高中物理教学参考读物

曲线运动
万有引力

（修订本）

上海市物理学会
中学物理教学研究委员会编

上海教育出版社

高中物理教学参考讀物

曲线运动 万有引力

（修訂本）

上海市物理学会
中学物理教学研究委員会编

上海教育出版社

高中物理教学参考读物

曲线运动　万有引力

（修订本）

上　海　市　物　理　学　会
中学物理教学研究委员会编

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 2.625　字数 61,000
1957 年 5 月新知识第 1 版　1959 年 4 月新 1 版
1962 年12月新 2 版　1978 年 9 月第12次印刷
印数 309,531—359,530 本

统一书号：7150 490　　定价：0.21 元

目　　录

第一章 曲綫运动

我們以前已討論过匀速直綫运动与匀变速直綫运动。在前一种运动中加速度为零；在后一种运动中是有加速度的，加速度的方向或者与速度的方向相同（匀加速度运动），或者与速度的方向相反（匀减速度运动，也可以叫做匀加速度运动，但加速度的量値为負）。現在我們要进一步討論加速度的方向与速度的方向成一般角度的运动，合乎这种条件的运动的軌迹为一曲綫，所以这种运动叫做**曲綫运动**。圓周运动就是曲綫运动的一种。实际上直綫运动也是曲綫运动的一种特殊情况，所以曲綫运动包括了一般的运动，我們在以后所要討論的只限于在同一平面上的曲綫运动。

在討論曲綫运动的各种現象中，我們应用了以前已学过的关于牛頓运动定律、力的平衡和功能等的基本概念。通过曲綫运动的学习，我們也希望对于力学的知識能获得进一步的了解。

对于向心力和离心力的理解，一般同学是感到困难的。常有这样的錯誤看法，认为向心力与离心力大小相等，方向相反而作用互相抵消，因此作圓周运动的物体处于平衡状态；也有这样的誤解，认为汽車的車輪所以能向外飞濺泥水，是由于离心力作用的緣故。作匀速圓周运动的物体既然快慢不改变，那末为什么有加速度存在。为了要明确这些現象的根本原因所在，所以我們在这本小册子里，要用較多的篇幅来討論这些問題。在本书中也提到了慣性离心力的概念，目的是为了把慣性离心力和离心力作一对比，希望对离心力能获得透彻的理解。但关于慣

性离心力只作簡单的介紹，而不作深入的研討。

直綫运动与圓周运动是曲綫运动中的两种特殊情况。同时，这两种运动也是曲綫运动中的两种最簡单和最基本的形式。关于直綫运动，我們在以前已討論过。圓周运动所以是基本的，一方面因为了解圓周运动以后，就可以懂得对一般的曲綫运动应該怎样进行分析，所以研究圓周运动是研究一般曲綫运动的基础。另一方面，轉动体上的各质点都是繞軸作圓周运动，各质点的总合便是轉动体，因此研究圓周运动也是研究物体轉动的基础。对于圓周运动，我們分运动学与动力学两方面加以討論，希望讀者对这种运动能彻底了解。

抛体运动是日常接触到的一种曲綫运动，所以我們也作深入一步的討論。

1. 圓周运动速度的方向 如果质点运动的軌迹是圓周，那末这种运动叫做**圓周运动**。如果质点沿圓周运动时速度的大小不改变，那末这种运动叫做**匀速圓周运动**。作匀速圓周运动的质点，虽然它的速度的大小不变，但是方向是不是在改变呢？要回答这一問題，我們先要了解，质点經过圓周上任何一点时它的速度方向到底是怎样的？

在一光滑水平桌面的中央，釘一只釘子，釘子上結一条綫，綫的另一端拴一小球。先把綫拉直，然后在直綫的垂直方向对球施一冲量，使球得一水平速度。那末小球就以綫长为半徑而繞釘子作圓周运动。当小球經过 A 点时（图 1），如果綫忽然中断，由实驗的結果知道，小球是沿

