教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

高等数学

上册

第二版

盛祥耀 主编

高等教育出版社

教育部高职高专规划教材

高等数学

上册

第二版

主　编　盛祥耀

副主编　潘鹊屏

编　者　潘鹊屏　黄奕佗　邢文斗　钱翼文
章　平　汪瑶同　王庚生

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》在第一版基础上修订而成的.

考虑到专科层次的特点，全书始终贯彻"在基础课的教学中，要求以应用为目的，以必需、够用为度"的精神.本书分上、下两册出版，上册分成七章，内容是函数、极限、连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，微分方程.

本书可供高职高专院校师生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/盛祥耀主编.—2版.—北京：高等教育出版社，2003重印
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-04-011223-X

Ⅰ.高... Ⅱ.盛... Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第069114号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　址	http://www.hep.edu.cn
传　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	河北新华印刷一厂		
		版　次	2001年6月第1版
开　本	787×1092　1/16		2003年1月第2版
印　张	14.5	印　次	2003年5月第2次印刷
字　数	320 000	定　价	15.60元

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分.改革开放以来,在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下,各地已出版了一批高职高专教育教材.但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要。为此,1999 年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了"教育部高职高专规划教材"编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批"教育部高职高专规划教材".

"教育部高职高专规划教材"计划出版 500 种,用 5 年左右时间完成.出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程.计划先用 2～3 年的时间,在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用 2～3 年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专教育教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系.

"教育部高职高专规划教材"是按照《基本要求》和《培养规格》的要求,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的,适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2000 年 4 月 3 日

第二版前言

由于教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》的内容与《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》有较大的不同和本书根据第一版使用情况，需对第一版作一些修改，修改如下：

一、极限的“ε-N”，“ε-δ”定义修改为描述性定义，书中相应处均作了修改；

二、除一元函数微分外，删去了所有近似计算的内容；

三、删去了傅氏级数中以$2l$为周期的函数的展开，以及部分章节中的部分内容——如不定积分中可积类函数的积分等；

四、改写了部分章节中的部分内容，如曲线的凹凸性定义，弧微分和不定积分中凑微分法，第二类曲面积分的定义等等；

五、纠正了一些错误，特别是重新核对了答案；

六、不属于教学基本要求的内容均打＊号.

本版是由主编盛祥耀教授修改完成.

我们感谢读者对第一版的厚爱，希望第二版能继续得到广大读者的帮助和支持.

编　者

2001年12月于清华园

第一版前言

根据国家教委关于"抓好专科教材建设"的指示精神，为了适应高等工程专科学校培养高等技术应用型人才的需要，解决缺少工程专科教材问题，不断提高教学质量，我们在国家教委高等教育司领导下，在全国高等工程专科数学教材编审组的组织下，依据"高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求"编写了本教材.

本教材力求贯彻"以应用为目的，以必需、够用为度"和少而精原则，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，重视理论联系实际，内容通俗易懂，既便于教师教，又便于学生学，努力体现高等工程专科特色.

本教材的教学时数为 140 学时左右，打 * 号的内容要另加学时.

本教材经全国高等工程专科数学教材编审组审定为高等工程专科学校各专业的高等数学课教材.也可作为专科层次的职工大学，夜大学，干部培训班的教材.

本教材由北京印刷学院盛祥耀教授任主编，南京交通高等专科学校潘鹊屏副教授任副主编.参加本书编写的有(以章节排列)南京交通高等专科学校潘鹊屏，郑州机械专科学校黄奕佗，沈阳工业高等专科学校邢文斗，上海轻工业高等专科学校钱翼文，南京交通高等专科学校章平，扬州工学院汪瑶同，哈尔滨机电专科学校王庚生等同志.黄奕佗、邢文斗二同志对本书初稿进行过一次修改，全书由主编和副主编修改定稿.

本教材由合肥联合大学周正中教授任主审.南京机械专科学校苏永法、新疆煤炭专科学校谭玉明等同志对本书的编写提出了宝贵意见，对此我们一并表示衷心的感谢！

由于我们的水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大师生、读者批评指正.

编　者

1992 年 4 月

目 录

第一章　函数　极限　连续

函数是近代数学的基本概念之一."高等数学"就是以函数为主要研究对象的一门数学课程.极限是贯穿"高等数学"始终的一个重要概念,它是这门课程的基本推理工具.连续则是函数的一个重要性态,连续函数是高等数学研究的主要对象.本章将介绍函数、极限与连续的基本知识,为以后的学习奠定必要的基础.

