学校基础课程配套辅导用书

恩波理工 ENBO

工程数学·高教四版

线性代数
复习指导

主 编 恩 波　　分册主编 范红军

突出讲解方法与技巧

深度解析典型例题

精选综合例题提升训练

赠 线性代数 习题全解

学苑出版社

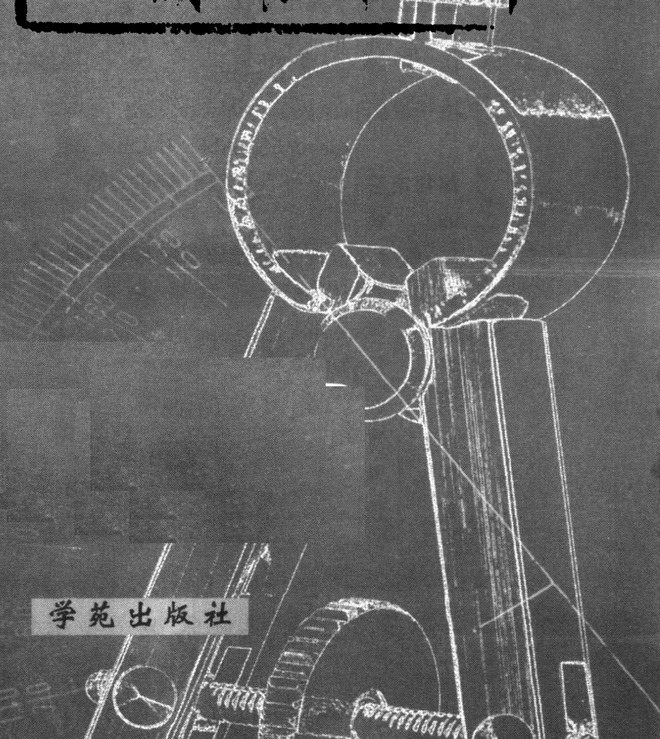
恩波理工 ENBO

工程数学

线性代数

复习指导

主 编 恩 波 分册主编 范



学苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数复习指导/恩波主编；范红军编．—北京：学苑出版社，2006.9

ISBN 7-5077-2761-0

Ⅰ．线…　Ⅱ．①恩…②范…　Ⅲ．线性代数—教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 115606 号

责任编辑：刘　涟
责任校对：刘玉超
封面设计：顾小平
出版发行：学苑出版社
社　　址：北京市丰台区南方庄 2 号院 1 号楼　100078
网　　址：www.book001.com
电子信箱：xueyuanyg@sina.com
　　　　　xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话：010-67675512、84560465
经　　销：新华书店
印 刷 厂：三河市三佳印刷装订有限公司
开本尺寸：850×1168　1/32
印　　张：9.375
字　　数：286 千字
版　　次：2006 年 10 月北京第 1 版
印　　次：2006 年 10 月河北第 1 次印刷
印　　数：0001—6000 册
定　　价：13.80 元

前　言

线性代数是高等院校理工科各专业的一门重要基础课程，是学习后续课程及进行科学理论研究与实践的数学基础，也是研究生入学考试的必考科目之一，其重要性是不言而喻的。为此，恩波编辑部精心组织策划了这本复习参考书。

本书根据高等学校教学大纲编写而成，是与同济大学应用数学系编写的《线性代数》（高等教育出版社　第四版）同步配套的复习参考书，其章节次序、术语、符号均参照该书。编写本书的目的有两个：一是帮助读者快速掌握课程知识，顺利通过学校组织的考试；二是借助于精心选取的部分考研真题，为有志攻读研究生的读者打下基础。

本书每章由下列三部分组成：

概念、方法与技巧综述　归纳本章的重要定理、公式与结论，梳理容易混淆的概念，突出重点、难点，总结常用的、重要的解题方法与技巧。

典型例题精选　题海无涯，尽可能地总结本章所涉及到的题型，给出了详细的解答过程与技巧点评，在技巧点评中指出易犯的错误，分析了解题思路及来龙去脉，对不同方法进行比较，指出彼此的联系；并通过“一题多解”和“多题一解”揭示有关概念、方法之间的深刻联系，从更高的视角帮助读者掌握解题的思维方法，达到举一反三，融会贯通的目的。

综合例题及试题精粹　精心选取部分院校（南大、浙大、西安交大、哈工大）线性代数试题和部分考研真题。这些题目命题的严谨性、科学性使之具有很高的学习研究价值，通过这些题目的练习可以帮助读者有效地检验自己学习这门课程所

达到的水平，找出不足，进而有针对性地提高。

本书目录详尽，各知识点一目了然，方便读者查阅。

考虑到读者学习的需要，本书将同济大学应用数学系编写的《线性代数》（高等教育出版社 第四版）全部习题的解答汇编成册，随书赠送。编者建议，先练后看，边练边看，解决练习过程中的所有问题。

由于水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者及同行批评指正。

编著者

目　录

1　行列式

2　矩阵及其运算

线性空间与线性变换

1 行列式

1.1 概念、方法与技巧综述

行列式是研究线性方程组理论的一个有力的工具，本章主要讨论行列式的概念、性质及其计算.

