三角法演習指導

薛德炯編譯

上海新亞書店出版

目次

三角法
演習指導

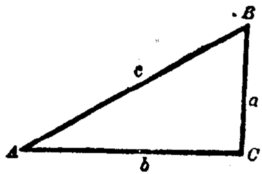
導言

本書的目的　算學是現代科學的基礎,基礎不固,勤輒顧此失彼,手足無措.所以初次學習,便須放出精神,脚踏實地,一步一步地前進.縱使萬難當前,亦須毫不畏怯,憑着勇氣,努力排除,以求豁然貫通.

初習算學者最易犯的毛病,是强記解式,這在從前印行的代數學演習指導,幾何學演習指導中已詳舉其弊勸告學者須時刻矯正,弗蹈前人覆轍,讀過此二書者,當能記憶.因爲學習算學自有合理的捷徑可循;所謂合理的捷徑無他,就是有系統有組織的學習法.凡事有了系統,則一切都有線索可尋;有了組織,則一切都有着落可找.縱有千頭萬緒,祇須系統不亂,組織合法,自然頭頭是道,迎刃而解.本書繼續上述二書之後,供學者演習三角法之參考,目的在提供有系統有

組織的算學學習法.期望學者讀此書後,於研習三角法時能循着系統,逐步發展,擴大組織,網羅算理.務使學習的基礎逐步穩固,興味叢生.如果能達到此種境地,對於一切,自毋庸苦思焦慮,必能驅遣如意,收觸類旁通之效.

三角法的學習法 直角三角形 ABC 中,設 BC 爲高,AC 爲底,AB 爲弦(斜邊),而分别標以 a, b, c. 將此三邊兩兩相比,則有以下六種:



$$\frac{BC}{AB}, \frac{AC}{AB}, \frac{BC}{AC}, \frac{AC}{BC}, \frac{AB}{AC}, \frac{AB}{BC}$$

亦即 $$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a} \quad \cdots\cdots (1)$$

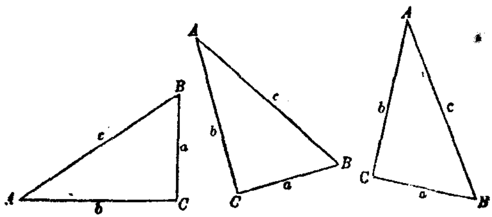
這六個比,一一命名,可分別叫做角 A 的正弦 (sine), 角 A 的餘弦 (cosine), 角 A 的正切 (tangent),……,等.再進一步用簡單的符號表示,則可寫作 $\sin A, \cos A, \tan A$,……,等.即

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin A = \dfrac{a}{c}, & \csc A = \dfrac{c}{a}, \\ \cos A = \dfrac{b}{c}, & \sec A = \dfrac{c}{b}, \\ \tan A = \dfrac{a}{b}, & \cot A = \dfrac{b}{a}. \end{array}} \quad \cdots\cdots (2)$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

這六個比總稱做三角函數,學者當已從教本上學到.三角法是從三角函數開始的,所以讀者須先將此六個三角函數完全記憶;並且記憶法須有意義.

所謂有意義的記憶法,譬如知了 $\frac{a}{c}$ 是 $\sin A$, 就知 $\sin A$ 是 $\frac{a}{c}$; 知了 $\frac{b}{c}$ 是 $\cos A$, 就知 $\cos A$ 是 $\frac{b}{c}$, 這是當然的.更進一步,須知直角三角形不論在如何的位置,其中總有二個銳角.就 $\angle A$ 言, a 是高, b 是底,但就 $\angle B$ 言, b 是高, a 就是底.那末, $\frac{a}{c}$ 就 $\angle A$ 言雖是 $\sin A$, 就



$\angle B$ 言,就是 $\cos B$ 了. $\frac{b}{c}$ 就 $\angle A$ 言雖是 $\cos A$, 就 $\angle B$ 言就是 $\sin B$ 了.對於記憶三角函數的定義,要能到此地步,纔是有意義的記憶.

如是把上面所述用式表示,則

$$\cos B=\frac{a}{c},\quad \sin A=\frac{a}{c}.$$

$$\therefore\quad \cos B=\sin A.$$

但　　　$A+B=90^\circ,\quad \therefore\quad B=90^\circ-A.$

將 B 的值代入上式,得

同理,可得

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(90^\circ-A)=\sin A,\\&\sin(90^\circ-A)=\cos A,\\&\tan(90^\circ-A)=\cot A,\\&\cot(90^\circ-A)=\tan A\end{aligned}}$$

等.這就是餘角的三角函數,爲讀者進一步應習的公式.

