中等农业学校

三角

（試用本）

农作物
土壤肥料　专业适用
果树蔬菜

河南省农林厅教材編輯委員会編

河南人民出版社

前　言

在党的建設社会主义总路綫的光輝照耀下，我省早已出現了工农业生产为中心的全面大跃进的新形势和已經掀起群众性的技术革命和文化革命的高潮，各地均先后开办了农业大学、中等农业技术学校、初級农校以及“紅专”学校。为适应这一新的革命形势的需要，我省农业教育工作必須从教学計划、教学大綱、教学內容、教学組織、教学方法等各方面进行根本的改革，才能保証貫徹实現党的“鼓足干劲、力爭上游、多快好省地建設社会主义”的总路綫，实現勤工俭学、勤俭办学、教育与生产相結合的教育方針，培养出又“紅”又“专”的技术队伍。

为此，我們于今年三月中旬組織了农业技术学校、农林干校的126名教职員分为14个专业小組到71个县〈市〉，178个农业生产合作社，1307个生产单位进行了参观和調查研究工作，总結出340个先进生产經驗和高額丰产典型，收集了3193种参考資料。現已編出十六种专业教学計划、155种教学大綱和教科書，陆續出版，供各地教学試用。由于我們水平不高，时間短，和有关方面研究的不够，难免有不妥之处。望各地在試用中多多提出意見，并可随着农业生产发展的需要加以修改。

河南省农林厅教材編輯委員会

1958年8月26日

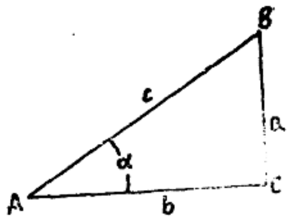
目　录

附　录

第一章　銳角三角函数
直角三角形解法

§1. 銳角三角函数

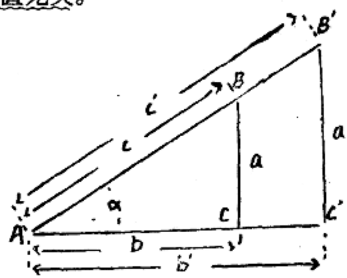
一、直角三角形任意两边的比　取任意銳角 α 如(图1)，从角的任一边上取不与角的頂点 A 重合的任一点B，引另一边上的垂綫BC，构成含銳角 α 的直角三角形ABC，分别用 a、b 和 c 顺序表示角A、B 和 C 所对的边长，对于这三边所組成的六个比：$\frac{a}{c}$，$\frac{b}{c}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{b}$和$\frac{c}{a}$有下面的定理，



(图1)

定理　比值$\frac{a}{c}$，$\frac{b}{c}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{b}$和$\frac{c}{a}$，仅决定于銳角 α，与作直角三角形时 B 点的位置无关。

証　在銳角 α 的任一边上，取不与角的頂点 A 重合的任意二点 B 与 B' (图 2)，作直角三角形 ABC和$AB'C'$，分别用a、b、c 及 a'、b'、c' 表示它们的三个边。



(图2)

因为这两个直角三角形都含銳角α，因此

$$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C',$$

所以 $$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'},\ \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'},\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},$$

$$\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'},\ \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'},\ \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}.$$

这个定理說明了对于銳角 α 的每一个定值，这些比值中的每一个都有一个确定的值与之对应；所以这些比值都是銳角 α 的函数。

二、銳角三角函数定义*

定义 1. 銳角 α 所对的直角边 a 与斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的正弦；用記号 $\sin\alpha$ 来表示；即

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}。$$

定义 2. 和銳角 α 相邻的直角边 b 与斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的余弦；用記号 $\cos\alpha$ 来表示；即

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}。$$

定义 3. 銳角 α 所对的直角边 a 与此角相邻的直角边 b 的比值，叫做銳角 α 的正切；用記号 $\operatorname{tg}\alpha$ 来表示；即

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}。$$

定义 4. 和銳角 α 相邻的直角边 b 与此角所对的直角边 a 的比值，叫做銳角 α 的余切。用記号 $\operatorname{ctg}\alpha$ 来表示；即