第一节　函　　数

一　函数的概念

读者在中学里已经学过有关函数的基本知识,但为了以后更好地学习高等数学,我们把有关的内容系统地复习一下.

定义　设 D 为一个非空实数集合,若存在确定的对应规则 f,使得对于数集 D 中的任意一个数 x,按照 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在集合 D 上的函数.

D 称为函数 f 的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量,如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0,因变量 y 能够得到一个确定的值,那么就称函数 f 在 x_0 处有定义,其因变量的值或函数 f 的函数值记为

$$y|_{x=x_0},f(x)|_{x=x_0}\text{或 }f(x_0).$$

实数集合 $B=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.这儿的 $f(x)$ 是函数 f 在 x 的函数值,$f(x)$ 与 f 二者并不相同.但是,人们往往是通过函数值研究函数的,因此通常也称 $f(x)$ 是 x 的函数,或者说 y 是 x 的函数,本书亦将采用这种习惯的叙述方式.

不难看出,函数是由定义域与对应规则所确定的,因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应规则都分别相同时,才表示同一函数.而与自变量及因变量用什么字母表示无关,例如函数 $y=f(x)$ 也可以用 $y=f(\theta)$ 表示.

正因为如此,我们在给出一个函数时,一般都应标明其定义域,它就是自变量取值的允许范围.这可由所讨论的问题的实际意义确定;凡未标明实际意义的函数,其定义域是使该式有意义的自变量的取值范围.例如 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,\infty)$.人们通常用不等式、区间或集合形式表示定义域.其中有一种不等式,以后会常遇到,满足不等式

$$|x-x_0|<\delta$$

(其中 δ 为大于 0 的常数)的一切 x,称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$,它的几何意义表示:以 x_0 为中心,δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$(如图 1-1(a))

对于不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 称为点 x_0 的 δ 的空心邻域,记作 $U(\hat{x}_0,\delta)$.如图 1-1(b).

对于在同一个问题中所遇到的不同函数,应该采用不同的记号,如 $f(x)$,$\varphi(x)$,$F(x)$,$\Phi(x)$,…,等等.

(a)　　　　　　(b)

图 1-1

有时会遇到给定 x 值，对应的 y 值有多个的情形，为了叙述方便称之为多值函数. 而符合上述定义的函数称为单值函数. 对于多值的情形，我们可以限制 y 的值域使之成为单值再进行研究. 例如：$y=\mathrm{Arcsin}\,x$，则可限制 $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，而使它转化为函数 $y=\arcsin x$，从而通过对 $y=\arcsin x$ 的研究，了解 $y=\mathrm{Arcsin}\,x$ 的性态.

例 1　确定函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}\text{的定义域.}$$

解　显然，其定义域是满足不等式

$$x^2-2x-3>0$$

的 x 值的集合，解此不等式，则得其定义域为：

$$x>3\text{ 或 }x<-1\text{，即：}(-\infty,-1)\cup(3,+\infty).$$

也可以用集合形式表示为 $D=\{x\mid x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)\}$.

例 2　确定函数

$$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$$

的定义域.

解　该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0,\\ x-2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体，解此不等式组，得其定义域

$$2<x\leqslant 3\text{，即}(2,3].$$

也可以用集合形式表示为 $D=\{x\mid x\in(2,3]\}$.

例 3　设函数 $f(x)=x^3-2x+3$，求 $f(1)$，$f\left(-\frac{1}{a}\right)$，$f(t^2)[f(b)]^2$，$\frac{1}{f(c)}$（其中 $a\neq 0$，$f(c)\neq 0$）.

解　$f(1)=1^3-2\cdot 1+3=2$；

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\left(-\frac{1}{a}\right)^3-2\left(-\frac{1}{a}\right)+3=-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a}+3$$

$$=\frac{3a^3+2a^2-1}{a^3};$$

$$f(t^2)=(t^2)^3-2(t^2)+3=t^6-2t^2+3;$$

$$[f(b)]^2=(b^3-2b+3)^2;$$

$$\frac{1}{f(c)}=\frac{1}{c^3-2c+3}.$$

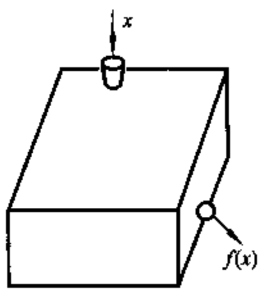


图 1-2

注意,函数 $y=c$(c 为常数)的定义域为$(-\infty,+\infty)$,这时不论自变量取何值,对应的函数值均为 c.

