紧扣新编教材
优化训练项目

对应高考题型
突出学科能力

LITIJIHE

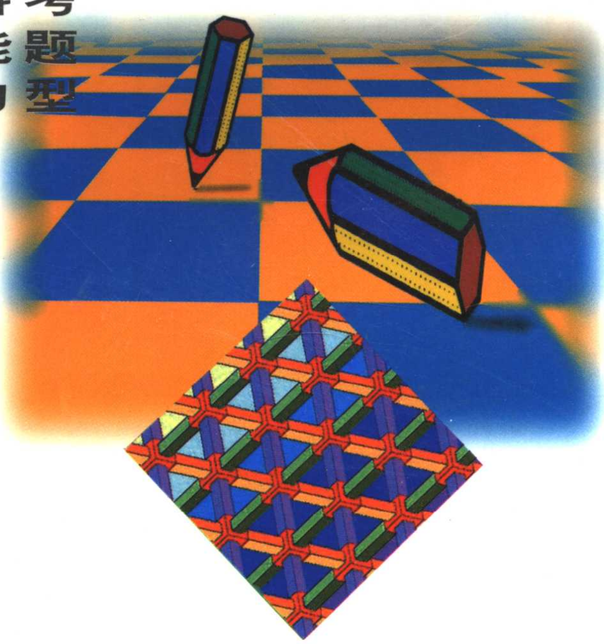
GAOZHONGXUEKENENGLIXUNLIANTICUI

高中学科能力训练题萃

——九省市重点中学题库联网

郭海根　编著

立体几何



- 训练指要　纲领化
- 典题解析　标准化
- 基础训练　集约化
- 能力训练　综合化
- 综合检测　实战化

辽宁师范大学出版社

九省市重点中学题库联网

GAOZHONGXUEKENENGLIXUNLIANTICUI

编著 郭海根

高中学科能力训练题萃

立体几何

辽宁师范大学出版社

高中学科能力训练题萃
立体几何
郭海根　编著
辽宁师范大学出版社出版
(大连市黄河路 850 号　邮编:116029　电话:0411-4206854)
沈阳新华印刷厂印刷　　新华书店发行

开本：787×1092 毫米 1/16　　字数：260 千　印张：14
印数：20001—35000 册
1997 年 8 月第 1 版　　1998 年 2 月第 3 次印刷

责任编辑：张洋　刘文刚　　责任校对：晓　庄
封面设计：冀贵收　　版式设计：章　铭

ISBN 7—81042—217—0/G·122　　定价：13.00 元

《高中学科能力训练题萃》编委会

主　编：刘忠舜　林淑芬		
编　委：谷　丹	北京市第四中学	高级教师
宁潜济	天津市第一中学	特级教师
石寅初	南京市教学研究室	高级教师
康英茂	沈阳市第五中学	特级教师
栾开亮	哈尔滨师范大学附中	特级教师
罗瑞兰	东北师范大学附中	高级教师
高体柱	辽宁师范大学附中	高级教师
李启文	辽宁省本溪市高级中学	特级教师
毛汉华	湖北省黄石市教委教研室主任	特级教师
郭国庆	山东省青岛市普教教研室	特级教师
陈庆军	山东省临沂地区教学研究室主任	特级教师

参编者：(以姓氏笔划为序)

王巧娜　王冰洁　王郁文　齐大成　刘文杰　刘忠舜
杨子玉　李玉成　张向阳　李启文　宋利刚　吴忠文
郎伟岸　赵　伟　赵雅琴　郭海根　魏向阳

前言

突出学科能力是高中新编教材和教学大纲的基本精神。为了更紧密地配合新编教材和教学大纲的改革和调整，突出学科能力的培养和训练，本书的编写不是按学年来划分，而是以学科来分类的。所谓学科能力是指根据学科特点，通过教学培养学生应具备的特有能力。这种能力不仅是认识、接受能力，更重要的是应用、探索、创造方面的能力。如何测定各有关学科的能力，经专家们近几年的研讨，现已在“考试说明”中有了明确的要求，但各学科教师怎样有针对性地组织教学，培养学生应有的学科能力，而学生在学习和复习过程中，怎样有意识地提高有关学科的能力，仍需一个较长的适应过程。为此，本书的编写不仅是必要的，也是适时的。这不仅是适应素质教育的需要，也是适应高考选拔的需要。从近几年的高考试题调整来看，突出学科特点，深入考查学科思想方法和学科语言，加大能力测试的力度仍将是今后高考命题的主导倾向。