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}。$$

※)注 比 $\frac{c}{a}$ 和 $\frac{c}{b}$ 分别叫做銳角 α 的余割和正割。

$sin\ \alpha$、$cos\ \alpha$、$tg\ \alpha$和 $ctg\ \alpha$ 都是角 α 的函数，这些函数叫做三角函数。

从正弦和余弦的定义推得：**銳角 α 的正弦和余弦的函数值是小于 1 的正数。**

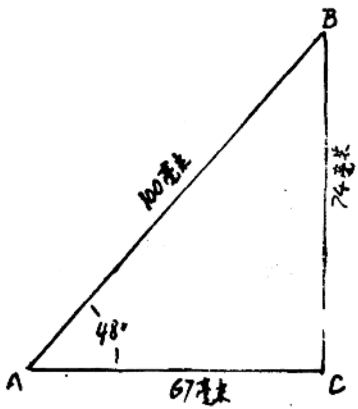
从正切和余切的定义推得：**銳角 α 的正切和余切的函数值可为任何正数。**

下面用例子說明如何用度量的方法，求任一銳角的三角函数的近似值。

例如　求角 48° 的三角函数的近似值。

解　用直尺、圓規和量角器作$\angle A=48°$；为了計算方便，使斜边 $AB=100$毫米(按实际縮为三分之二)。作直角三角形 ABC 如(图3)。

从图量得：$BC\approx74$毫米，$AC\approx67$毫米。



(图3)

所以　$sin\,48°\approx\frac{74}{100}=0.74$，

$$cos\,48°\approx\frac{67}{100}=0.67,$$

$$tg\ 48°\approx\frac{74}{67}=1.1,$$

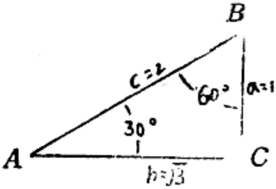
$$ctg\,48°\approx\frac{67}{74}=0.9,$$

用同样的方法，可以求得任一銳角的正弦、余弦、正切和余

切。

§2. 30°、45° 和60° 各角的三角函数值　30°、45°和60°的三角函数值，可以根据几何图形的性质来推算，分别說明如下：

一、30°和60°角的三角函数值　作直角三角形 ABC，使 $\angle A=30°$（图4），則另一个銳角 $\angle B=60°$。



（图4）

从平面几何定理“有一銳角为30°的直角三角形，它的斜边等于对着30°的直角边的二倍”。

因此假設，$a=1$，則$c=2$，$b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$。

从銳角三角函数的定义得

$$\sin 30°=\frac{1}{2};$$

$$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866;$$

$$tg\ 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577;$$

$$ctg\ 30°=\sqrt{3}=1.732。$$

同时还可得到：

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866,$$

$$\cos 60°=\frac{1}{2};$$

$$tg\ 60°=\sqrt{3}=1.732,$$

$$ctg\ 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0.577。$$

二、45°角的三角函数值

作直角三角形 ABC，使$\angle A$等于45°(图5)，則为等腰直角三角形，从而$a=b$，

假設 $a=b=1$，則$c=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

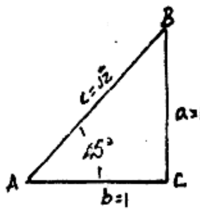
从銳角三角函数的定义得：

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$tg 45^\circ=\frac{1}{1}=1;$$

$$ctg 45^\circ=\frac{1}{1}=1。$$



(图5)

为了便于記忆，将上面所得的結果，列为下表：

函数 \ 角	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

30°、45°和60° 角的函数值以后常常用到，必須牢記。它們的記法是：第一横列各数的分子，平方根号內的数依次为1、2、3，分母都是2；第二横列反之；第三横列的各数是以第二横列內的数除第一横列內的相当数，則得第三横列各数。

例如 求 $2\cos 30^\circ - 4\cos 45^\circ + tg\,60^\circ$ 的数值，

解：$2\cos 30^\circ - 4\cos 45^\circ + tg\,60^\circ$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{3} \approx 2\times 0.866 - 4\times 0.707 + 1.732 = 0.636.$$

§3. 互余两角的三角函数

两个角的和为一直角时，称这两角互为余角。直角三角形的两个鋭角互为余角。

如果直角三角形 ABC 中一个鋭角 $\angle A = \alpha$，则另一个鋭角 $\angle B = 90^\circ - \alpha$。如(图6)。

