

高級中學課本

# 代 數

第 二 冊

高級中學代數 第二冊

書號：2851

編譯者：前東北人民政府教育部

北京市書刊出版業營業  
許可證出字第 二 號

校訂者：人民教育出版社

原出版者：

北京景山東街

重印者：湖北人民出版社

發行者：新華書店

印刷者：（見正文最後頁）

---

開本：787×1092 1/32	1952年1月東北人民出版社原版
印張：5	1954年3月新 一 版
字數：104千	1956年1月新 四 版
定價(2)二角七分	1956年5月新四版第二次印刷 武漢30,001—68,000冊

# 目

目次

第四章 不等式	1
I 一次不等式	1
63. 引言	1
64. 不等式的基本性質	1
65. 關於不等式的問題	2
66. 同解不等式	3
67. 定理 1.	3
68. 定理 2.	4
69. 定理 3.	6
70. 不等式的證法	7
71. 一元一次不等式的解法	8
72. 一元一次聯立不等式	8
第五章 級數	10
I 等差級數	10
73. 問題	10
74. 定義	10
75. 等差級數任意項的公式	11
76. 等差級數各項和的公式	12
77. 注意	15
78. 自然數平方和的公式	16
II 等比級數	18
79. 問題	18
80. 定義	19
81. 等差級數與等比級數的比較	20
82. 等比級數的任意項公式	21
83. 等比級數各項和的公式	22

84. 等比級數的例題	24
III 無窮級數	25
85. 無窮級數的幾個性質	25
86. 關於極限的概念	28
87. 無窮遞降等比級數和的公式	29
88. 應用無窮等比級數化循環小數為分數	30
第六章 關於指數的一般概念	33
I 整指數	33
89. 正整指數的性質	33
90. 零指數	34
91. 負整指數	34
92. 負指數幕的運算	35
II 分指數	37
93. 分指數的意義	37
94. 分指數的基本性質	38
95. 分指數幕的運算	38
96. 分指數與負指數的運算舉例	39
III 關於無理指數的概念	40
97. 無理指數幕的意義	40
IV 指數函數	42
98. 定義	42
99. 指數函數的性質	42
100. 指數函數的圖象	45
第七章 對數	48
I 對數的一般性質	48
101. 乘方的兩種逆運算	48
102. 定義	49
103. 對數函數及其圖象	50
104. 對數的基本性質	52

105. 對數表的實際意義	55
106. 乘積、商數、乘方、方根的對數	56
107. 取代數式的對數	58
108. 注意	59
II 十進對數的性質	60
109. 十進對數的性質	60
110. 推論	64
III 表的結構及使用	65
111. 對數的體系	65
112. 負對數的變形	66
113. 四位對數表的說明及其使用法	66
114. 補插法	68
115. 反對數表	70
116. 關於補插法的注意	71
117. 含有負首數的對數之運算	71
118. 變對數減法爲加法	73
119. 藉助於對數計算的舉例	73
120. 五位對數表的應用	77
IV 指數方程與對數方程	78
121. 方程的例題	78
122. 複利公式	79

## 習 題 目 錄

第七章 數列	83
§ 31. 數列的概念。算術級數	83
§ 32. 幾何級數	92
§ 33. 數列之極限	97
§ 34. 遞降無窮幾何級數	102

第八章 乘方指數概念的推廣 .....	105
§ 35. 負指數與零指數 .....	105
§ 36. 以分指數表乘冪與根式 .....	109
第九章 對數 .....	114
§ 37. 對數的基本性質 .....	114
§ 38. 求對數與求指數 .....	120
§ 39. 常用對數 .....	124
§ 40. 指數方程與對數方程 .....	131
§ 41. 複利息 .....	135
第十章 高中二年級復習題 .....	136
習題答案 .....	151

本書是根據蘇聯七年制中學及十年制中學  
8—10年級代數教科書編譯的。原書為蘇聯吉  
西略夫(А. П. КИСЕЛЁВ)所著, 1949年, 莫斯科  
出版。

## 第四章 不等式

### I 一次不等式

**63. 引言** 在比較兩數的大小時，我們常用‘大於’和‘小於’的說法(參照初中代數 § 24)，這兩種說法所代表的意義是：若  $a$  大於  $b$  ( $a > b$ )，則  $a - b$  的差是正數；若  $a$  小於  $b$  ( $a < b$ )，則  $a - b$  的差是負數。