由上面两例,我们可以体会到:函数定义中的对应规则 f,就像是一台机器,定义域中的任何一个 x 值进入这台机器后,即以同样的程序加工为值域内的一个函数值 $f(x)$(图 1-2).

二 函数的表示法

函数 $f(x)$的具体表达方式是不尽相同的,这就产生了函数的不同表示法,函数的表示法通常有三种:公式法、表格法和图示法.

1. 以数学式子表示函数的方法叫做函数的公式表示法,上述例子中的函数都是以公式表示的,公式法的优点是便于理论推导和计算.

2. 以表格形式表示函数的方法叫做函数的表格表示法,它是将自变量的值与对应的函数值列为表格,如三角函数表、对数表、企业历年产值表等等,都是以这种方法表示的函数.表格法的优点是所求的函数值容易查得.

3. 以图形表示函数的方法叫做函数的图示法.这种方法在工程技术上应用较普遍,图示法的优点是直观形象,且可看到函数的变化趋势.

三 分段函数

有些函数虽然也是以数学式子表示,但是它们在定义域的不同范围具有不同的表达式.这样的函数叫做分段函数,分段函数在数学上和工程技术中以及日常生活中都会经常遇到.

例 4 旅客乘坐火车可免费携带不超过 20 kg 的物品,超过 20 kg 而不超过 50 kg 的部分每 kg 交费 a 元,超过 50 kg 部分每 kg 交费 b 元.求运费与携带物品重量的函数关系.

解 设物品重量为 x kg,应交运费为 y 元.由题意可知这时应考虑三种情况:

第一种情况是重量不超过 20 kg,这时

$$y=0,x\in[0,20].$$

第二种情况是重量大于 20 kg 但不超过 50 kg,这时

$$y=(x-20)\times a,x\in(20,50]$$

最后是重量超过 50 kg,这时

$$y=(50-20)\times a+(x-50)\times b,x>50.$$

因此,所求的函数是一个分段函数

$$y=\begin{cases}0 & ,x\in[0,20],\\ a(x-20) & ,x\in(20,50],\\ a(50-20)+b(x-50) & ,x>50.\end{cases}$$

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 求 $f(2)$、$f(0)$和 $f(-2)$.

解 因为 $2\in(0,+\infty)$,$0\in\{0\}$,$-2\in(-\infty,0)$,所以

$$f(2)=1,f(0)=0,f(-2)=-1.$$

在求分段函数的函数值时,应先确定自变量取值的所在范围,再按相应的式子进行计算.

例 5 给出的函数称为符号函数，记为 $\operatorname{sgn}x$. 其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-3 所示. 我们有时可以运用它将某些分段函数写的简洁一些.

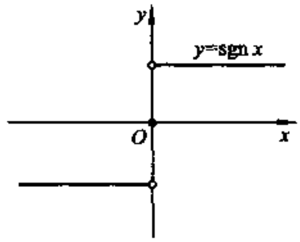


图 1-3

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2} & ,x\leqslant 0\\ x\sqrt{1+x^2} & ,x>0,\end{cases}$$

可以记为

$$f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot \operatorname{sgn}x.$$

例 6 函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x^2), & -\infty<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant 2,\end{cases}$$

为定义在$(-\infty,2]$上的一个分段函数. 对于任何一个 $x\in(-\infty,0]$，其函数值均以 $\cos(x^2)$计算；对于任何一个 $x\in(0,2]$，其函数值均为 1.

例 7 语句"变量 y 是不超过 x 的最大整数部分"表示了一个分段函数，常称为"取整函数"，记为 $y=[x]$. 即若 $n\leqslant x<n+1$，则$[x]=n$，其中 n 为整数. 因此其数学表达式为

$$[x]=\begin{cases}\cdots, & \cdots\cdots,\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ \cdots, & \cdots\cdots.\end{cases}$$

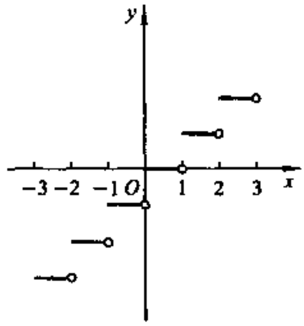


图 1-4

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数，它的图形如图 1-4 所示.