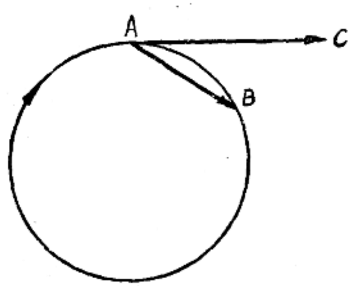

图 1

該点的切綫方向抛出而作直綫运动。我們知道，如物体不受外力，則根据牛頓第一运动定律，物体必作匀速直綫运动。小球所以被迫作圓周运动，是因为綫的拉力。現在綫断后，拉力既不存在，小球便沿切綫方向抛出，这正足以說明小球过A点时，速度的方向是沿該点的切綫方向。圓周上各点的切綫方向是不同的，所以匀速圓周运动的速度方向是不断改变的。

以上是根据实驗确定质点沿圓周运动各点速度的方向，現在根据理論再作进一步的說明。

当小球由A点沿圓周运动到B点的时候，經过的位移是$\overrightarrow{AB}$。設經过的时間为Δt，則根据速度的定义由A到B的平均速度为

$$\vec{v}_{平均}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}。\tag{1}$$

位移$\overrightarrow{AB}$是矢量，所以平均速度$\vec{v}_{平均}$也是矢量，平均速度的方向就是位移的方向。如果我們所考慮的一点B沿圓弧逐漸向A点移近，那末位移和平均速度的方向都在那里不断改变，当B无限接近A而以A为极限时，則AB弦便与AB弧重合，这时的平均速度就是A点的即时速度。但无限短的圓弧的方向就是該点的圓的切綫方向，所以A点的即时速度的方向就是过A点的圓的切綫方向。

2．匀速圓周运动的向心加速度 常有人这样誤会，当质点作匀速圓周运动时，它的快慢既然不改变，那就不应該有加速度存在。我們认为，这种錯誤的根源主要是由于对速度的方向性还不够了解的緣故。在决定匀速圓周运动加速度的大小和方向以前，为了要肯定这种运动是有加速度存在的，可以通过下面的問答：

(1) 矢量的意义是什么？矢量怎样合成？

应該回答：有些物理量不仅有大小，并且有方向的意义，这类物理量叫做矢量①。矢量的合成必須用平行四边形法则。

(2) 速度是不是矢量？

应該回答：速度既有大小，又有方向，所以它是矢量。

(3) 当质点作匀速圓周运动时，质点的速度是不是改变？

应該回答：速度的大小虽不改变，但是它的方向是不断在那里变化，所以速度也是不断在那里改变的。

(4) 加速度的意义是什么？既然质点的速度不断改变，那末是否有加速度存在？

应該回答：速度的变化跟发生这变化所用时間的比就是加速度，既然质点的速度不断变化，所以一定有加速度存在。

通过以上的問答，对作匀速圓周运动的质点存在加速度这一点，至少可以作定性的說明。以下可以进一步来决定加速度的大小和方向。

設一质点繞O作匀速圓周运动（图 2）。当經过P点时速度为 $\vec{v}_P$，今以 PA 表示。过Q点作 QC 平行且等于 PA，因此 QC 代表 $\vec{v}_P$，即自 P 点到 Q 点时如果速度不变所应有的大小和方向。但过Q点时的速度已不是 $\vec{v}_P$ 而是$\vec{v}_Q$，$\vec{v}_Q$ 以 QB 表示。质点由 P 到 Q，速度的大小虽然不变，而方

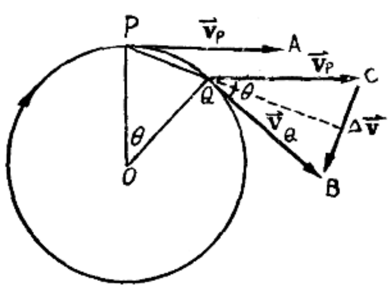

图 2 求向心加速度的图解

① 严格地讲，有大小和方向的量不一定是矢量，一个量是不是矢量，还要看它是不是遵守平行四边形的合成法則而定。例如电流有大小而且有方向，但它不遵守平行四边形的合成法則，所以电流不是矢量。

向却变了。现在我們要問，速度到底变了多少？关于这一問題，我們必須复习以前所叙述过的矢量合成法。

設一船在流水中航行，水流的速度 $\vec{v}_1$ 向东（图 3），此时船也以这速度航行。如果船有一附加的向南划速 $\vec{v}_2$，根据矢量的合成法，此时船的合速度是 $\vec{v}$。船的速度所以能自 $\vec{v}_1$ 变为 $\vec{v}$，是由于在 $\vec{v}_1$ 上另加一速度 $\vec{v}_2$ 的緣故。

