

初中代數學提要

劉遂生編

中華書局印行

民國三十七年十二月發行
民國三十七年十二月初版

初中代數學提要（全一冊）



定價國幣四元

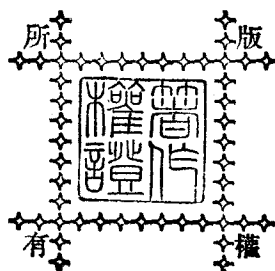
（郵運匯費另加）

編者 劉遂生

發行人 李虞杰
中華書局股份有限公司代表

印刷者 上海澳門路八九號
中華書局永寧印刷廠

發行處 各埠中華書局



初中代數學提要

目 次

基本運算	1
第一章 緒論	1
第二章 括號	4
第三章 一次方程式	7
第四章 一次聯立方程式	10
第五章 因式分解	17
第六章 最高公因式與最低公倍式	28
第七章 分式	35
第八章 分方程式與文字方程式	46
第九章 比 比例 變數法	55
第十章 乘方與開方	60
第十一章 指數	64
第十二章 根式	67
第十三章 虛數與複數	80
第十四章 一元二次方程式	83
第十五章 聯立二次方程式	93
第十六章 級數	99

II. 應用問題.....	107
第十七章 應用問題的例解.....	107
附錄一 比較繁複的例解.....	117
附錄二 總習題.....	130
附錄三 重要參考用書表.....	142
中西名詞對照表.....	143

初中代數學提要

I 基本運算

第一章 緒論

1. 代數學 (Algebra) 的定義 代數學係研究數 (包括數字和文字) 的科學。

2. 代數式 (Algebraic expression) 用運算的記號, 連結數字及文字的式, 叫做代數式。或簡稱爲式。例如 $a+5$ 是。

3. 有理式 (Rational expression) 與無理式 (Irrational expression)

(1) 有理式 沒有根號之式, 叫做有理式。例如 $a+b$ 是。

(2) 無理式 有根號之式, 叫做無理式。例如 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 是。

4. 恆等式 (Identity) 與方程式 (Equation)

(1) 恆等式 用任何數值代入等式中之文字, 兩邊恆能相等者, 叫做恆等式。例如 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 是。

(2) 方程式 必須特別數值代入等式中之文字, 兩邊始能相等者, 叫做方程式。例如 $x+2=5$ 是。

5. 已知數 (Known numbers) 與未知數 (Unknown numbers)

(1) 已知數 假設的數, 叫做已知數. 例如 $1, 2, \dots$; $a, b, \dots$ 是.

(2) 未知數 所求的數, 叫做未知數. 例如 $x, y, z, \dots$ 是.

6. 正數(Positive number)與負數(Negative number)

(1) 正數 數之大於 0 者, 叫做正數. 例如 $+4$ 是. 有時寫作 4.

(2) 負數 數之小於 0 者, 叫做負數. 例如 -7 是.

7. 絕對值(Absolute value) 撤去數前之 '+' '-' 號, 而僅稱其數者, 叫做絕對值. 例如 $+3$ 及 -3 之絕對值為 3.

8. 加法法則(Rule of addition)及公式(Formula)

(1) 同號二數相加, 將絕對值相加, 附以公有符號即得. 其公式為:

$$\text{I. } (+a) + (+b) = +(a+b).$$

$$\text{II. } (-a) + (-b) = -(a+b).$$

(2) 異號二數相加, 取絕對值之差, 附以絕對值較大者的符號即得. 其公式為:

$$\text{I. } (+a) + (-b) = +(a-b).$$

$$\text{II. } (-a) + (+b) = -(a-b).$$

[註] $a > b$

(3) 絕對值相等, 而符號相反, 則其和為零. 其公式為:

$$(-a) + (+a) = 0.$$

9. 減法法則(Rule of subtraction)及公式 從一數減另一

數，變減數的符號，而與被減數相加即得。其公式爲：

$$\text{I. } a - (+b) = a + (-b).$$

$$\text{II. } a - (-b) = a + (+b).$$

10. 乘法法則 (Rule of multiplication) 及公式 二數之積，等於其絕對值之積，同號得正，異號得負。其公式爲：

$$\text{I. } \begin{cases} (+a) \times (+b) = +ab, \\ (-a) \times (-b) = +ab. \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} (+a) \times (-b) = -ab, \\ (-a) \times (+b) = -ab. \end{cases}$$

11. 除法法則 (Rule of division) 及公式 一數以另一數除之，其商即其絕對值之商，同號得正，異號得負。其公式爲：

$$\text{I. } \begin{cases} (+a) \div (+b) = +\frac{a}{b}, \\ (-a) \div (-b) = +\frac{a}{b}. \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} (+a) \div (-b) = -\frac{a}{b}, \\ (-a) \div (+b) = -\frac{a}{b}. \end{cases}$$

習 題

1. $-6, +9$ 的絕對值爲何？
2. 試求 $-14, +5, -3, +10$ 之和？

3. 試求 -4 與 -6 之差?

