3 函数极限的计算

I. 利用左右极限求函数极限

1. (87, 2分) (是非题) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$. 【 】

【答案】 应填“错”.

【分析】 利用左右极限进行讨论.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ 不正确.

2. (88, 2分) (是非题) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 均存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在. 【 】

【答案】 应填“错”.

【分析】 利用函数极限的运算性质可得.

【详解】 因为 $g(x) = \frac{f(x)g(x)}{f(x)}$, 故只有当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 均存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 才必存在.

反例: $\lim_{x \rightarrow 0} x$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ 均存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

3. (92, 3分, 数学一) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2. (B) 等于 0. (C) 为 ∞ . (D) 不存在, 但不为 ∞ . 【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 本题的关键是注意 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, 故有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty.$$

可见, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在且不为 ∞ .

【评注】 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^{\frac{1}{x-x_0}}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \arctan \frac{1}{x-x_0}$ 等均是极限不存在的情形, 遇此情形一般应通过左右极限进行讨论.

4. (00, 5分, 数学二) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

【分析】 本题函数关系式中含有绝对值, 本质上是一分段函数, 在分段点的极限应通过左右极限来讨论.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2}{1} - 1 = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$$

可见, 原式 = 1.

【评注】 形如 $|f(x)|$, $\max\{f(x), g(x)\}$ 的函数, 本质上是分段函数, 在求极限、导数和积分时一般均应分段讨论.

小结

在讨论分段函数极限时一般用结论 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 因此, 当左右极限 $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ 有一个不存在或都存在但不相等时, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

II. 求未定式 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0 \right)$ 的极限

1. (87, 4分) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan \frac{1}{x}}$.

【详解】 利用无穷小量的等价代换, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$, $\arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

2. (88, 4分) 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \tan \frac{\pi}{2} x$.

【详解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \frac{\sin \frac{\pi}{2}x}{\cos \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\cos \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x} = \frac{4}{\pi}.$

3. (89, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$

【分析】 本题为“ 1^∞ ”型未定式, 直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可.

【详解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x+e^x-1)^{\frac{1}{x+e^x-1}}]^{\frac{x+e^x-1}{x}} = e^2.$

【评注】 对于“ 1^∞ ”型极限 $\lim f(x)^{g(x)}$, 可按以下方法求解:

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)} = e^{\lim g(x) \ln[1+f(x)-1]} = e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$$

(当 $f(x) \rightarrow 1$ 时, $\ln[1+f(x)-1] \sim f(x)-1$).

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x+e^x-1]} = e^2.$

4. (91, 3 分) 下列各式中正确的是

(A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1.$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = -e.$

(D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e.$

【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 分别求四个极限即可. 注意它们所属的未定式极限类型.

【详解】 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &\stackrel{(\infty^0)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - \ln x}{\frac{1}{x}} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right\} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

故应选(A).

5. (91, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}.$

【分析】 本题属“ ∞^0 ”型未定式, 转化为指数函数后再用洛必达法则即可.

【详解】 原式可以化为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left\{ \frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right\}.$$

其中大括号内的极限是“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型不定式. 因此由洛必达法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

【评注】 对于“ 1^∞ ”型极限, 有 $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)} = e^{\lim g(x) \ln[1+f(x)-1]} = e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$ (当 $f(x) \rightarrow 1$ 时, $\ln[1+f(x)-1] \sim f(x)-1$). 对于“ ∞^0 ”, “ 0^0 ”型极限, 只能化为 $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$.

6. (92, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}$.

【分析】 利用洛必达法则求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\cos(x-1)}[-\sin(x-1)]}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\cos \frac{\pi}{2}x} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x} = -\frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

【评注】 本题也可令 $x-1=y$, 转化为 $y \rightarrow 0$ 时求极限, 计算过程更简单.

7. (94, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

【分析】 作变换 $x = \frac{1}{t}$, 再通分化为“ $\frac{0}{0}$ ”型极限利用洛必达法则求解.

【详解】 作变换 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

8. (97, 6 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right]$ ($a \neq 0$).

【分析】 通分后化为“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式, 再用洛必达法则求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - (1 - a^2 x^2) \ln(1+ax)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + 2a^2 x \ln(1+ax) - a(1-ax)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a^2 \ln(1+ax) + \frac{2a^3 x}{1+ax} + a^2}{2} = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

9. (00, 3 分) 若 $a > 0, b > 0$ 均为常数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} =$ _____.

【答案】 应填 $(ab)^{\frac{3}{2}}$.

【分析】 属于“ 1^∞ ”型未定式极限, 可用第二类重要极限或转化为指数函数进行计算.

$$\begin{aligned} \text{【详解 1】 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right]^{\frac{2}{a^x + b^x - 2} \cdot \frac{3}{2} \frac{a^x + b^x - 2}{x}} \\ &= e^{\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{x}} = e^{\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{1}} \\ &= e^{\frac{3}{2} \ln ab} = (ab)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{【详解 2】 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x} \ln \frac{a^x + b^x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(a^x + b^x) - 3 \ln 2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}}{1}} = e^{\frac{3}{2} \ln ab} = (ab)^{\frac{3}{2}}.$$