根据上述编写主旨，本书在编写体例上突出基础训练和能力训练这两大块。在基础训练方面，凡教材中涉及到的知识点均全面练，重点知识突出练，具有集约化的特点和很强的针对性。在能力训练方面，根据教学大纲和《考试说明》关于学科能力的要求，特别是 1997 年国家考试中心提出的对学科能力的分类及要求，针对不同学科对学科能力的不同考查标准，进行全方位的科学训练。同时，为了最大限度地减轻学生负担，提高学习效率，本书所编选和设计的练习题不仅完全对应高考最新题型，而且典型性很强，具有较高的涵盖性、灵活性，有举一反三之效。为确保训练的科学性和系统性，本书在每单元训练之前，均有提纲挈领的指要性说明，而在训练题之前，又设有“典题解析”，即通过一些典型题的具体解析，向学生指出基本的解题思路和方法。本书的“期末测试题”则是期末模拟试卷，对学生进行实战性地综合检测。

参加本书编写的是九省市重点高中的特级教师和高级教师。这种集体编写方式，不仅汇集了各省市教学与科研的最新成果，而且在教辅读物的编写上开创了题库联网的合作方式。毫无疑问，这种方式对于提高编写质量提供了可靠的保证。但是，随着转型教育的深入，随着高考内容和形式的改革和调整，本书的内容也得随时予以调整和修订，我们期待着广大读者为我们多多提出改进意见。

刘忠舜　林淑芳

一九九七年六月十八日

目 录

第一章　直线和平面

一、平　面

【训练指要】

1. 使学生掌握"平面"的基本概念，理解平面的无限延展性，熟记和运用平面基本性质的三个公理及公理三的三个推论．论证有关的共面问题，解决有关平面划分空间的问题．

2. 使学生熟练掌握用斜二测法画出平面图形的水平放置直观图，比较它们与平面图形的异同，培养空间想象力．

3. 使学生掌握文字语言与符号语言的互译，同时要明确立体几何中的符号表示借用了集合符号，但不使用集合语言，要注意区分与集合符号表示上的异同点．

【典题解析】

例 1　一条直线与三条平行线相交，那么这四条直线在同一平面内．

已知：$a \parallel b \parallel c$，且 $l \cap a = A, l \cap b = B, l \cap c = C$，

求证：直线 a、b、c、l 共面．

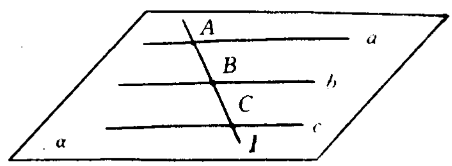


图 1-1

证明：$\because a \parallel b$，$\therefore a, b$ 确定平面 α(推论 3)．

$\because l \cap a = A, l \cap b = B$，且 $A \in \alpha, B \in \alpha$，

$\therefore l \subset \alpha$(公理 1)，$\therefore$ 点 $C \in \alpha$．

又 $a \parallel c$，a、c 确定平面 β，

$\because a \subset \alpha, C \in \alpha, a \subset \beta, C \in \beta$，$\therefore \alpha$ 与 β 重合(公理 3，推论 1)．$\therefore a$、b、c、l、四条直线在 α 平面内．

评析：本题是用文字语言叙述的题目，和平面几何一样，首先要把题目翻译为符号语言，即写出已知、求证并作出示意图，然后证明．

本题能推广为："一条直线与 $n(n \geqslant 2)$ 条平行线相交，那么这 $(n+1)$ 条直线在同一个平面内．"