4. 試求 $(x-y)$ 與 $(-x-y)$ 之差.

答. $2x$.

5. 試求 (-15) 與 $(+3)$ 之積.

6. 試求 (-8) 與 (-6) 之積.

7. 試求 (-16) 與 $(+2)$ 之商.

8. 試求 $(-20) \div (-4)$ 之商.

9. 試求 $(+5) \div (-2) \div (+6) \div (-15)$ 之商.

10. 計算下式: $(-7) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(+\frac{7}{9}\right)$.

答. $-7\frac{1}{2}$.

第二章 括號

1. 括號的種類:

(1) 線括(Vinculum), --- ;

(2) 圓括(Parenthesis), $(\quad)$;

(3) 方括(Bracket), $[\quad]$;

(4) 曲括(Brace), $\{ \quad \}$.

2. 撤去括號法

(1) 括號前是加號, 括號內各數前的符號不變.

(2) 括號前是減號, 括號內各數前的符號, 須變加為減, 變減

為加.

例 1. 撤去括號：

$$\begin{aligned} & 12a - \{(a+b) - [b - (a-b)] - a\}. \\ \text{原式} &= 12a - \{a+b - [b-a+b] - a\} \\ &= 12a - \{a+b-b+a-b-a\} \\ &= 12a - a - b + b - a + b + a \\ &= 11a + b. \end{aligned}$$

例 2. 撤去括號：

$$\begin{aligned} & 9a - \{(7a+5b) - [-6b + (-12b - \overline{a-b})]\}. \\ \text{原式} &= 9a - \{7a+5b - [-6b + (-12b-a+b)]\} \\ &= 9a - \{7a+5b - [-6b-12b-a+b]\} \\ &= 9a - \{7a+5b+6b+12b+a-b\} \\ &= 9a-7a-5b-6b-12b-a+b \\ &= a-22b. \end{aligned}$$

例 3. 撤去括號：

$$\begin{aligned} & 84 - 7[-11x - 4\{-17x + 3(8 - \overline{9-5x})\}]. \\ \text{原式} &= 84 - 7[-11x - 4\{-17x + 3(8-9+5x)\}] \\ &= 84 - 7[-11x - 4\{-17x + 3(5x-1)\}] \\ &= 84 - 7[-11x - 4\{-17x + 15x - 3\}] \\ &= 84 - 7[-11x - 4\{-2x - 3\}] \\ &= 84 - 7[-11x + 8x + 12] \\ &= 84 - 7[-3x + 12] \\ &= 84 + 21x - 84 \end{aligned}$$

$$=21x.$$

習題一

撤去下列各式的括號：

1. $a+b-[(b+d)-(a-b)]$. 答. $2a-b-d$.

2. $a-(b-c)-[a-b-c-2(b+c)]$ 答. $2b+4c$.

3. $8(b-c)-[-\{a-b-3(c-b+a)\}]$.
答. $-2a+10b-11c$.

4. $5\{a-2[a-2(a+x)]\}-4\{a-2[a-2(a+x)]\}$.
答. $3a+4x$.

5. $2x-\{x-(x-y)-[x-\overline{x-y}]-y\}$ 答. $2x-y$.

6. $4a-[6b+(3a-c)-\{5b-\overline{c-a}\}]$. 答. $2a-b$.

7. $6\{a-2[b-3(c+d)]\}-4\{a-3[b-4\overline{c-d}]\}$.
答. $2a-12c+4d$.

8. $\frac{1}{4}\{a-5(b-a)\}-\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{3}\left(b-\frac{a}{3}\right)-\frac{2}{9}\left[a-\frac{3}{4}\left(b-\frac{4a}{5}\right)\right]\right\}$ 答. $\frac{11}{5}a-2b$.