四 反 函 数

设 $y=f(x)$为定义在 D 上的函数，其值域为 A. 若对于数集 A 中的每个数 y，数集 D 中都有唯一的一个数 x 使 $f(x)=y$，这就是说变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数称为函数 $y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 其定义域为 A. 值域为 D. 函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$二者的图形是相同的.

由于人们习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，为了照顾习惯，我们将函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$用 $y=f^{-1}(x)$表示. 注意，这时二者的图形关于直线 $y=x$ 对称.

由函数 $y=f(x)$求它的反函数的步骤是：由方程 $y=f(x)$解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$；将函数 $x=f^{-1}(y)$中的 x 和 y 分别换为 y 和 x，这样，得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 8 求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数.

解 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 可解得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$，交换 x、y 的位置，即得所求的反函数

$$y=\log_2\frac{x}{1-x} \text{或} y=\log_2 x-\log_2(1-x)$$

其定义域为(0,1).

应当指出，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间存在着这样的关系

$$f^{-1}[f(x)]=x \text{ 和 } f[f^{-1}(x)]=x.$$

例如：$y=\log_a x$ 的反函数是 $y=a^x$ 则：

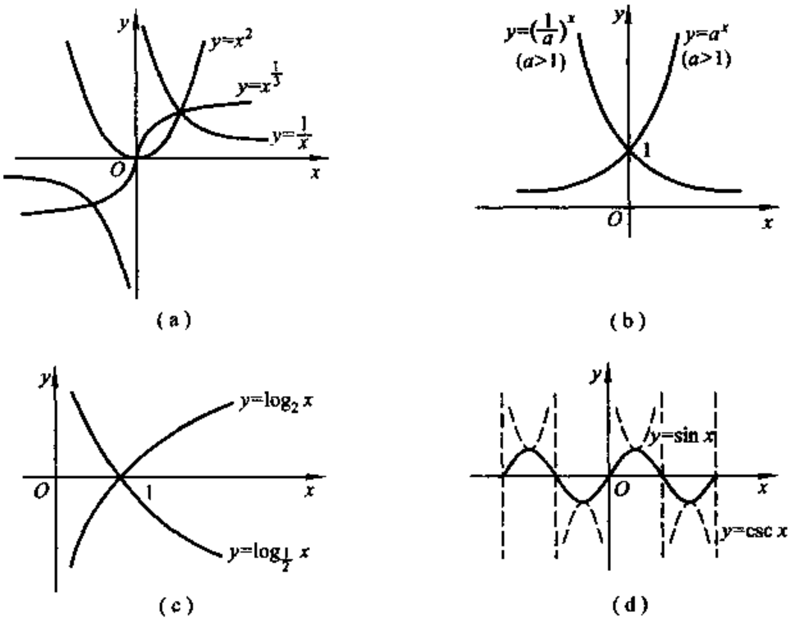
$$\log_a(a^x)=x,$$

$$a^{\log_a x}=x.$$

五 初等函数

1. 基本初等函数及其图形

读者在中学学习过的**幂函数 $y=x^a$（a 为任意实数）；指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）；对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$）；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$** 和**反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arc}\cot x$ 等五类函数统称为基本初等函数**. 它们的图形分别如图 1－5 所示：