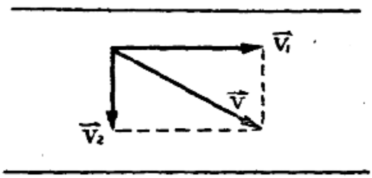

图 3

同理，如图 2 所示，$\vec{v}_P$ 所以能变成 $\vec{v}_Q$，是由于在 $\vec{v}_P$ 上另加一速度 $\Delta\vec{v}$ 的緣故。**$\Delta\vec{v}$ 是代表由 P 到 Q 經 Δt 时間所总共增加的速度。但必須注意，$\Delta\vec{v}$ 并不是加速度，因为加速度是指单位时間內速度的变化**①。同时还得注意，速度变化 $\Delta\vec{v}$ 不是由于速度大小的改变，而是由于速度方向的改变。

质点由 P 运动到 Q 的平均加速度設为 $\vec{a}_{平均}$

$$\vec{a}_{平均}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}。\tag{2}$$

因 QC 垂直于 OP，QB 垂直于 OQ，故 $\angle BQC=\angle POQ=\theta$。

---

① 在有些物理书上，速度和加速度有两种不同的定义：变速运动在路程任一点上的速度定义为在該点附近所取的路程小段对相应的时間之比当这一段时間趋于零时的极限。速度的方向和切綫方向一致。把这一定义改用数学語言来表示，就可以写出：

$$u=\underset{\Delta t\to 0}{极限}\frac{\Delta S}{\Delta t}，或 u=\frac{ds}{dt}。$$

可以把速度定义写得簡短些：速度是单位时間內通过的路程。

又因速度大小不变，一直是 v，故 $QB=QC=v$，$OP=OQ=$圆半径 r，故三角形 BQC 与三角形 QOP 相似。

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{PQ}{r},\qquad \Delta v=\frac{v}{r}\cdot PQ,$$

$$a_{平均}=\frac{\Delta v}{vt}=\frac{v}{r}\cdot\frac{PQ}{\Delta t}。\tag{3}$$

如果 Q 点趋近于 P 点而以 P 为极限，Δt 也趋近于零而以零为极限，则

$$\underset{\Delta t\to 0}{极限}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a_P①。\tag{4}$$

当 Δt 趋近于零的时候，Δv 也趋近于零，因此分子分母都是无限小。但是无限小与无限小仍可比較，它的商可以从零一直到无限大，在現在的圓周运动的实例中，則为一确定的常数，这常数依速度的大小和半徑的长度而决定。

a_P 即质点經过 P 点时的即时加速度。以(3)式代入(4)式，且$\frac{v}{r}$为常值，可以移到极限之前，得：

$$a_P=\underset{\Delta t\to 0}{极限}\frac{v}{r}\cdot\frac{PQ}{\Delta t}=\frac{v}{r}\underset{\Delta t\to 0}{极限}\frac{PQ}{\Delta t},\tag{4'}$$

由图(2)，PQ 弦<PQ 弧，但当 Q 与 P 无限接近时，則两者可以认为相等，又因 PQ 弧$=v\cdot\Delta t$，故

$$\underset{\Delta t\to 0}{极限}\frac{PQ}{\Delta t}=v。\tag{5}$$

由式(5)与式(4')得

$$a_P=\frac{v^2}{r}。\tag{6}$$

① 設 x 为变数，a 为常数，当差值 $a-x$ 小于任何指定的很小很小的正数值时，則 x 趋近于 a 而以 a 为极限。

在三角形 QCB 中，$\angle\theta+2\angle QCB=180°$，当 Q 点趋近于 P 而以 P 为极限，则 θ 以零值为极限，而 $\angle QCB$ 则以 $90°$ 为极限，故 $\Delta\vec{v}$ 的方向在极限时是沿 PO 方向而指向圓心，这方向也是 P 点的即时加速度的方向，因此称这加速度为**向心加速度**。与軌道成垂直的方向叫做法向，所以在軌道为圓周的特殊情况下向心加速度也叫做**法向加速度**。向心加速度的大小与速度的大小的平方成正比，而与圓半徑的大小成反比。