**64. 不等式的基本性質** 兩數或兩代數式之間，用不等號  $>$  或  $<$  聯結起來所組成的式子叫做不等式。不等式被不等號分為兩部分，即左邊和右邊。

以文字  $a$  和  $b$  分別代表不等式的左邊和右邊，則不等式的基本性質如下：

1) 若  $a > b$ ，則  $b < a$ ；例如： $-2 > -3$ ， $-3 < -2$ 。

2) 若  $a > b$  和  $b > c$ ，則  $a > c$ ；例如： $-2 > -3$  和  $-3 > -4$ ，此時  $-2 > -4$ 。

3) 若  $a > b$  和  $c = d$ ，則  $a + c > b + d$  和  $a - c > b - d$ ；即不等的兩個數同時加上或減去相等的數，不等號不變(即大數仍大)；例如： $2 > -3$ ；兩邊加上或減去  $-10$ ，可得：

$$2 + (-10) > -3 + (-10), \text{ 即 } -8 > -13;$$

$$2 - (-10) > -3 - (-10), \text{ 即 } 12 > 7.$$

4) 若  $a > b$  和  $c > d$ ，則  $a + c > b + d$ ；

同樣，若  $a < b$  和  $c < d$ ，則  $a + c < b + d$ 。

例如，有二不等式： $-7 > -10$  和  $-3 > -4$ ，相加可得  $-10$

$> -14$ .

若  $2 < 8$  和  $-4 < -2$ , 相加可得  $-2 < 6$ .

5) 若  $a > b$ , 而  $c < d$ , 則  $a - c > b - d$ ; 若  $a < b$ , 而  $c > d$ , 則  $a - c < b - d$ .

例如:

$$\begin{array}{r} - \left\{ \begin{array}{l} -8 > -10 \\ 2 < 3 \end{array} \right. \\ \hline -10 > -13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} - \left\{ \begin{array}{l} 7 < 12 \\ 8 > -2 \end{array} \right. \\ \hline -1 < 14 \end{array}$$

如果二不等式中的不等號相同, 或同為  $>$  或同為  $<$ , 則此二不等式是同向不等式; 如果二不等式中的不等號相反, 一式為  $>$  而他式為  $<$ , 則此二不等式是異向不等式. 由此, 第四和第五性質又可敘述如下:

同向的二不等式, 可以相加, 而不等號不變; 異向的二不等式可以相減, 所得式的不等號, 與被減式的不等號相同.

6) 若  $a > b$ , 且  $m$  為正數, 則  $am > bm$ ;  $a \div m > b \div m$ .

不等式兩邊用同一正數去乘或除, 不等號不變.

例如, 以  $+4$  乘不等式  $-5 > -7$  的兩邊, 則得不等式  $-20 > -28$ ; 以  $+4$  除不等式  $-5 > -7$  的兩邊, 則得不等式  $-\frac{5}{4} > -\frac{7}{4}$ .

7) 若  $a > b$ , 且  $m$  為負數, 則  $am < bm$ ;  $a \div m < b \div m$ .

不等式的兩邊用同一負數去乘或除不等號變為反向.

例如, 用  $-1$  乘不等式  $-5 > -7$  的兩邊, 則得不等式  $5 < 7$ .

65. 關於不等式的問題 關於含有文字不等式的問題(如同等式一樣), 可分為以下兩類:



1) 解含有未知數的不等式，也就是求出未知數在怎樣的數值條件下能滿足於這不等式。

2) 證明不等式的成立，即在式中文字的一切可能數值範圍內，最低限度要在題設文字所代表的數值範圍內，來證明不等式的正確性。

解這兩類問題，須根據不等式的幾種性質，這與解方程時須根據方程的性質相同。

**66. 同解不等式** 若兩個不等式含有同一未知數，且能滿足於其中一個不等式的未知數之所有數值也必滿足於他一個不等式時，這樣的兩個不等式，叫做同解不等式，例如  $3x + 2 < x + 10$  和  $3x < x + 8$  就是同解不等式，因為以小於 4 的任何數值代替  $x$ ，兩個不等式都正確，而除此以外，兩式各自也沒有其他的解。