例 2　试证：内接于空间四边形的任何平面四边形的对边如果相交，那么交点必在空间四边形的对角线上．

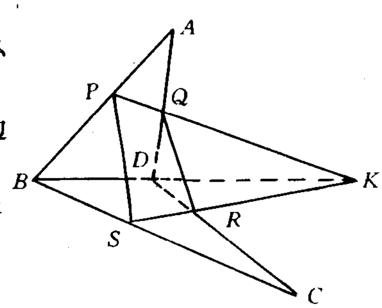


图 1-2

已知：如图 1-2，点 $P \in AB$，点 $S \in BC$，点 $R \in CD$，点 $Q \in AD$，又直线 $PQ \cap SR = K$，平面 $ABD \cap$ 平面 $CBD = BD$．

求证：点 $K \in BD$．

证明：$\because P \in AB, Q \in AD$，

$\therefore PQ \subset$ 平面 ABD，(公理 1)

$\because K \in PQ$，$\therefore K \in$ 平面 ABD. 同理 $K \in$ 平面 CBD，

$\therefore K \in BD$(公理 2).

评析：证明点在直线上，如果该直线是两个平面的交线，那么只要证明这个点同时在这两个平面内，由公理 2 可知，点在交线上. 本题还涉及空间四边形的概念，要注意空间四边形不包括平面四边形.

例 3 已知：$A \notin a$，求证：经过直线 a 与点 A 有且只有一个平面.

证明：如图 1-3，在直线 a 上取二点 B、C，

$\because A \notin a$，$\therefore A$、B、C 三点不共线.

由公理三可知，A、B、C 三点可以确定一个平面 α.

又 $\because B \in a, C \in a, B \in \alpha, C \in \alpha$，

$\therefore$ 直线 $a \subset \alpha$，则经过 a 与 A 点有一个平面 α(存在性).

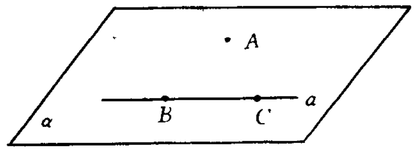


图 1-3

假设经过 a 与 A 点还有一个平面 β，$\because B \in a, a \subset \beta$，

$\therefore B \in \beta$.

同理可证出 $C \in \beta$，那么经过不共线的三点有两个平面，这与公理三矛盾(唯一性)，

$\therefore$ 经过直线 a 与 A 点有且只有一个平面.

评析：证明有且只有一个，必须从两个方面证明，即证明它的存在性和唯一性.

例 4 空间四点，能在同一平面内吗？能确定一个平面吗？并作出示意图.

解：(1) 当四点共线时，这四点能在同一个平面内，但不能确定一个平面，图 1-4.

(2) 当且仅当四点中仅有三点共线时，这四点能在同一平面内，能确定一个平面，如图 1-5.

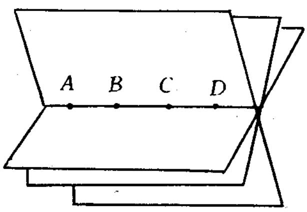


图 1-4

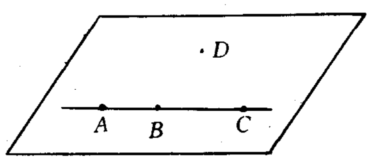


图 1-5

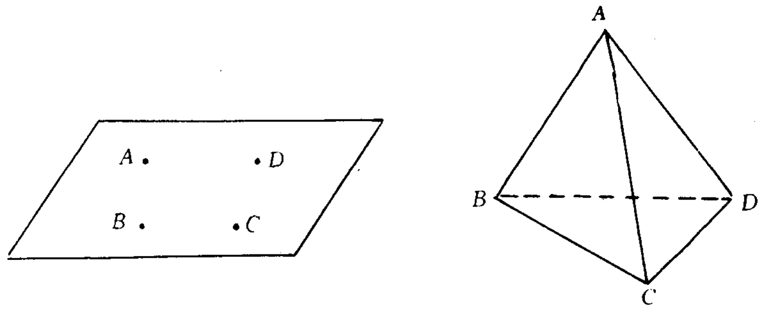
(3) 当四点中任意三点均不共线时，如果四点共面，则能在同一平面内，且能确定一个平面，如果四点不共面，则不能在同一平面内，且不能只确定一个平面(这时确定了四个平面). 如图 1-6(a)、(b).

评析：分类与讨论是重要的数学思想和方法. 对问题进行分类讨论的步骤是确定讨论对象、进行合理分类、逐类讨论并归纳结论. 本题讨论对象是空间四点，分类的标准是其是否共线.