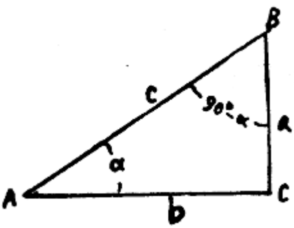
从鋭角三角函数的定义：

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos(90^\circ - \alpha);$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin(90^\circ - \alpha);$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = ctg(90^\circ - \alpha);$$

$$ctg\,\alpha = \frac{b}{a} = tg\,(90^\circ - \alpha)。$$



(图6)

就是説：一个鋭角的正弦、余弦、正切和余切，分别等于它的余角的余弦、正弦、余切和正切。

例如：$\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$，

$\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$，

$tg\,13^\circ 20' = ctg\,76^\circ 40'$，

$ctg(45^\circ + \alpha) = tg\,[90^\circ - (45^\circ + \alpha)] = tg(45^\circ - \alpha)$。

§4. 角由0°变化到90°时三角函数的变化

把上节特殊角的三角函数值，按角大小的顺序来比較，就能发現下面的事实：

$sin\,30° < sin\,45° < sin\,60°$;

$cos\,30° > cos\,45° > cos\,60°$;

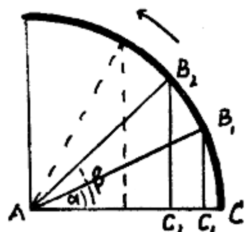
$tg\,30° < tg\,45° < tg\,60°$;

$ctg\,30° > ctg\,45° > ctg\,60°$。

就是說：这些角中較大的角，它的正弦、正切数值較大，而余弦余切的数值反較小。

下面証明这一規律，不但适用于这些角，而且适用于任何銳角。

設 α 和 β 为任意的两个銳角，它們有一公共边 AC，和公共頂点 A（图7），而且 $\beta > \alpha$。



（图7）

为了便于研究，在角变化的时候，使它們所在的三角形的斜边保持不变，以 A 为圆心，以任意半径画弧，与两角的边分别交于 C，B_1 和 B_2。由 B_1 和 B_2 各向 AC 作垂綫，分别与 AC 交于 C_1 和 C_2。

在直角三角形 AB_1C_1 和 AB_2C_2 内，

$$sin\,\alpha = \frac{C_1B_1}{AB_1}, \quad sin\,\beta = \frac{C_2B_2}{AB_2};$$

$$cos\,\alpha = \frac{AC_1}{AB_1}, \quad cos\,\beta = \frac{AC_2}{AB_2};$$

但 $AB_2 = AB_1$， $C_2B_2 > C_1B_1$， $AC_2 < AC_1$。

所以 $sin\,\beta > sin\,\alpha$， $cos\,\beta < cos\,\alpha$。

就是說：在銳角中，它的正弦值随着銳角的增大而增加，它的余弦值随着角的增大相反的减小。

把上面的不等式写为：

$$\frac{C_2B_2}{AB_2} > \frac{C_1B_1}{AB_1} \cdots\cdots(1) \quad \frac{AC_2}{AB_2} < \frac{AC_1}{AB_1} \cdots\cdots(2)$$

不等式(1)除以(2)得：

$$\frac{C_2B_2}{AC_2} > \frac{C_1B_1}{AC_1}$$

从銳角三角函数的定义得： $tg\,\beta > tg\,\alpha$.

不等式(2)除以(1)得：

$$\frac{AC_2}{C_2B_2} < \frac{AC_1}{C_1B_1}$$

从銳角三角函数定义得： $ctg\,\beta < ctg\,\alpha$,

就是說：在銳角中，它的正切值随着銳角的增大而增加；它的余切值随着銳角的增大相反的減小。

例如：比較 $sin\,50°$ 和 $sin\,70°$；$ctg\,24°$ 和 $ctg\,36°$；$sin\,38°$ 和 $cos\,56°$ 的大小。