1.1.1 全排列及其逆序数

(1) 由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级全排列，简称为排列. 例如由 1,2,3 这三个数组成的 123,132,213,231,312,321 都是 3 级(全) 排列.

(2) 将一个排列中的某两个数互换位置，其余的数保持位置不变，这样得到一个新的排列的变换叫一个对换. 例如：排列 2341 经过元素 2,4 对换变成排列 4321，可记为 $2341 \xrightarrow{(2,4)} 4321$.

(3) 在一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，对某指定的 $i_s(1\leqslant s\leqslant n)$，若 $i_t>i_s$，且 i_t 在 i_s 的前面(不一定相邻)，即这两个元素的前后位置与大小顺序正好相反，则称 i_s 与 i_t 构成一个逆序. 一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_2$ 前面大于 i_2 的元素的个数 $+\,i_3$ 前面大于 i_3 的元素的个数 $+\cdots+\,i_n$ 前面大于 i_n 的元素的个数，例如

$$\tau(2341)=0+0+3=3,$$
$$\tau(4321)=1+2+3=6.$$

(4) 逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为奇(偶) 数的排列称为奇(偶) 排列. 例如，排列 2341 为奇排列，排列 4321 为偶排列.

(5) 任意一个排列进行一次对换，排列的奇偶性改变.

(6) n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 共组成 $n!$ 个 n 级排列，其中奇排列、偶排列各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

1.1.2 行列式的定义

(1) 用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示由 n^2 个数 a_{ij} 所组成的 n 阶行列式,简记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 D,这是一个数,其定义为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列,$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

由定义可以看出,n 阶行列式的值等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和,共有 $n!$ 项,每一项前面的符号由排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 决定.

(2) 子式与代数余子式

在 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中,删去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素保持原来的位置所成的 $n-1$ 阶的行列式称为 a_{ij} 的余子式,记为

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.

1.1.3 行列式按行(列)展开

(1) 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 可按任一行展开:

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\ (i = 1,2,\cdots,n),$$

也可按任一列展开：

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\ (j = 1,2,\cdots,n).$$

(2) 与上面两组等式非常相似，容易混淆的另外两组等式是：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0,\text{其中 } i \neq j.$$

它们表示，行列式的任意一行(列)的元素与不同行(列)的元素的代数余子式的乘积之和都等于0.

1.1.4 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式保持绝对值不变但变号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k，等于用 k 乘上此行列式；或者，行列式的某一行(列)的所有元素的公因子 k 可提到行列式记号外.

(4) 行列式中若有两行(列)元素完全对应相等或对应成比例，则此行列式为零.

(5) 若行列式的某一行(列)中各元素都是两项之和，则此行列式等于两个行列式之和.

例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6) 将行列式的某一行(列)的各元素乘上同一数后加到另一行(列)

的对应元素上去，行列式的值不变.

1.1.5 行列式的计算

在计算三阶以上的行列式时，一般要注意观察其结构特点，利用行列式的有关性质，结合使用数学归纳法、递推法、换元法、析因子法、加边法等方法进行简化计算.

行列式计算中几个常用的结论：

(1) 上(下)三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

(4) $$\mathrm{V}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

这个行列式称为范德蒙德(Vandermonde)行列式.

(5) 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{m\times m}$，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|，\text{其中 } \boldsymbol{O} \in \mathbf{R}^{m\times n}, \boldsymbol{C} \in \mathbf{R}^{n\times m};$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|，\text{其中 } \boldsymbol{O} \in \mathbf{R}^{n\times m}, \boldsymbol{C} \in \mathbf{R}^{m\times n};$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|，\text{其中 } \boldsymbol{O} \in \mathbf{R}^{m\times n}, \boldsymbol{C} \in \mathbf{R}^{n\times m};$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|, \text{其中 } O \in \mathbf{R}^{n\times m}, C \in \mathbf{R}^{m\times n}.$$

1.1.6 克莱姆(Cramer)法则及其推论

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{$*$}$$

若($*$)的系数行列式 $D \neq 0$,则($*$)有唯一解

$$x_i = D_i/D, i = 1,2,\cdots,n,$$

其中 D_i 是用($*$)的右端项替换 D 的第 i 列后得到的 n 阶行列式.