质点过 P 点的即时加速度 $\vec{a}_P$ 与由 P 到 Q 的平均加速度 $\vec{a}_{平均}$ 是有区别的。$\vec{a}_{平均}$ 的方向垂直于 PQ①，所以它的方向因 Q 的位置而变。$a_{平均}$ 的数值，小于 a_P（因 PQ 弦小于 PQ 弧），且沒有确定的值，要看所取的那一段位移 PQ 或那一段时間 Δt 而决定。所以我們必須指出某一段位移或某一段时間的平均加速度。但某一点（例如 P 点）的即时加速度既有确定的方向且有确定的量值，所以我們必須指出某一时刻或某一点的即时加速度。这与平均速度和即时速度有类似的区别。

在变速直綫运动中，加速度能使速度的大小改变。但在圓周运动中，向心加速度的方向与速度的方向垂直，它只能改变速度的方向，而不能改变速度的大小。

$$a\ 的单位=\frac{(v\ 的单位)^2}{r\ 的单位}=\frac{(1\ 厘米/秒)^2}{1\ 厘米}=1\ 厘米/秒^2。$$

如用米·公斤·秒制，则由同法可得 a 的单位为 1 米/秒^2。

质点作匀速圓周运动时，速度的大小虽不变，但方向是随时变化的。所以匀速圓周运动不是等速度运动，所謂匀速只是指它的速度的大小不变而已。

我們一般还能注意速度的矢量性，但容易忽略加速度的矢

① 因两三角形 OPQ 与 QCB 相似，且已有两边互相垂直，则第三边也必互相垂直。

量性。在运动学中已讲过，矢量乘以标量或除以标量所得的积或商仍是矢量。$\Delta\vec{v}$ 是矢量，而 Δt 是标量，$\Delta\vec{v}$ 除以 Δt 所得的商的极限值仍是矢量，所以即时加速度（或簡称加速度）也是矢量。在匀速圓周运动中，不論质点在圓周上运动到什么位置，加速度的方向总是指向圓心，加速度的方向是隨时改变，所以加速度的大小虽然始終等于$\frac{v^2}{r}$，但是因为它的方向一直在变化，**所以匀速圓周运动既不是等速度运动也不是等加速度运动。**

3. 向心力　离心力　在上一节中，我們已經由运动学方面来研究匀速圓周运动的向心加速度，現在要从动力学方面来研究力的問題。作匀速圓周运动的质点（或物体）既然存在加速度，根据牛頓第二运动定律，力是产生加速度的原因，所以一定有力作用在这质点上。因为加速度是和力的方向一致，加速度既然是指向圓心，力也一定是指向圓心，所以这力叫做**向心力**。向心力只改变速度的方向而不改变速度的大小。又根据公式 $F=ma$，

$$向心力F=ma=m\cdot\frac{v^2}{r}。\qquad(7)$$

向心力的大小与速度的大小的平方成正比，与圓半徑的大小成反比而与作圓周运动质点的质量的大小成正比。

在厘米·克·秒制中，向心力的单位是达因，在米·公斤·秒制中是牛頓。

我們再应用小球在光滑水平面上的轉动（具体装置已詳第一节）来說明向心力的概念。現在提出这样几个問題：小球受到几个力的作用？它为什么能做圓周运动？

小球这时受到四个力：即重力，桌面对小球向上的彈力，绳对小球的拉力（也是彈力）以及向心力（其余空气的阻力和浮力等可以忽略不計）。这样回答，同学可以考虑是否正确。

球在竖直方向上沒有加速度，所以重力和桌面的彈力是互相抵消的；对于小球的圓周运动不起作用。小球被迫不断改变运动的方向而作圓周运动，是由于向心力作用的結果，这时綫的拉力卽作为向心力。也可以这样說：这时綫的拉力就是向心力。所以我們不应該說：小球受綫指向中心的拉力以外还受到一个向心力。在动力学中已讲过万有引力、彈力和摩擦力。我們不应誤会向心力是上述三种力以外的一种力，而构成所謂另一类力。实际上，在力学范圍內，万有引力、彈力和摩擦力在某种情况下，都可以作为向心力。“向心”两字不过表示这三种类型的力所发生的效果（改变运动的方向），并非表示向心力有什么不同的本性。