解　$sin\,50° < sin\,70°$

　　$ctg\,24° > ctg\,36°$

因为　$sin\,38° = cos(90° - 38°) = cos\,52°$,

所以　$cos\,52° > cos\,56°$,

即　$sin\,38° > cos\,56°$。

§5. 三角函数表　在解决实际問題中，必須求已知角的三角函数值，或根据已知的三角函数值求角的大小，这两个問題，可以借助于三角函数表*来解决。

※)注　在我国三国时代(公元三世紀)魏刘徽用比值代替三角函数而計算由于节令不同而引起表(就是竿)的影长不同，在实际应用上，已經构成了一个余弦函数表。

下面我們来說明布拉基斯四位数学用表中“三角函数表”的构造及其用法。在布拉基斯四位数学用表中，号碼为Ⅷ, Ⅸ和Ⅹ的是三角函数表。

一、利用三角函数表求已知角的三角函数值

1. 表Ⅷ中包含着度数和分数，都是整数的一切銳角的正弦和余弦。表中字母 A 的竪行列出了角的度数，横行列出了角的分数。在度数所在的横行和分数所在的竪行的交叉处，列出了函数的近似値，准确到 0.0001。

（1） 查角的正弦时，从表的左边第一竪行看度数，上边第一横行看分数。查角的余弦时，从表的右边第四竪行看度数，下边第一横行看分数。

（2） 从 $0°$ 起每隔 $6'$ 的一切銳角，它的正弦和余弦的近似値，都可以直接查得。查出的数值是小数部分；整数部分在每五个横行的第一栏。例如：

$$\sin 25° \approx 0.4226, \qquad \sin 89° 42' \approx 1.0000,$$
$$\cos 24° 18' \approx 0.9114, \qquad \cos 35° 12' \approx 0.8171。$$

（3） 如果角的度数是整数，而分数不是 6 的整倍数，当角变化 $1'$、$2'$ 或 $3'$ 时，則正弦与余弦在某变化区間內数值的改变，在表的最后三行修正值栏內；它的查法是度数所在的横行和角变化 $1'$，$2'$ 或 $3'$ 所在的竪行的交叉处。但須注意，这些修正值是以小数点后第四位作个位的。

例 1. 求 $\sin 25°20'$。

解：先从正弦表中查出比已知角略小的角的正弦。

$$\sin 25° 18' \approx 0.4274。$$

再查出角度变化 $2'$ $(25° 20' - 25° 18' = 2')$ 时对应的修正值，为0.0005。

因为正弦値是随着角的增大而增加，所以

$$\begin{array}{r} \sin 25°\,18' \approx 0.4274 \\ +2' \quad +0.0005 \\ \hline \sin 25°\,20' \approx 0.4279 \end{array}$$

例 2. 求 $\sin 14°47'$。

解：查正弦表得

$$\begin{array}{r} \sin 14°\,48' \approx 0.2554 \\ -1' \quad -0.0003 \\ \hline \sin 14°\,47' \approx 0.2551 \end{array}$$

例 3. 求 $\cos 40°25'$。

解：因为余弦值是随着角的增大相反的减小。

查余弦表得：

$$\begin{array}{r} \cos 40°\,24' \approx 0.7615 \\ +1' \quad -0.0002 \\ \hline \cos 45°\,25' \approx 0.7613 \end{array}$$

2. 表Ⅸ为角由0°到76°間的正切和角由14°到90°間的余切，构造和查法与表Ⅷ相同。

3. 表Ⅹ可直接查得76°到89°59′間角的正切和0°1′到14°間角的余切。

二、利用三角函数表由角的已知三角函数值求角度

利用表Ⅷ，Ⅸ和Ⅹ还可以解决由角的已知三角函数值求角的度数。

例 1. 已知 $\cos\alpha=0.4509$，求角 α.

解：查余弦表得：

$\cos 63°12' \approx 0.4509$

所以 $\alpha\approx63°12'$.

例 2. 已知 $\sin\alpha=0.9037$. 求角 α.

解：查正弦表求与已知数最相近的数和对应于此数的角度，

$$\sin 64°42'\approx0.9041$$

已知数与查得的数的差为：

$$0.9041-0.9037=0.0004.$$

在修正值栏內角的同一横行寻求与这差一样或最相近的数，这数的頂端 $3'$ 就是角的修正值。

根据較大的正弦值对应較大的角，所以

$$\begin{array}{r} \sin 64°42'\approx0.9041 \\ -3'\ -0.0004 \\ \hline \sin 64°39'\approx0.9037 \end{array}$$

所以 $\alpha\approx64°39'$。

例 3. 已知 $\cos\alpha\approx0.4506$，求角 α.