这称为**克莱姆法则**,由此可得:

(1) 若($*$)无解或有不唯一解,则 $D = 0$.

(2) 若($*$)为齐次线性方程组且 $D \neq 0$,则($*$)只有零解;若齐次方程组($*$)有非零解,则 $D = 0$.

1.2 典型例题精选

例 1.1 求排列 542163 的逆序数,并确定其奇偶性.

解 $\tau(542163) = 1 + 2 + 3 + 0 + 3 = 9$,是奇排列.

若只要求判别奇偶性,还可通过对换的方法来确定,将排列 542163 通过若干次对换变成偶排列 123456,当所作对换的次数为奇(偶)数时,所给排列为奇(偶)排列.

$542163 \xrightarrow{(5,1)} 142563 \xrightarrow{(4,2)} 124563 \xrightarrow{(4,3)} 123564 \xrightarrow{(5,4)} 123465 \xrightarrow{(6,5)} 123456$,共对换 5 次,所以 542163 为奇排列.

例 1.2 求排列 $369\cdots(3n)147\cdots(3n-2)258\cdots(3n-1)$ 的逆序数,并讨论其奇偶数.

解 所给排列可分成三部分,第一部分 $369\cdots(3n)$ 本身各数之间都不构成逆序,第二部分 $147\cdots(3n-2)$ 及第三部分 $258\cdots(3n-1)$ 也是这样. 注意到 1 与第一部分中所有的 n 个数都构成逆序,4 与第一部分中 $n-1$ 个数构成逆序,$\cdots 3n-2$ 与第一部分中的 1 个数 $3n$ 构成逆序,所以第二部分与第

一部分构成的逆序数为

$$n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

仔细比较元素之间的大小可得第三部分与前面两部分构成的逆序数为

$$(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1=n^2,$$

于是所给排列的逆序数为

$$\frac{n(n+1)}{2}+n^2=\frac{n(3n+1)}{2}.$$

易见，当 $n=4k,4k+1$ 时，所给排列为偶排列；

当 $n=4k+2,4k+3$ 时，所给排列为奇排列.

例 1.3 确定自然数 i,j,k，使得排列 $12i63jk79$ 为偶排列.

解 这是一个 9 级排列，i,j,k 各不相同，且只能取值 4,5,8，先设 $i=4,j=5,k=8$，则

$$\tau(12i63jk79)=\tau(124635879)=0+0+0+2+1+0+1+0=4,$$

故这种取法使得 $12i63jk79$ 为偶排列. 根据对换的性质，将 i,j,k 三个位置的元素对换偶数次仍保持原排列的奇偶性，故取 $i=5,j=8,k=4$，或 $i=8,j=4,k=5$，也使 $12i63jk79$ 为偶排列.

例 1.4 设 4 阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

问下列各乘积是否为 D_4 中的项，若是，则应带什么符号？

(1) $a_{11}a_{23}a_{33}a_{42}$； (2) $a_{43}a_{34}a_{21}a_{12}$.

解 根据 n 阶行列式的定义，其展开式中的每一项应是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，因此，若某 n 个元素的乘积中有两个(或以上)元素来自同一行或同一列，则可断定该乘积项不是 n 阶行列式的项. 而要判断乘积中是否有来自同行或同列的元素，只要看这乘积中的 n 个元素中是否有相同的行标或列标.

(1) 注意到 $a_{11}a_{23}a_{33}a_{42}$ 中元素 a_{23} 与 a_{33} 都来自 D_4 的第 3 列，所以该乘积不是 D_4 中的项.

(2) 由于 $a_{43}a_{34}a_{21}a_{12}$ 中的每个元素的行标互不相同，列标也互不相同，所以它是 D_4 中的项. 将它的行标按自然顺序排列写成 $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$，则

列标所成排列的逆序数 $\tau(2143)=2$，为偶排列，所以该乘积前应取正号.

例 1.5 用行列式的定义计算

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

解 D_5 中的每一项可按列标的自然顺序表示为

$(-1)^{\tau(i_1i_2i_3i_4i_5)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}a_{i_4 4}a_{i_5 5}$，$i_1i_2i_3i_4i_5$ 是一个 5 级排列.