向心力是作用在作圓周运动的那个物体（或质点）上，根据牛頓第三运动定律，一定有一反作用力存在，这力叫做**离心力**。离心力是作用于迫使运动的物体改变方向的另一个关联物体上、而不是作用在运动物体本身上①。向心力与离心力大小相等，方向相反，且同时存在，同时消失。但必須注意它們不是作用于同一个物体上。当小球作圓周运动时，綫迫使小球改变运动方向，所以綫拉球的力是向心力，球拉綫的力就是离心力，方向是沿半徑而背离圓心。向心力是綫作用于球，而离心力則是球作用于綫。如果把它們画成力图，則如图 4b 所示。球和綫画得不相連接是为了作图的方便起見，实际上是相連的。向心力和离心力分别用 F 和 F′ 表示，則 $F=-F'$，

$$F=m\frac{v^2}{r}, \qquad F'=-m\frac{v^2}{r}。$$

离心力和向心力的单位是完全相同的。

---

① 这是我們在慣性系統中所見到的現象，在加速度系統中所見到的則又不是如此。关于加速度系統以后再討論。

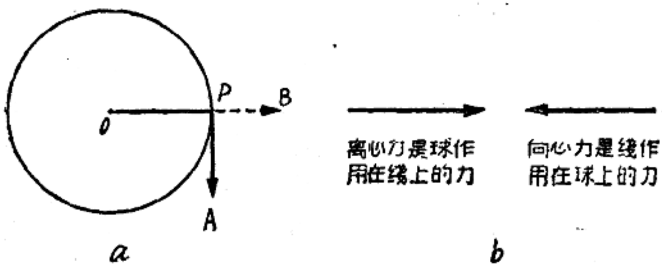

图 4

当小球轉动时，如果綫忽然中断，那末綫的拉力消失，也就是說，迫使小球作圓周运动的向心力已不存在，則根据牛頓第一运动定律，小球必沿切綫方向抛出，而作匀速直綫运动。这时小球离开圓心愈去愈远，所以我們平时总是这样說，小球离心抛出。但必須指出，如图 4a 所示，当綫断后，小球是沿切綫 PA 方向抛出逐漸离开圓心，而不是沿 OB 方向抛出。

有人认为小球的离心抛出是由于离心力的作用，这是不正确的。当綫断后，这时小球所受合力等于零而处于平衡状态中，所以小球保持在綫断那一时刻的速度方向而运动，也就是說，沿切綫方向而运动。这种运动是由于慣性的关系，絕对不是因离心力的作用。离心力根本沒有作用到这个小球上，它是球作用于綫上的力，球的所以抛出与离心力沒有絲毫的关系，所以物体的离心抛出不能用离心力来解釋。

总括以上所述，可以得到一个結論：**由牛頓第二定律所指出的，向心力使小球作加速度运动。由牛頓第三定律指出，小球有一反作用力（即离心力）作用于綫上。綫断后，則由牛頓第一定律指出，小球因慣性而作匀速直綫运动。**

我們再举几个例来說明关于向心力与离心力的概念。地球繞太阳的运动，可以近似的认为是圓周运动。和以前一样，我們

不应該說地球旣受到太阳的引力（其他星体对地球的引力可以忽略不計)作用，又受到一个向心力作用。实际上，太阳对地球的引力就是迫使地球繞太阳作圓周运动所需的向心力。我們設想，如果太阳一旦对地球停止引力的作用，那末地球旣失去了迫使它改变运动方向的向心力，它就要沿地球公轉的軌道的切綫方向飞出。又設想，如果地球停止运动，那就不需要向心力来改变它运动的方向，因此太阳对地球的引力就可以把地球拉向太阳而和太阳相撞，到那时地球的情况就不堪想象了。有人就要提出这样的一个問題：那末現在引力为什么不能把地球吸引到太阳上去呢？地球是运动得很快的，并且运动的方向不是指向太阳，而是和太阳与地球的連綫相垂直，正是因为有这种运动，所以地球才不会被太阳吸引上去①。我們知道，使物体速度的大小改变需要有力作用，另一方面，使物体速度的方向改变也需要有力(向心力)作用。太阳对地球的引力恰足以使地球速度的方向不断改变，也就是說，**引力恰等于地球作圓周运动所需的向心力，事实上没有余力再把地球拉向太阳自己而和太阳相碰。**地球赤道上空支持一物体，如果失去了支持，那时就和地球繞太阳轉动的情况不同了。事实上只需引力的一部分迫使物体随地球自轉而作圓周运动，而另一部分引力能使物体逐漸靠近地心而落于地面。