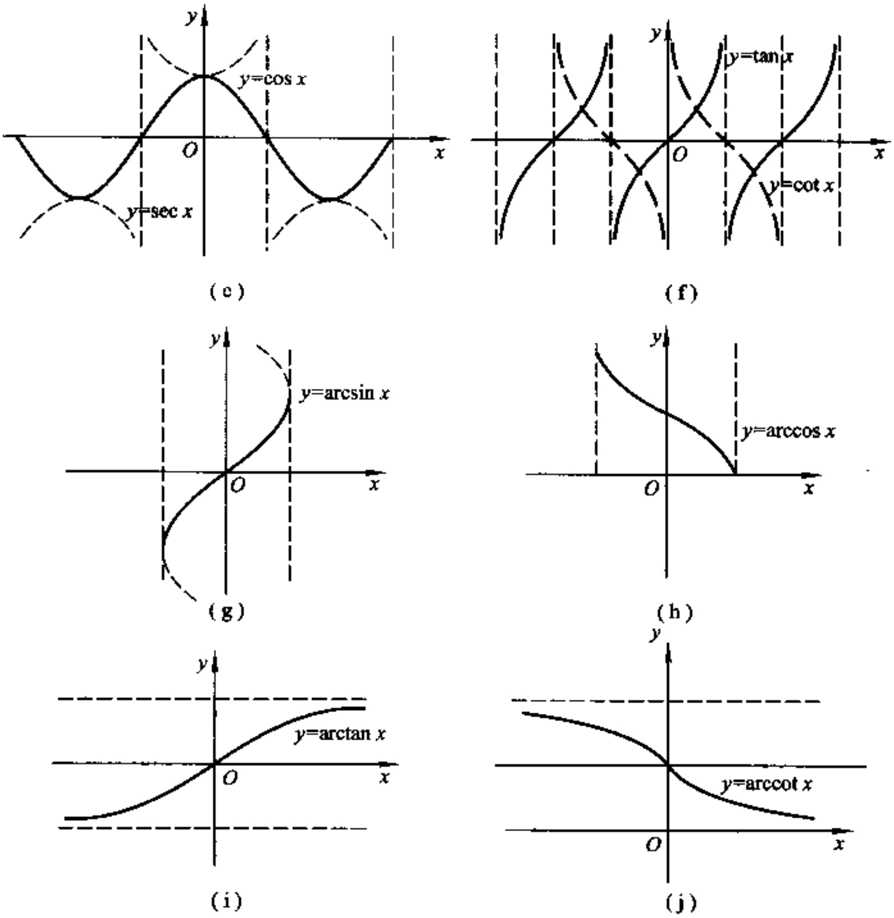


图 1-5

2. 复合函数

若函数 $y=F(u)$，定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=F(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为

$$y=F[\varphi(x)],$$

其中变量 u 称为中间变量.

例 9 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中，即为所求的复合函数

$$y=\cos^2 x,$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 10 试求函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 构成的复合函数.

解 仿例 9 的解法，容易得到该复合函数

$$y=\sqrt{1-x^2},$$

其定义域为 $[-1,1]$.

例 11 设 $f(x)=\frac{1}{1+x}$,$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$,求 $f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$.

解 1° 求 $f[\varphi(x)]$时,应将 $f(x)$中的 x 视为 $\varphi(x)$,因此

$$f[\varphi(x)]=\frac{1}{1+\sqrt{\sin x}}$$

2° 求 $\varphi[f(x)]$时,应将 $\varphi(x)$中的 x 视为 $f(x)$,因此

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{\sin\frac{1}{1+x}}.$$

例 12 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(2x+1)$.

解 方法一 令 $u=x-1$,得 $f(u)=(u+1)^2$,再将 $u=2x+1$ 代人,即得复合函数

$$\begin{aligned}f(2x+1)&=[(2x+1)+1]^2\\&=4(x+1)^2.\end{aligned}$$

方法二 因为 $f(x-1)=x^2=[(x-1)+1]^2$,于是问题转化为求 $y=f(x)=(x+1)^2$ 与 $\varphi(x)=2x+1$的复合函数 $f[\varphi(x)]$,因此

$$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2.$$

有时,一个复合函数可能由三个或更多的函数构成.比如,由函数 $y=\ln u$,$u=\sin v$ 和 $v=x^2+1$ 可以构成复合函数 $y=\ln\sin(x^2+1)$,其中 u 和 v 都是中间变量.

与此同时,我们还应掌握复合函数的复合过程,即“分解”复合函数,这对于后面的学习有帮助,读者对此应予重视.

例 13 指出 $y=(3x+5)^{10}$,$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$是由哪些函数复合而成的.

解 $y=(3x+5)^{10}$是由 $y=u^{10}$和 $u=3x+5$ 复合而成的.

$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$是由 $y=\sqrt{u}$,$u=\log_a v$,$v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

3. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成,并且可以用一个数学式子表示的函数,叫做初等函数. 例如

$$y=\sqrt{\ln 5x-3^x+\sin^2 x},y=\frac{\sqrt[3]{2x}+\tan 3x}{x^2\sin x-2^{-x}},$$

等等,都是初等函数,不能用一个式子表示或不能用有限个式子表示的函数都不是初等函数.