解：查余弦表得：

$$\begin{array}{r} \cos 63°12'\approx0.4509 \\ +1'\ -0.0003 \\ \hline \cos 63°13'\approx0.4506 \end{array}$$

所以 $\alpha\approx63°13'$。

例 4. 已知 $tg\,\alpha=1.4542$，求角 α.

解：查正切表得：

$$\begin{array}{r} tg\ 55°30'\approx1.4550 \\ -1'\ -0.0008 \\ \hline tg\ 55°29'\approx1.4542 \end{array}$$

所以 $\alpha\approx55°29'$。

6. 直角三角形的解法※)

根据锐角三角函数定义和利用三角函数表，我們可以由直角三角形的已知元素(边和角)計算其余的未知元素。

第一类型 已知直角三角形的二边，解直角三角形。

例 1. 已知 $c=27.5$, $a=22.6$ 求 b, A 和 B。

解：从勾股定理：

$$b=\sqrt{27.5^2-22.6^2}=\sqrt{(27.5+22.6)(27.5-22.6)}$$

$$=\sqrt{50.1\times4.9}\approx15.7$$

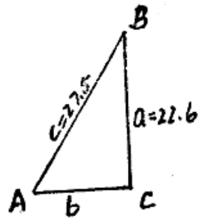
从銳角三角函数定义得：

$$\sin A=\frac{22.6}{27.5}\approx0.8218$$

故 $A\approx55°16'$。

同样 $\cos B=\frac{22.6}{27.5}\approx0.8218$

故 $B\approx34°44'$。



(图8)

驗算 $a=b\,tgA=15.7\,tg\,55°16'\approx15.7\times1.4424\approx22.6$.

$b=c\ \sin B=27.5\sin 34°44'$

$\approx27.5\times0.5698\approx15.7$.

第二类型 已知一边及一銳角，解直角三角形。

例 2. 已知 $a=102$, $A=54°40'$

求 b, c 和 B。

※)注 我国古代算書："周髀算經(大約公元一世紀的作品。)內載有陈子应用相似三角形比例測量太阳高、远、星宿的行程等問題。三国时代(公元三世紀)刘徽在"九章算术"序言里說：用同样长的两根竿直立在地面，就能測得目的物的高和远。

这說明我国很早时期就已經知道解直角三角形的問題。

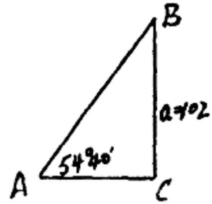
解 从三角函数的定义得

$$ctg\ 54°40' = \frac{b}{102},$$

故 $b = 102\ ctg\ 54°40'$

$\approx 102 \times 0.7089 \approx 72.3$

又 $sin\ 54°\ 40' = \frac{102}{c}$.



(图9)

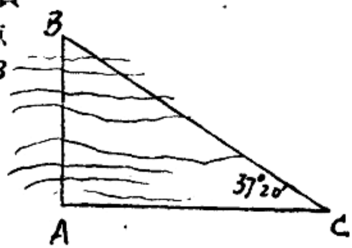
故 $c = \frac{102}{sin\ 54°40'} \approx \frac{102}{0.8158} \approx 125$.

$B = 90° - 54°40' = 35°20'$.

驗算 $a = \sqrt{125^2 - 72.3^2} \approx 102$.

§7. 直角三角解法的应用問題

例 1. 計划在河道对岸 A、B 两点建筑桥墩(图10)。为了測量AB的距离，測量員从垂直于AB的方向綫上取一点C，今测得$AC = 270$米，$\angle ACB = 37°20'$，求A、B間的距离。



(图10)

解 在直角 $\triangle ABC$ 中，

$AB = AC\ tg\ ACB$,

$AB = 270\ tg\ 37°20'$

$\approx 270 \times 0.7627 \approx 206$(米)。

答 AB 两点相距206米.

例 2. 林县东冶乡第一农业社綠化山崗，如(图11)，此山崗的斜坡和水平面的傾斜角$a = 23°$，要使林木間的株距和行距都等于3.5米，求在斜綫(AB,CD……)上应当以怎样的距离来挖坑。