例 5 已知空间四条直线 a、b、c、d 不共点，但两两相交，证明这四条直线必在同一个平面内.

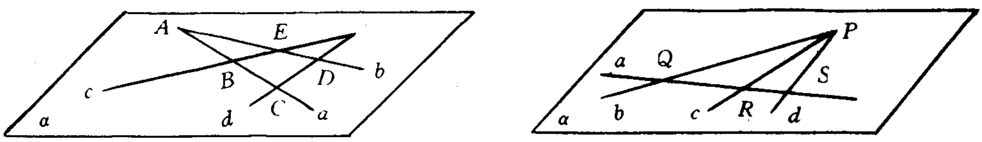
证明：根据题设条件 a、b、c、d 不共点，但两两相交，它们的相交位置有两种情况：(1) 无任何三条直线共一点〔图 1-7(1)〕；(2) 有某三条直线共一点〔图 1-7(2)〕.

(1) 设 $a \cap b = A$，根据公理三推论 2，由 a、b 确定平面 α，则



(a)　　(b)

图 1-6



(1)　　(2)

图 1-7

$$\left.\begin{array}{l} a \cap c = B, \Rightarrow B \in a \subset \text{平面}\ \alpha \\ b \cap c = E, \Rightarrow E \in b \subset \text{平面}\ \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow B、E \in \text{平面}\ \alpha \Rightarrow c \subset \text{平面}\ \alpha.$$

同理可证，$d \subset$ 平面 α，因此，a、b、c、d 在同一个平面 α 内.

(2) 设 $b \cap c \cap d = P$，$a \cap b = Q$，$a \cap c = R$，$a \cap d = S$，根据公理三推论 2，由 a、b 确定平面 α，则

$$\left.\begin{array}{l} P \in b \subset \text{平面}\ \alpha \\ R \in a \subset \text{平面}\ \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow P、R \in \text{平面}\ \alpha \Rightarrow c \subset \text{平面}\ \alpha.$$

同理可证，$d \subset$ 平面 α，因此 a、b、c、d 在同一个平面 α 内.

评析：证明若干直线的共面问题的思路是：先找到其中符合条件（或相交、或平行）的两条直线，根据公理三及其推论确定一个平面，然后再利用公理一证明其它直线也一一落在这个平面内.

例 6　如图 1-8，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，画出对角线 AC_1 和截面 CB_1D_1 的交点.

解：连接 AC、A_1C_1，设 A_1C_1 与 B_1D_1 交于 E 点，C、E 在对角面 AA_1C_1C 上，同时也在截面 CB_1D_1 上，连接 CE，则 CE 即是这两个平面的交线，再连接 AC_1，则 AC_1 与 CE 的交点即为所求之点 P.

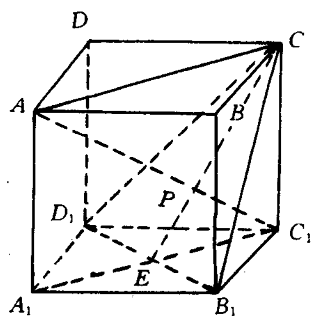


图 1-8

评析：(1) 如果两相交平面有两个公共点，那么连接这两个点的直线就是它们的交线.

(2) 如果两相交平面有三个公共点，那么这三点共线于两平面的交线上.

(3) 如果两个平面相交，那么一个平面内的直线和另一个平面的交点，必在两个平面的交线上.

【基础训练】

一、选择题

1. 空间四点可以确定几个平面?(　　)

A. 1 个　　B. 4 个

C. 无数个　　D. 以上情况都可能

2. 下列几种说法中,正确的是(　　)

A. 空间的三个点确定一个平面　　B. 四边形一定是平面图形

C. 六边形一定是平面图形　　D. 梯形一定是平面图形

3. 下面说法中,正确的是(　　)

A. 平行四边形是一个平面

B. 直线 AB 不能全在平面内

C. 平面 α 和平面 β 只有一个公共点

D. 圆可以确定一个平面

4. 空间三条直线交于同一点,它们确定的平面的个数记为 n,则 n 的可取值为(　　)