太阳作用于地球的力是向心力，而地球作用于太阳的力就是离心力。

当汽車車輪轉得較慢时，則輪边的水点随車輪而轉动，这时利用水点本身的內聚力作为向心力。如果速度加快，則所需向心力加大，这时內聚力不再能迫使水点的速度方向改变，因而水点就向切綫方向飞出。

---

① 实际上不一定要垂直，只要与連綫成一角度时就不致被太阳吸上去了。

一个做匀速圆周运动的质点，当它的速度增加到2、3、4……倍时，向心力必須增加到4、9、16……倍。所以轉动的物体(象飞輪等)在轉动速度超过一定限度的时候，就能发生破裂的危险。飞輪內部有互相联系的力，当轉动体在这个极限速度的时候，向心力就是物体內部互相联系最大的力。如果轉动速度超过了它的限度，这时物体本身互相联系最大的力，已小于质点所需要的向心力，也就是說，不可能有这样大的力来改变质点运动的方向，于是物体的某些部分就沿切綫方向飞出。

离心干燥器是由一个壁上打了許多孔的圓柱状容器而制成(图5)。把潮的物体(例如衣服)装到圓柱容器內，然后把容器急速旋轉。由于水的內聚力有限，当达到一定速度时，水分就从容器壁的孔中飞出来。因此潮的物体很快就干燥。应用这一原理也可以从蜂巢中把蜂蜜分离出来。


图5 离心干燥器

例題 放在地球表面上的大炮，沿水平方向发出一个炮彈，假設要使炮彈永不落到地面上来，問炮彈的初速度最小应該是多少?

解 向水平方向投射的炮彈，如果要使它不落地，那末必須使它以地球的半徑R为半徑做圓周运动。在这种情况下，重量恰等于炮彈作圓周运动的向心力。

$$\frac{mv^2}{R}=mg, \qquad v=\sqrt{gR}。$$

取地球半徑为6400公里，$g=9.8$米/秒^2，

$$v=\sqrt{64\times10^5\times9.8\text{米}^2/\text{秒}^2}=7.9(\text{公里/秒})。$$

答：要使发射出去的炮彈不落回地面，它的初速度最小应該是7.9公里/秒。

4. 作匀速圓周运动的物体是不是处于平衡状态 当物体

不受到外力时，根据牛頓第一运动定律，物体必保持靜止或匀速直綫运动状态。事实上，物体不能不受到外力。在地面上的物体，无論如何必然受到重力的作用。所謂不受外力，是指物体虽受到各种外力，而作用在物体上所有的外力的合力等于零。也就是說，作用在物体上的外力都互相抵消。当物体作匀速圓周运动时，它的快慢虽然不变，但是因为速度方向不断在变化，所以有加速度，也就是說，物体是在不平衡状态中。

但根据力来討論，可能有人要誤会：离心力和向心力既是大小相等，并且方向又相反，这恰好是两力的作用互相抵消，作匀速圓周运动的物体是在不受到外力的情况下，所以物体是在平衡状态中。产生这样誤解的原因，主要是由于对牛頓第三运动定律还不够了解的緣故。我們以前已讲过，当小球作匀速圓周运动时，向心力是绳作用在小球上的力，而离心力则是小球作用在绳上的力。向心力与离心力不是作用于同一物体而是作用在两个不同物体上。两力的互相平衡，必須是两力大小相等，方向相反，在同一作用綫上，**并且两力必須作用于同一物体**。向心力与离心力既不作用于同一物体上，所以向心力与离心力决不能互相平衡。在小球作匀速圓周运动的实例中，千万不能誤解为离心力不是作用于绳而是作用于小球上。我們知道，力不能脱离物体而存在，如果离心力是作用于小球上，那末試問离心力的施力者是什么？地球繞太阳作圓周运动时，如果认为离心力作用于地球上，那末施力者又是什么呢？这是不可以理解的。所以作匀速直綫运动的物体是在平衡状态中，而作匀速圓周运动的物体则在不平衡状态中。

5　角位移　角速度　角加速度　我們在运动学中已叙述过平动（可以当做质点来处理）的位移、速度和加速度的意义。現在要討論轉动中的角位移、角速度与角加速度的意义了。