現在證明一些關於同解不等式的定理，這些定理和同解方程的同類定理極相似。

**67. 定理 1.** 若在不等式(含有未知數的)的兩邊加上(或減去)相同的數，則得一與其同解的不等式。

設含有未知數的不等式的左邊為  $A$ ，右邊為  $B$ ，又  $m$  為任意一數；現在來證明下列二式為同解不等式：

$$A > B, \quad (1)$$

$$A + m > B + m. \quad (2)$$

假設當不等式 (1) 中的文字取某些數值時成立，也就是取這些數值中的任一個代替不等式 (1) 中的文字，則數值  $A$  大於數值  $B$ ；但此時，根據 § 64 基本性質 3)，當式中文字取上述數值中的

任一個時，都能得到數值  $A+m$  的和的大於數值  $B+m$  的和，因為在不等式的兩邊，同時加上相等的數，其不等號不變。這也就是說，不等式 (1) 的所有解都滿足不等式 (2)。

反之，如果當式中文字取某些數值中的任一個時，數值  $A+m$  的和的大於數值  $B+m$  的和，則當式中文字取這些數值中的任一個時，數值  $A$  大於數值  $B$  (在不等式的兩邊同時都加上  $-m$ ，其不等號不變)；所以不等式 (2) 的所有的解都滿足於不等式 (1)。也就是這兩個不等式同解。

因為減法可以看作正負相反的數的加法，所以不等式的兩邊，各減同一數時，則得一與其同解的不等式。

推論：不等式內的任意一項，可由不等式的一邊移到另一邊，但須改變該項的符號。

例如，在不等式  $A > B + C$  的兩邊，各加  $-C$ ，即得  $A - C > B$ 。

**68. 定理 2.** 若將不等式 (含有未知數) 的兩邊用同一正數去乘 (或除)，則得一與其同解的不等式。

現在證明下列二式為同解不等式：

$$A > B, \quad (1)$$

$$Am > Bm, \quad (2)$$

式中  $m$  僅為正數。

假設，當式中各未知數取某組數值時，數值  $A$  大於數值  $B$ ；則當式中各未知數仍取這組數值時，必能得到數值乘積  $Am$  大於數值乘積  $Bm$ ，因為不等式的兩邊，用同一正數去乘時，其不等號不變。也就是，不等式 (1) 的所有解都滿足於不等式 (2)。

反之，如果當式中各文字取某組數值時，數值  $A$  大於數值  $B$ ，則當式中各文字仍取這些數值時，必能得到數值  $A$  大於數值  $B$ ，因為不等式的兩邊用同一正數去除時，其不等號不變。

〔注意〕 根據以上的證明，允許用來乘或除不等式兩邊（使其不等號不變）的正數，其形式可為文字式，並且其中也可以含有該不等式中含有的未知數。但此時須特別注意，我們用來乘或除不等式兩邊的文字式，當其中文字取其所有的數值時，都必須為正數。

例如，用  $(x-5)^2$  乘不等式  $A > B$  的兩邊；

$$A > B. \quad (1)$$

$$A(x-5)^2 > B(x-5)^2. \quad (2)$$

因式  $(x-5)^2$ ，除去  $x=5$  以外，代入  $x$  的任何數值皆為正數。也就是，如果不等式 (1) 的解內不含有  $x=5$  時，則不等式 (1) 與 (2) 同解；反之，不等式 (2) 的所有解雖然都滿足不等式 (1)，但在不等式 (1) 的解內較不等式 (2) 的解多了一個解  $x=5$ （這個解不滿足不等式 (2)，否則此時不等式 (2) 就變成等式）。

推論：若在不等式的兩邊，各含有一正量公因式時，則可用此因式除不等式的兩邊。

例如，不等式  $(x-5)^2(x-1) > (x-5)^2(3-x)$  的兩邊有公因式  $(x-5)^2$ 。此因式當  $x=5$  時為 0，而當  $x$  取其餘所有數值時則所得皆為正數。 $x=5$  不滿足於已知不等式。為了求出  $x$  另一些滿足於不等式的數值，我們可用正數  $(x-5)^2$  來除不等式