A. 1　　B. 1,3　　C. 1,2,3　　D. 1,2,3,4

5. 四条直线顺次首尾连接,可确定平面的个数是(　　)

A. 1　　B. 4　　C. 1 或 4　　D. 3

6. 空间四点 A、B、C、D 共面但不共线,则下面结论成立的是(　　)

A. 四点中必有三点共线

B. 四点中必有三点不共线

C. AB,BC,CD,DA 四条直线中,总有两条平行

D. AB 与 CD 必相交

7. 若点 M 在直线 a 上,a 在平面 α 内,则 M、a、α 间的上述关系的集合表示可记作(　　)

A. $M \in a \in \alpha$　　B. $M \in a \subset \alpha$　　C. $M \subset a \subset \alpha$　　D. $M \subset a \in \alpha$

8. 在下列命题叙述中,正确的是(　　)

A. $\because P \in \alpha, Q \in \alpha, \therefore PQ \in \alpha$

B. $\because P \in \alpha, Q \in \beta, \therefore \alpha \cap \beta = PQ$.

C. $\because AB \subset \alpha, C \in AB, D \in AB, \therefore CD \in \alpha$

D. $\because AB \subset \alpha, AB \subset \beta, \therefore A \in \alpha \cap \beta, B \in \alpha \cap \beta$

9. 一条直线与直线外两点可确定平面的个数是(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 1 个或 2 个　　D. 不能确定

10. 三条互相平行的直线可确定平面的个数是(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 一个或 3 个

11. 空间的三个平面两两相交,那么它们(　　)

A. 必相交于三条平行直线　　B. 必相交于一条直线

C. 不可能只有二条交线　　D. 必相交于一点

12. 图形 1-9 表示两个相交平面,其中画法正确的是(　　)

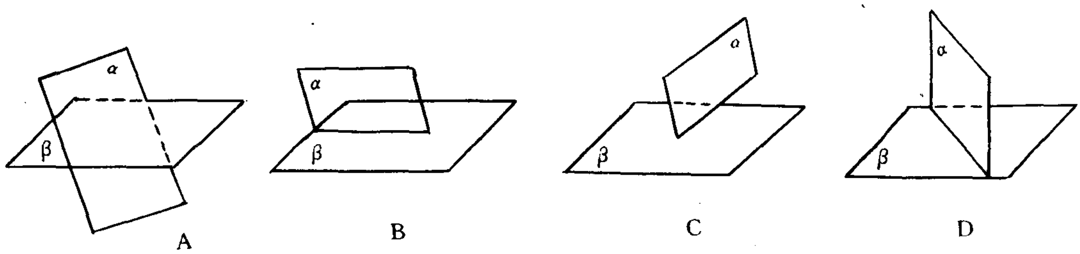


图 1-9

13. 若直线 a 上只有一个点 A 在平面 α 内，而 b 是平面 α 内不经过 A 的一条直线，那么下列表示式中，正确的是(　　)

A. $a \not\subset \alpha$，且 $a \parallel b$　　B. $a \cap \alpha = A$，且 a 不平行于 b

C. $a \cap \alpha = A$，且 $a \perp b$　　D. $a \cap \alpha = A, b \subset \alpha$，但 $A \not\subset b$

14. 判断一个面是否是平面的正确方法是(　　)

A. 若 A、B 是这个面上两定点，直线 AB 在这面上，那么这个面是平面

B. 若 A、B 是这个面上两定点，线段 AB 在这面上，那么这个面是平面

C. 若 A、B 是这个面上任意两点，直线 AB 总在这面上，那么这个面是平面

D. 若 A、B 是这个面上任意两点，直线 AB 上总有无数个点在这面上，那么这个面是平面

15. 下列命题中，正确的是(　　)

A. 若 A、B、C 三点既在平面 α 上，又在平面 β 上，那么 α 与 β 重合

B. 若直线 a 与直线 b 既在平面 α 上，又在平面 β 上，那么 α 与 β 重合

C. 若点 A 与直线 l 既在平面 α 上，又在平面 β 上，那么 α 与 β 重合

D. 若平面 α 上有无数个点同时在 β 上，那么 α 与 β 重合

二、填空题

1. 经过一点可作____个平面；经过二点可作____平面；经过三点的平面有________个.