3. 插入括號法

(1)括號前用加號，括號內各數前的符號不變。

(2)括號前用減號，括號內各數前的符號，須變加為減，變減為加。

例1. 試將下式中之第二、第三項以及第四、第五項插入括

號內：

$$a - b + c + 2d - e.$$

$$\text{原式} = a - (b - c) + (2d - e).$$

例 2. 試將下式中之後三項，括入括號內，而括號之前，須冠以‘-’號：

$$2a + b - 5c + 2d.$$

$$\text{原式} = 2a - (-b + 5c - 2d).$$

習題二

試將下式中之後三項，括入括號內，而括號之前，須冠以‘+’號：

$$1. \quad b + c - d + e.$$

$$2. \quad x - 2y + 3z - d.$$

$$3. \quad 2p - q + p^2 - q^2.$$

試將下式中之後三項，括入括號內，而括號之前，須冠以‘-’

號：

$$4. \quad a - b - c - d.$$

$$5. \quad a^2 + a - b^2 + b.$$

$$6. \quad 1 + a - 2b - c - d.$$

第三章 一次方程式

1. 解方程式 (To solving the equation)

求方程式中未知數之值的方法，叫做解方程式。求得之值，叫做根 (Root)。

2. 解方程式應用的公理(Axiom)

(1)等量加等量,其和仍等.

(2)等量減等量,其差仍等.

(3)等量乘等量,其積仍等.

(4)等量除等量,其商仍等.

3. 解方程式的方法

(1)方程式中若含有括號,須先撤去.

(2)移未知數到左邊,已知數到右邊,依公理(1)、(2),應改變符號,再行合併.

(3)將合併所得簡式中未知數的係數除兩端,即得所求的根.

4. 驗算(Verification)的方法 解方程式所得之根,代入原方程式中,檢其是否兩邊相等,叫做驗算.如果驗得兩邊相等,便算正確.

例 1. 解 $3x - 8 = x + 12$.

[解]移項, $3x - x = 12 + 8$.

集合, $2x = 20$.

以 2 除之, $\therefore x = 10$.

例 2. 解 $5(x-3) - 7(6-x) = 24 - 3(8-x) - 3$.

[解]撤去括號, $5x - 15 - 42 + 7x = 24 - 24 + 3x - 3$.

集合, $12x - 57 = 3x - 3$.

移項, $12x - 3x = 57 - 3$.

集合, $9x = 54$.

以 9 除之, $\therefore x=6$.

例 3. 解 $7x-5[x-\{7-6(x-3)\}]=3x+1$.

[解] 撤去括號, $7x-5[x-\{7-6x+18\}]=3x+1$,

$$7x-5[x-25+6x]=3x+1.$$

$$7x-5x+125-30x=3x+1.$$

移項, $7x-5x-30x-3x=1-125$.

集合, $-31x=-124$

$$\therefore x=4.$$

例 4. 解 $\frac{4(x+2)}{3}-\frac{6(x-7)}{7}=12$.

[解] 用分母的最小公倍數 21 乘之,

$$28(x+2)-18(x-7)=12 \times 21.$$

撤去括號, $28x+56-18x+126=252$.

移項及集合, $10x=70$.

$$\therefore x=7$$

[驗算] $x=7$, $\therefore$ 左端 $=\frac{4(7+2)}{3}-\frac{6(7-7)}{7}=12$,

右端 $=12$.

兩端相等, 故知根正確.

習題

解下列各方程式:

1. $3x+15=x+25$.

答. 5.

2. $5x-6(x-5)=2(x+5)+5(x-4)$

答. 5.

$$3. \quad 8(x-3)-(6-2x)=2(x+2)-5(5-x) \quad \text{答. } 3.$$

$$4. \quad 5x-(3x-7)-(4-2x-(6x-3))=10. \quad \text{答. } 1.$$

$$5. \quad 14x-(5x-9)-(4-3x-(2x-3))=30. \quad \text{答. } 2.$$

$$6. \quad 2x-5(3x-7(4x-9))=66. \quad \text{答. } 3.$$

$$7. \quad 3(5-6x)-5[x-5\{1-3(x-5)\}]=23. \quad \text{答. } 4.$$

$$8. \quad x+2-[x-8-2\{8-3(5-x)-x\}]=0. \quad \text{答. } 1.$$

解下列各方程式，並驗算之：

$$9. \quad 7(25-x)-2x=2(3x-25). \quad \text{答. } 15.$$

$$10. \quad 25x-19-[3-\{4x-5\}]=3x-(6x-5) \quad \text{答. } 1.$$

$$11. \quad \frac{x}{4} + \frac{x-5}{3} = 10. \quad \text{答. } 20.$$

$$12. \quad \frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}. \quad \text{答. } -\frac{1}{7}.$$

第四章 一次聯立方程式

1. 二元一次聯立方程式的解法 二元一次聯立方程式的解法，通用者有三：

(1) 加減消去法 (Elimination by addition or subtraction).