的兩邊，除後得  $w-1 > 3-w$ 。滿足於所得不等式的  $w$  的所有數值，除去  $w=5$  外都滿足於已知不等式。

**69. 定理 3.** 若不等式(含未知數)的兩邊，用同一負數去乘(或除)，同時使其不等號變向，則得一與其同解的不等式。

此定理的證法，與定理 2 的證法相同，但須注意到，用同一負數去乘或除不等式的兩邊時，不等號要變向。

在定理 2 的注意中所作的解釋可適用於此定理。

**推論：** 1) 如把不等式中每項的符號變號(即兩邊都用  $-1$  乘)，則不等號變向。

2) 不得在不等式的兩邊，用不知是正或負的代數式去乘。

3) 含有分式項的不等式，可化為整式不等式。例如不等式。

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}. \quad (1)$$

把各項都移至左邊，然後實行通分：

$$\frac{AD-BC}{BD} > 0. \quad (2)$$

如果  $BD$  是正數，我們可以把  $BD$  去掉，而不等號仍然不變。因為去掉  $BD$ ，等於在不等式的兩邊乘以  $BD$ 。 $BD$  去掉後，可得整式不等式：

$$AD-BC > 0.$$

若  $BD$  是負數，我們把它去掉後，則不等號變向，這時則得到如下的整式不等式：

$$AD-BC < 0.$$

如果  $BD$  的符號不能知道(當  $B$  與  $D$  內含未知數時)，而

我們在不等式的兩邊乘上  $BD$  時，則由 (2) 式可知：若分母為正量，其分子亦必為正量；若分母為負量，其分子亦必為負量。所以不等式 (2) 與下列兩組聯立不等式有同解：

$$\begin{cases} AD - BC > 0, \\ BD > 0. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} AD - BC < 0, \\ BD < 0. \end{cases}$$

由此，我們可以解上邊的聯立整式不等式以代替解不等式 (1)。

**70. 不等式的證法** 我們雖不能規定出證明不等式的一般法則；但是可將所要證的不等式改變為一個較明顯的不等式，然後根據這明顯的不等式用逐步推證的方法以證出原不等式。

證明：若二變量  $x, y$  的和為常數，則  $w = y$  時，其積為最大。

設  $x + y = a$ ,  $a$  為常數。若  $w = y$ ，則它們中每個的值都是  $\frac{a}{2}$ ，於是  $xy$  便等於  $\frac{a^2}{4}$ 。

我們如能證明，當  $w \neq y$  時， $xy < \frac{a^2}{4}$  那就行了。把此不等式按以下步驟運算：

$$xy < \frac{a^2}{4}; \quad 4xy < a^2; \quad 4xy < (x+y)^2;$$

$$4xy < x^2 + 2xy + y^2; \quad 0 < x^2 - 2xy + y^2;$$

$$0 < (x-y)^2.$$

當  $w \neq y$  時，最後的不等式是正確的。而由此不等式可返回原式，所以此最後一個式為原式的同解不等式，即原式也是正確的。

例如： $x+y=10$ ， $xy$  的最大值是  $5 \times 5 = 25$ 。

71. 一元一次不等式的解法 去掉一元一次不等式的括號，並將分式化爲整式加以整理之後，其一般形式可寫作：

$$ax + b > a_1x + b_1.$$

把未知項移至左邊，已知項移至右邊：

$$(a - a_1)x > b_1 - b.$$

若  $a - a_1 > 0$ ，則用  $a - a_1$  除不等式的兩邊，便得

$$x > \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

若  $a - a_1 < 0$ ，便得

$$x < \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

由此知解一元一次不等式時，就是要求出未知數的數值界限，這些數值的界限可以用上限 ( $x < m$ ) 表示，或用下限 ( $x > m$ ) 表示。

〔例題〕 試解不等式： $2x(2x-5) - 27 < (2x+1)^2$ 。

脫去括號：

$$4x^2 - 10x - 27 < 4x^2 + 4x + 1.$$

移項整理：

$$-14x < 28.$$

用  $-14$  除不等式的兩邊：

$$x > -2.$$

72. 一元一次聯立不等式 設有以下聯立不等式：

$$\begin{cases} ax + b > a'x + b', \\ cx + d > c'x + d'. \end{cases}$$

這兩個不等式，可分別求解，各解有其一定的界限，分以下三種情形討論：

1) 同向的界限。這時可根據題意取其中之一適當者作為解，例如： $x > 7$  和  $x > 12$ ，則只取  $x > 12$ ，因為如若  $x > 12$ ，則必然  $x > 7$ 。再舉一例： $x < 5$  和  $x < 8$  則只取  $x < 5$  即可，因為若  $x < 5$  則必  $x < 8$ 。