2. 经过一条直线可作______个平面；过一点的两条直线可确定______个平面；经过一点的三条直线可确定________个平面.

3. 不共线的三个平面两两相交，可把空间分成________个部分.

4. 三点能确定一个平面的条件是__________.

5. 两直线能确定一个平面的条件是__________.

三、解答题

1. 已知二直线 $a \parallel b$，求证：经过 a、b 有且只有一个平面.

2. 求证：若直线与平面相交，则有且仅有一个公共点.

3. 直线 $a \subset$ 平面 α，$a \cap$ 平面 $\beta = M$，且 $\alpha \cap \beta = b$，求证：$M \in b$.

4. 已知：$\alpha \cap \beta = a$，$\beta \cap \gamma = b$，$\gamma \cap \alpha = c$，且 $a \cap b = M$，求证：$M \in c$.

5. 已知：平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$，梯形 $ABCD$，AD、BC 是底，$AB \subset \alpha$，$CD \subset \beta$，求证：直线 AB、CD、l 交于一点.

6. 一个三角形的三边(或延长线)与一个平面都相交，试证这三个交点必在一条直线上.

7. 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为棱 CC_1 和 B_1C_1 的中点，求证：直线 DE 与直线 A_1F 必相交，其交点 P 必在直线 D_1C_1 上，见图 1-10.

8. $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 分别在平面 α、β 内，$\alpha \cap \beta = a$，且 $AB \cap A_1B_1 = P$，$BC \cap B_1C_1 = Q$，$AC \cap A_1C_1 = R$，求证：P、Q、R 在同一直线 a 上，见图 1-11.

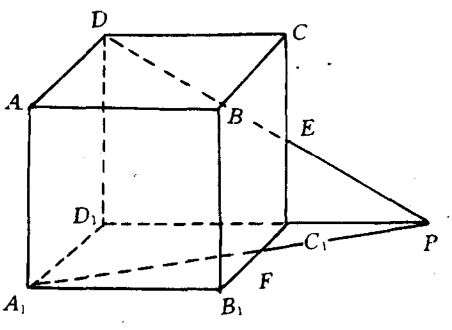


图 1-10

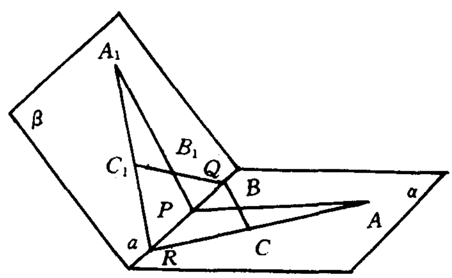


图 1-11

9. 根据下列条件画出图形：平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = MN$，$\triangle ABC$ 的三个顶点满足条件 $A \in MN$，$B \in \alpha$，$B \notin MN$，$C \in \beta$，$C \notin MN$.

10. 如图 1-12，$\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 分别与平面 α 相交于 D、E，画一个平面 β，使 $\triangle ABC$ 在 β 内，并画出 α 与 β 的交线 L，直线 BC 与 α 的交点 P.

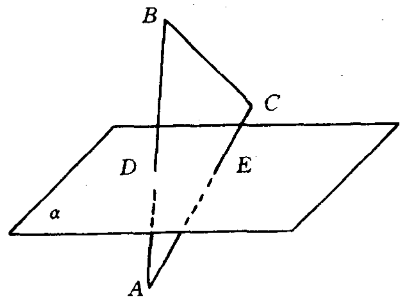


图 1-12

【能力训练】

一、选择题

1. 与空间中不共面的四个点距离相等的平面共有(　　)

A. 4 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

2. 空间中有五条直线，它们两两相交而不过同一点，那么最多可确定的平面个数是(　　)

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 10

3. 四条直线两两平行，但不共面，那么最多可确定的平面个数是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4. 在空间中，下列命题错误的是(　　)

A. 圆上三点可确定一个平面

B. 圆心和圆上两点可确定一个平面

C. 四条平行线不可能确定五个平面

D. 不共面的五点，可确定五个平面，必有三点共线.

5. 图 1-13 中的矩形 $O'A'B'C'$ 是水平放置的一个平面图形的直观图，其中 $O'A' = 4\text{cm}$，$O'C' = 2\text{cm}$，则原图形是(　　)