從再(1)式中六個比的相互關係來看,可知

$$\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}=1,\quad \frac{b}{c}\times\frac{c}{b}=1,\quad \frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將(2)式中的相當函數代入,則得

$$\boxed{\sin A\csc A=1,\ \cos A\sec A=1,\ \tan A\cot A=1.}\cdots\cdots(4)$$

因此又可得

$$\sin A=\frac{1}{\csc A},\quad \cos A=\frac{1}{\sec A},\quad \tan A=\frac{1}{\cot A}.$$

再看(1)式,且從代數學中所講分數式的變形,可知

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}},\quad \frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

也將(2)式中的相當函數代入,得

$$\boxed{\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\quad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

商高 ~~畢達哥拉斯氏~~定理是表直角三角形中邊的關係的重要定理,即

$$a^2+b^2=c^2.$$

應用此定理以表三角函數相互的關係,則以c^2, b^2, a^2分別除上式的兩邊,得

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1,\ \left(\frac{a}{b}\right)^2+1=\left(\frac{c}{b}\right)^2,\ 1+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdots\cdots(7)$$

仍將(2)式中的相當函數代入,得

$$\sin^2A+\cos^2A=1,\ \tan^2A+1=\sec^2A,\ 1+\cot^2A=\csc^2A.$$

爲便於記憶計,可如下排列:

$$\sin^2A+\cos^2A=1,\ 1+\tan^2A=\sec^2A,\ 1+\cot^2A=\csc^2A\cdots(8)$$

上述(3),(5)是代數學中的恆等式,(7)爲直角三角形中三邊之間必成立的恆等式.(4),(6),(8)是將相當三角函數代入(3),(5)(7)中而得的,這叫做三角恆等式.以此爲基礎,可以理解,可以習得更複雜的式的變形法.

等式有兩種,一爲恆等式,一爲方程式,這在代數學

演習指導導言中已曾詳述.三角法的等式當然不能例外,亦有恆等式,方程式兩種,其意義與在代數學中所學者沒有兩樣,讀者可翻閱前書,再加玩味.

三角法亦與代數學同,應留意體會如何可變形爲恆等式,如何可解方程式.一方面是進修解析幾何學,微積分學等學科的根本,一方面利用眞數表和對數表以解任何三角形,兼及測量等實際上的運用.明乎此,可知三角法是繼續着幾何學代數學而進修的算學之一分枝,而與代數學尤有密切的聯繫,不明代數學簡捷學不會三角法,讀者對於此點不可不有深切的認識.

本書所論,始終與代數學演習指導,幾何學演習指導二書所論者相表裏,相照應,還是整套的演習指導,前後務期一貫,以供讀者作系統的學習之參考.因爲幾何學,代數學,三角法等,都是算學的分枝,不是獨立的學科,隨在都有聯絡,有關係,讀者切不可偏廢.茲當學習三角法的開始,特再揭櫫三角法上最須注意的一大事項以促讀者的反省.

三角法的公式繁多是學習上最大的困難 三角法中的許多公式應該如何處分,是學習法中最要考究的所在,無論誰何不能否認.從來的著作家對於此點早已見及,且已相當盡力,只可惜僅將公式羅列一

處以供解題時之翻檢而止.對於公式的意義與適用,尚未見徹底的論究.

譬諸有百件事項,分爲十類,其間當然免不了有少數缺點,設有人斤斤於此,認爲不是乃重行區分,變爲二十類.結果仍不滿意,乃再行區分變爲五十類,……變爲百類,此種分法豈非滑天下之大稽.處分三角法中的公式,亦猶此理所以我們作系統的學習,切不可斤斤於一二小缺點便推翻全盤,須知人們的記憶力自有極限,分類寧少毋多,與其分了二十類而記不得,還不如就分十類.祇須在應用時能稍加思索,舉一反三,結果比了分爲二十類,只有過之,無不及哩.

記憶算學公式,本是一件枯燥無味的工作,加之爲數極多,若不從其意義上加些工夫,縱屬記得,都是一時的強記,難望維持永久.讀者宜於此點加意,從許多公式中,選擇解題上最重要的,正確地記好,同時研究其意義並如何可以適用之道,以解決學習上最大的困難.

第一編　式的變形

學習法　學習三角法的基礎,重在明瞭式的變形,導言已曾講到.現在分成八類,類各列為一章,隨在說明公式的意義及其適用法.本書於各例題之後,載有許多類似的問題.學者於演習之際,如一時得不到結果,切不可拘泥此題,而阻礙前進.不妨暫時標上一種記號,留作復習時的探討.如此則前所不能解者,事後每不假思索豁然貫通,學習算學到此境地,不知不覺地發生許多興趣,有裨於學習的成功者匪淺.