(2) 代入消去法 (Elimination by substitution).

(3) 比較消去法 (Elimination by comparison).

2. 加減消去法

(1) 如有括號，先去括號，將含元的各項集於左邊，不含元的

各項集於右端。

(2)用一適當之數，乘第一方程式的兩邊；再用另數乘第二方程式的兩邊，使同元的係數，有相同的絕對值。

(3)若這兩係數同號，就用減法；若係異號，就用加法。如是即得一個一元一次方程式。

(4)解一元一次方程式，得一元的值；將這元的值，代入任一原方程式中，得另一元的值。

例 1. 解 $\begin{cases} 7x+2y=47, & \dots\dots(1) \\ 5x-3y=7. & \dots\dots(2) \end{cases}$

(1) $\times 3$, $21x+6y=141$, $\dots\dots(3)$

(2) $\times 2$, $10x-6y=14$. $\dots\dots(4)$

(3) $+$ (4), $31x=155$,

$\therefore x=5$.

代入(1), $\therefore 35+2y=47$,

$\therefore y=6$.

答. $\begin{cases} x=5, \\ y=6. \end{cases}$

例 2. 解 $\begin{cases} 2x-y=9, & \dots\dots(1) \\ 3x-7y=19. & \dots\dots(2) \end{cases}$

(1) $\times 7$, $14x-7y=63$. $\dots\dots(3)$

(3) $-(2)$, $11x=44$.

$\therefore x=4$.

代入(1), $8-y=9$,

$\therefore y=-1$.

答. $\begin{cases} x=4, \\ y=-1. \end{cases}$

習題一

試用加減消去法解下列各方程式：

$$1. \begin{cases} 3x+4y=10, \\ 4x+y=9. \end{cases}$$

$$\text{答. } \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+8y=53, \\ 8x-y=34. \end{cases}$$

$$\text{答. } \begin{cases} x=5, \\ y=6. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 21x-50y=60, \\ 28x-27y=199. \end{cases}$$

$$\text{答. } \begin{cases} x=10, \\ y=3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 5, \\ x-y=4. \end{cases}$$

$$\text{答. } \begin{cases} x=10, \\ y=6. \end{cases}$$

[提示] 將第一方程式去分母。

$$5. \begin{cases} \frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 10, \\ \frac{x}{3} + y = 50. \end{cases}$$

$$\text{答. } \begin{cases} x=45, \\ y=35. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5(x+2y)-(3x+11y)=14, \\ 7x-9y-3(x-4y)=38. \end{cases}$$

$$\text{答. } \begin{cases} x=8, \\ y=3. \end{cases}$$

[提示] 撤去括號，並集合之。

3. 代入消去法

(1) 先從任一方程式，解出任一元的相當式。

(2) 將這元的相當式，代入另一方程式中，即得一元一次方程式。

(3) 解這一元一次方程式，得一元的值；代入任一原方程式

中,得另一元的值.

$$\begin{cases} 2x-7y=-8, & \dots\dots\dots(1) \\ 3x+2y=13. & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

從(1), $2x=7y-8.$

以2除之, $x=\frac{7y-8}{2} \dots\dots\dots(3)$

代入(2), $3\left(\frac{7y-8}{2}\right)+2y=13.$

去分母, $21y-24+4y=26, \text{即 } 25y=50.$

$\therefore y=2.$

代入(3), $\therefore x=\frac{14-8}{2}=3.$

答. $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

習題二

試用代入消去法,解下列各方程式:

1. $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x+5y=7. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 9y-5x=2, \\ 3y+4x=29. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 35x-17y=59, \\ 7x-5y=-9. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x=8, \\ y=13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4y=3x+4, \\ 5y=4x+3. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x=8, \\ y=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{5}=4, \\ \frac{x}{7}+\frac{y}{15}=3. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x=14, \\ y=15. \end{cases}$

〔提示〕 撤去分母,再依法解之.