六 函数的基本性态

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任何 x,都有 $f(x)=f(-x)$,则称 $y=f(x)$为偶函数;如果有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.不是偶函数也不是奇函数的函数,称为非奇非偶函数.

例 14 证明 $f(x)=x^4\sin x^3$ 为奇函数.

证 因为 $f(x)=x^4\sin x^3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且有:

$$f(-x)=(-x)^4\sin(-x)^3=-x^4\sin x^3=-f(x).$$

所以该函数为奇函数.

例 15 证明 $f(x)=\sin x\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是偶函数.(其中 $a>0$,且 $a\neq 1$)

证 因为该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\sin(-x)\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=-\sin x\log_a\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-\sin x\cdot\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=-\sin x[-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})]=f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\sin x\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是偶函数.

2. 周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 若存在正数 T,使得对于一切实数 x,都有:

$$f(x+T)=f(x).$$

则称 $y=f(x)$为周期函数.

对于每个周期函数来说,定义中的 T 有无穷多个,因为如果 $f(x+T)=f(x)$,那么就有

$$\begin{aligned}f(x+2T)&=f[(x+T)+T]\\&=f(x+T)=f(x),\\f(x+3T)&=f[(x+2T)+T]=f(x+2T)\\&=f(x)\end{aligned}$$

等等. 人们规定:若其中存在一个最小正数 a,则规定 a 为周期函数 $f(x)$的最小正周期,简称周期. 例如,$y=\sin x$、$y=\tan x$ 的周期分别为 2π、π.

例 16 设函数 $y=f(x)$是以 ω 为周期的周期函数,试证函数 $y=f(ax)(a>0)$是以$\frac{\omega}{a}$为周期的周期函数.

证 要证的是:

$$f(ax)=f\left[a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right],$$

因为 $f(x)$以 ω 为周期,所以

$$f(ax)=f(ax+\omega),$$

即 $f(ax)=f\left[a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right]$.

所以 $f(ax)$是以$\frac{\omega}{a}$为周期的周期函数.

例如 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 均以 2π 为周期,所以 $y=\sin 2x$,$y=\cos\frac{x}{2}$的周期分别为 π 和 4π.

3. 单调性

设 x_1 和 x_2 为区间$(a、b)$内的任意两个数. 若当 $x_1<x_2$ 时,函数 $y=f(x)$满足

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称该函数在区间(a,b)内单调增加,或称递增;若当 $x_1<x_2$ 时有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称该函数在区间 (a,b) 内单调减少，或称递减. 例如，$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内递增，$y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 内递减.

函数的递增、递减统称函数是单调的. 从几何直观来看，递增，就是当 x 自左向右变化时，函数的图形上升；递减，就是当 x 自左向右变化时，函数的图形下降(图 1－6)

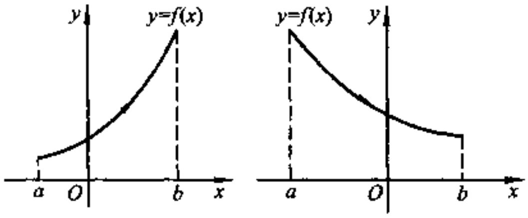


图 1－6

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正数 M，当 $x\in I$ 时，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为在 I 上的有界函数；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 为在 I 上的无界函数.

例如，因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数. 又如 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，$f(x)=\arctan x$ 在它们的定义域内是有界的，而 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数.

有的函数可能在定义域的某一部分有界，而在另一部分无界. 例如 $f(x)=\tan x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上是有界的，而在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的. 因此我们说一个函数是有界的或者无界的，应同时指出其自变量的相应范围.

七　建立函数关系举例

例 17　设有一块边长为 a 的正方形薄板，将它的四角剪去边长相等的小正方形制作一只无盖盒子，试将盒子的体积表示成小正方形边长的函数(图 1－7).

解　设剪去的小正方形的边长为 x，盒子的体积为 V. 则盒子的底面积为 $(a-2x)^2$，高为 x，因此所求的函数关系为

$$V=x(a-2x)^2,\ x\in\left(0,\frac{a}{2}\right).$$

例 18　由直线 $y=x$，$y=2-x$ 及 x 轴所围的等腰三角形 OBC，如图 1－8，在底边上任取一点 $x\in[0,2]$. 过 x 作垂直 x 轴的直线，将图上阴影部分的面积表示成 x 的函数.