第一章　銳角的三角函數式的變形

公式

$$\left.\begin{aligned}&\sin A\ \csc A=1\cdots\cdots(1)\\&\cos A\ \sec A=1\cdots\cdots(2)\\&\tan A\ \cot A=1\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(A)$$

$$\left.\begin{aligned}&\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}\cdots\cdots\cdots(4)\\&\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}\cdots\cdots\cdots(5)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(B)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin^2A+\cos^2A=1\cdots(6)\\&1+\tan^2A=\sec^2A\cdots(7)\\&1+\cot^2A=\csc^2A\cdots(8)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(C)$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

意義與適用法 (A)之(1)表示$\sin A$與$\csc A$的積爲1, 依據代數學上所學得的等式變形法, 可將其變形而得$\csc A=\dfrac{1}{\sin A}$, $\sin A=\dfrac{1}{\csc A}$兩個等式. 其意義顯然是$\csc A$可用$\dfrac{1}{\sin A}$表示, $\sin A$可用$\dfrac{1}{\csc A}$表示. (2), (3)兩式也是這樣.

又公式(A)寧可變形爲

$$\csc A=\frac{1}{\sin A},\quad \sec A=\frac{1}{\cos A},\quad \cot A=\frac{1}{\tan A}.$$

遇到三角式中有$\csc A$, $\sec A$, $\cot A$, 卽用$\dfrac{1}{\sin A}$, $\dfrac{1}{\cos A}$, $\dfrac{1}{\tan A}$, 分別去替代,使變作單用$\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, 表示的式子式的變形上因此往往可以容易些.

記憶公式A的時候,須將上述的等式變形法同時理解而熟練. 這在理解三角恆等式變形法上是極切要的.

再看到公式(B)之(4)是表示$\tan A$可變形爲$\dfrac{\sin A}{\cos A}$, 同時亦表示$\dfrac{\sin A}{\cos A}$可變形爲$\tan A$. (5)亦是這樣.

三角式中遇到$\csc A$, $\sec A$, 可據(A)改用$\sin A$, $\cos A$的項表示, 遇到$\tan A$, $\cot A$可據(B)改用$\sin A$, $\cos A$的項表示, 如是則可得單含$\sin A$, $\cos A$的式子, 在式的變形上便利得多. 又(4), (5)兩式有時可變形爲$\tan A\cos A=\sin A$, $\cot A\sin A=\cos A$以適用.

(C)之(6)可用於將$\sin^2A+\cos^2A$變形爲1, 又可用於將1變形爲$\sin^2A+\cos^2A$; 且可變作$\sin^2A=1-\cos^2A$, $\cos^2A=1-\sin^2A$以適用. (7), (8)亦是這樣.

依據(A)或(B)將一式變作了單含$\sin A$, $\cos A$的項的式子,多可用公式(6)再行變形, 看了下列諸例便可理解. 至於公式(7)(8)的使用法也順次以例說明之.

例 1.　簡化 $(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin A)^2$.

本式單由 $\cos A$, $\sin A$ 的項組成.若設 $\cos A=a$, $\sin A=b$, 卽可如代數式 $(a+b)^2+(a-b)^2$ 而變其形.同時並須記着表示 $\cos A$, $\sin A$ 的關係的公式 (6).

解　$(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin A)^2$

$$=\cos^2 A+2\cos A\sin A+\sin^2 A+\cos^2 A-2\cos A\sin A+\sin^2 A$$

$$=2(\cos^2 A+\sin^2 A)=2.$$

問 1.　簡化 $(1+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta)^2$.

答: $3+2(\cos\theta+\sin\theta)$.

例 2.　試將 $\sin^4 A+\cos^4 A$ 變形為 $1-2\sin^2 A\cos^2 A$.

仿照代數學演習指導第15, 16頁例3, 例4的思索法以變形.同時並從上面八個公式中設法找出與 $\sin^4 A+\cos^4 A$ 有關的公式(6)而求解.

解　$\sin^4 A+\cos^4 A=\sin^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A-2\sin^2 A\cos^2 A$

$$=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A$$

$$=1-2\sin^2 A\cos^2 A.$$

【注意】　本例可用作次要公式.

問 2.　試將 $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$ 變形為 $1-4\sin^2\theta\cos^2\theta$.

$\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 具有 a^6+b^6 的形式,可仿上例分解其因數.

例 3. $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}$, 試簡化之.

上式僅含 $\sin\theta$ 項, 設認之為 a, 仿照代數式變形法直接通分卽可得 $\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}$. 在代數學上此種形式已是最簡, 但在三角法上, 根據公式 (6), $1-\sin^2\theta$ 尙可變形為 $\cos^2\theta$, 並且根據公式 (2), $\dfrac{1}{\cos\theta}$ 尙可變形為 $\sec^2\theta$, 如此纔是最簡.

解 $$\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta.$$

【注意】 $\sin\theta$ 是整個的符號, 決不可分作 sin 與 θ 兩部分, 看了以上諸例當能明辨,初學者對於此點應先加意.