当 $i_1=1,2,3,4$ 时，所对应的乘积项显然都等于 0，所以 $i_1=5$，即 $a_{i_1 1}=a_{51}$；

对第 2 个元素 $a_{i_2 2}$ 而言，由于第 5 行的元素已经取过，而第 1,2,3 行的元素都为 0，所以 $i_2=4$，即 $a_{i_2 2}=a_{42}$；

再考虑第 5 个元素 $a_{i_5 5}$，由于第 4,5 行已取过，而第 5 列中第 2,3 行的元素为 0，所以 $i_5=1$，即 $a_{i_5 5}=a_{15}$；

接着考虑第 4 个元素 $a_{i_4 4}$，由于第 1,4,5 行都已用过，而第 4 列中第 3 行元素为 0，所以 $i_4=2$，即 $a_{i_4 4}=a_{24}$；

这样 i_3 只能取 3，则

$$\begin{aligned} D_5 &= (-1)^{\tau(54321)}a_{51}a_{42}a_{33}a_{24}a_{15} \\ &= (-1)^{10}a_{51}a_{42}a_{33}a_{24}a_{15}=a_{51}a_{42}a_{33}a_{24}a_{15}. \end{aligned}$$

例 1.6 求证：一个 n 阶行列式中等于 0 的元素的个数如果比 n^2-n 多，则该行列式等于 0.

证 该行列式中非零元的个数小于 $n^2-(n^2-n)=n$. 而根据行列式的定义，该行列式是 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是 n 个元素的乘积，因此每一乘积项中至少有一个零元，所以该行列式必等于 0.

技巧点评 利用行列式的定义进行计算时，一要注意总的项数有多少；二要根据所给行列式的结构特点，特别是零元的分布情况，找出所有为零的项及不为零的项的规律.

例 1.7 设有下列两个 n 阶行列式：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中 $b\neq 0$，证明：$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

证 由行列式的定义，

$$|\boldsymbol{B}|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(a_{1j_1}b^{1-j_1})(a_{2j_2}b^{2-j_2})\cdots(a_{nj_n}b^{n-j_n})$$
$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)}.$$

因为 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，故 $j_1+j_2+\cdots+j_n=1+2+\cdots+n$，则

$$|\boldsymbol{B}|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=|\boldsymbol{A}|.$$

例 1.8 求 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\1&1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&-1\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}$$

展开后的正项总数.

解
$$D\xlongequal[\substack{r_2+r_n\\ \vdots \\ r_{n-1}+r_n}]{r_1+r_n}\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0\\2&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&\cdots&0\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=2^{n-1}.$$

设在 D 展开后的 $n!$ 项中，正项有 P 个，负项有 Q 个，注意到 D 中的项要么是 1，要么是 -1，所以有

$$P+Q=n!,\ P-Q=D=2^{n-1},$$

由此可得 D 的正项数为

$$P=2^{n-2}+\frac{n!}{2}.$$

例 1.9 计算行列式

$$D_3=\begin{vmatrix}2.46&4.27&3.27\\10.14&5.43&4.43\\-3.42&7.21&6.21\end{vmatrix}.$$

解
$$D_3=\begin{vmatrix}2.46&4.27&3.27\\10.14&5.43&4.43\\-3.42&7.21&6.21\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_3}\begin{vmatrix}2.46&1&3.27\\10.14&1&4.43\\-3.42&1&6.21\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} 2.46 & 1 & 3.27 \\ 7.68 & 0 & 1.16 \\ -5.88 & 0 & 2.94 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 7.68 & 1.16 \\ -5.88 & 2.94 \end{vmatrix}$$

$$=-2.94\begin{vmatrix} 7.68 & 1.16 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-2.94(7.68+2\times 1.16)=-29.4.$$

技巧点评 计算数字行列式时，一般利用行列式的性质将某一行(列)中除一个元素非零外，其余的都化为零，再由展开定理将行列式“降阶”；或充分利用其结构上的特点，设法将行列式化成一些简单的形式，如上(下)三角形等；或造出有两行(列)元素对应成比例等.

例 1.10 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^3-1 \end{vmatrix}$，

求证：存在数 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证 由题设条件可见，$f(x)$ 是一多项式，显然在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且

$$f(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0,$$

故由 Roll 定理，在 $(0,1)$ 中至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

技巧点评 这其实是一道微积分的题目，为了利用 Roll 定理，要根据题设说明函数 $f(x)$ 需满足的条件.

例 1.11 计算 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解 $n=2$ 时，