2) 異向的界限。例如： $x > 10$  和  $x < 15$ ，在此情形下，不等式的解，是在  $x$  的兩個界限的中間。

3) 互相矛盾的界限。例如： $x < 5$  和  $x > 7$ 。在此情形下，沒有解。

〔例題〕 試解兩個不等式： $0.3x + 5 < 0.5x$  和  $5x < 60 + 2x$ 。  
解第一不等式得  $x > 25$ ，第二不等式得  $x < 20$ 。因此，若這兩個不等式是由同一個問題的條件得來的，則這問題沒有解。

## 練 習

試解以下各不等式：

107.  $x - 7 < 2x + 5$ ;  $9x - 8 + 3(x - 2) < 2(x + 3)$ .

108.  $\frac{2}{5}x + 4 > x - \frac{1}{2}$ ;  $x + 2b < 16 - 3(x - 2b)$ .

109.  $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} > \frac{a+b}{ab}$ ;  $10 - \frac{5x}{2} > 0$ .

110. 若  $a > b$  和  $c = d$ ，是否永遠  $ac > bd$ ?

111. 若  $a > b$ ，是否永遠  $am > bm$ ?

112. 若 (1)  $ab > 0$ ，或 (2)  $ab < 0$ ，關於  $a$  和  $b$  能有什麼結論?

113. 若在  $\frac{a}{b}$  的分子和分母上加以相同的正數時，則在什麼條件下其分數值增加 ( $a$  和  $b$  皆為正數)?

## 第五章 級數

### I 等差級數

**73. 問題** 欲掘一井，計劃在第一米時給工資三角，第二米給五角，這樣繼續，每米增加兩角，若掘井十米需付出工資多少？

爲解此題，須求下列各數的和：

$$3+5+7+9+11+13+15+17+19+21.$$

欲求此和，我們可用比普通加法較簡便的方法。設和爲  $S$ ，便可寫出以下二式：

$$S=3+5+7+9+11+13+15+17+19+21,$$

$$S=21+19+17+15+13+11+9+7+5+3.$$

第二列與第一列的各數完全相同，僅順序相反；因此，其和相等。加此二式得：

$$2S=24+24+24+24+24+24+24+24+24+24,$$

即  $2S=24 \times 10=240,$

所以  $S=\frac{240}{2}=120.$

故知全工程應付出工資 12 元。

在此題中我們得到一列數，由第二數起每個數以相同的數遞增，這樣的一列數叫做等差級數或算術級數。

**74. 定義** 等差級數是一列數，由第二數起，每個數都等於其前一數加上同一常數（正或負）。

例如，兩列數：10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46 和 6, 4,



2, 0, -2, -4, -6 各組成一等差級數，因為由第二數起其中的每個數，都等於其前一數加上同一常數，此常數在第一列是正數 4，在第二列是負數 -2。

組成等差級數的每個數叫做項。欲求級數的某一項時，須在其前一項上加上一個或正或負的常數，此常數叫做等差級數的公差。

由級數的首項起遞增的級數叫做遞升級數，遞減的級數叫做遞降級數，遞升級數的公差是正數；遞降級數的公差是負數。

通常，等差級數的首項用  $a$ 、末項用  $l$ 、公差用  $d$ 、全部項數用  $n$  與各項之和用  $S$  表示。

#### 75. 等差級數任意項的公式

設有等差級數：10, 14, 18, …… (公差為 4)。

則第 2 項 =  $10 + 4 = 14$ ;

第 3 項 =  $10 + 4 + 4 = 10 + 4 \times 2 = 18$ ;

第 4 項 =  $10 + 4 + 4 + 4 = 10 + 4 \times 3 = 22$ , 等等。

所以

第 10 項 =  $10 + 4 \times 9 = 46$ ;

第 20 項 =  $10 + 4 \times 19 = 86$ , 等等。

又設有等差級數：6, 4, 2, …… (公差為 -2)，則得

第 2 項 =  $6 + (-2) = 4$ ;

第 3 項 =  $6 + (-2) + (-2) = 6 + (-2) \times 2 = 2$ , 等等。

所以

第 10 項 =  $6 + (-2) \times 9 = -12$ 。

---

有些書裏用  $a_1, a_2, \dots, a_n$  表示級數的各項，用  $r$  表示公差。