問 3. 試將 $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}-\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}$ 變形為 $4\cot a\ \csc a$.

試仿上例演習. 但演至 $\dfrac{\cos a}{\sin^2 a}$ 時須顧到公式 $\dfrac{\cos a}{\sin a}=\cot a$, 及 $\dfrac{1}{\sin a}=\csc a$.

問 4. 簡化 $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}$.

仿上例,設 $\sin\theta=a$, $\cos\theta=b$, 則原式變成 $\dfrac{1+a-b}{1+a+b}+\dfrac{1+a+b}{1+a-b}$, 照代數分數式變形法,僅至變成 $\dfrac{2\{(1+a)^2+b^2\}}{(1+a+b)(1+a-b)}$ 而止. 但在三角法上, 還可更變簡單.

解　原式 $=\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}+\dfrac{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$

$$=\frac{(1+\sin\theta)^2-2(1+\sin\theta)\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$$

$$+\frac{(1+\sin\theta)^2+2(1+\sin\theta)\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2(1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$=\frac{2(2+2\sin\theta)}{2\sin\theta+2\sin^2\theta}=\frac{4(1+\sin\theta)}{2\sin\theta(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta.$$

【注意】 (1)的分子中 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ 可用1代入,分母的 $1-\cos^2\theta$ 可用 $\sin^2\theta$ 代入,此兩點須加體昧.

例 4.　簡化 $\sec^2\alpha+\csc^2\alpha$.

本例是含 $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ 的式子,可用公式 (A) 變形爲習用的函數,如以 $\sin\alpha$ $\cos\alpha$ 的項表示的式子,而再求簡化.

解　$\sec^2\alpha+\csc^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\sec^2\alpha\csc^2\alpha.$$

例 5.　簡化 $\tan\alpha+\cot\alpha$.

據公式 (B) 將原式變形爲單用 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ 的項表示的式子,導出類似以前各例的解法.

解 $$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}=\sec\alpha\csc\alpha.$$

問 5. 簡化 $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)$.

仿上例,將 $\tan A$, $\cot A$ 改用 $\sin A$, $\cos A$ 的項表示.

答: $\sec A+\csc A$.

問 6. 簡化 $(\csc A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A)$.

答: 1.

例 6. 試將 $(\tan A+\sec A)^2$ 用 $\sin A$ 的項表示.

先將 $\tan A$, $\sec A$ 化作習用的 $\sin A$, $\cos A$ 的項,然後再行轉化.

解 $$(\tan A+\sec A)^2=\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{1}{\cos A}\right)^2=\left(\frac{\sin A+1}{\cos A}\right)^2$$

$$=\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}=\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}$$

$$=\frac{(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)(1-\sin A)}=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}.$$

問 7. 試將 $(\csc A+\cot A)^2$ 用 $\cos A$ 的項表示.

答: $\frac{1+\cos A}{1-\cos A}$.

問 8. 試用 $\tan A$ 的項表 $\sin A$.

從公式中找出 $\sin A$, $\tan A$ 的關係式,即 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$, 把他化作 $\sin A=\tan A\cos A$. 然後再設法化 $\cos A$ 為 $\tan A$ 的項,因將公式

$\sec^2 A=1+\tan^2 A$ 化作 $\cos^2 A=\frac{1}{1+\tan^2 A}$, $\therefore\ \cos A=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$. 代入 $\sin A=\tan A\cos A$ 中,得 $\sin A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$, 即如題意.

例 7. 簡化 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$.

根據公式 (B) 雖亦可變形爲單含 $\sin A$, $\cos A$ 的項的式子而簡化,但亦可着眼於 $\tan\alpha$. $\tan\beta$ 與 $\cot\alpha$, $\cot\beta$ 分別互爲逆數,而利用之以簡化.本例即是範例.再在代數學分數變形法中

$$\frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab(a+b)}{a+b}=ab.$$

所以如能練習心算將分母通分,約去 $a+b$ 即得 ab, 藉此可以預知結果.初學代數者固然談不到這一層,到了學習三角法時就不妨努力於此,以養成運算實力.

解
$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}}$$
$$=\tan\alpha\tan\beta.$$

問 9. 簡化 $\frac{\cot\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha+\cot\beta}$. 　　答: $\cot\alpha\tan\beta$.

例 8. 簡化 $(1+\tan A)^2+(1-\tan A)^2$.

$\tan A$ 雖可將 $\frac{\sin A}{\cos A}$ 代入以簡化,若把 $\tan A$ 看作爲 a, 則各項平方之後可以推知有 $1+\tan^2 A$ 的項,因而依據公式 (C) 以 $\sec^2 A$ 代入而得簡化.

解 原式 $=1+2\tan A+\tan^2 A+1-2\tan A+\tan^2 A$
$$=2(1+\tan^2 A)=2\sec^2 A.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com