A. 正方形　　B. 菱形

C. 非矩形与菱形的平行四边形　　D. 以上三种图形以外的四边形

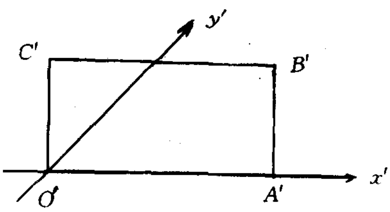


图 1-13

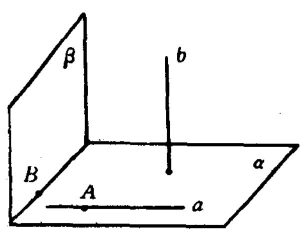


图 1-14

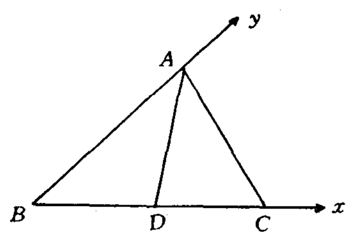


图 1-15

6. 已知点 A、B，直线 a、b，平面 α、β 的位置关系如图 1-14 所示，那么下列符号正确的是(　　)

A. $A \subset \alpha$　　B. $\alpha \cap \beta = B$　　C. $a \in \alpha$　　D. $b \not\subset \alpha$

7. 已知一直线和线外不共线的三点，且其中只有两个点所连直线与已知直线共面，则它们所确定的平面的个数是(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

8. 如图 1-15 表示水平放置的 $\triangle ABC$(其中 AD 为 BC 边上的中线)的直观图,则原 $\triangle ABC$ 中,四条线段最长的是(　　)

A. BC　　B. AC　　C. AB　　D. AD

9. 给出下列四个命题:

(1) 把空间分成两部分的面,就是平面

(2) 一个角确定一个平面

(3) 一个三角形两边中点的连线,一定在这个三角形所在的平面内

(4) 若平面 α 和 β 有公共点 A,则平面 α 和 β 相交于过 A 点的任意一条直线,其中错误命题的个数是(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

10. 有下列四个命题:

(1) 两个平面重合的条件是它们有共同的两条平行直线

(2) n 条直线中任意两条共面,则它们都共面

(3) n 条平行线都和一条直线相交,则它们共面

(4) n 条直线两两相交,则它们共面

其中正确的命题有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

11. 下列推理,错误的是(　　)

A. $A \in l, A \in \alpha; B \in l, B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha$

B. $A \in \alpha, A \in \beta, B \in \alpha, B \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = AB$

C. $l \not\subset \alpha, A \in l \Rightarrow A \notin \alpha$

D. $A、B、C \in \alpha, A、B、C \in \beta$,且 $A、B、C$ 不共线 $\Rightarrow \alpha$ 与 β 重合

12. 下列图形中满足平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = a, AB \subset \alpha, CD \subset \beta, AB \underline{\parallel} CD$ 的图是(　　)

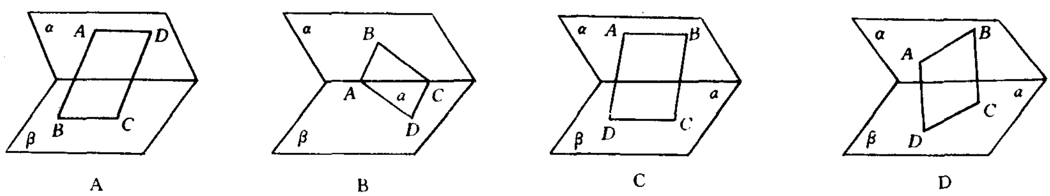


图 1-16

二、填空题

1. 二个平面能把空间分成________部分.

2. 三个平面能把空间分成__________部分.

3. 四个平面最多能把空间分成________部分.

4. 长方体的十二条棱可确定________个平面.

5. 正方体六个面的中心可确定________个平面.

6. 正方体的六个面所在的平面把空间分成______个部分.

7. 若平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$，$A \in \alpha$，但 $A \notin \beta$，$B \in \beta$，但 $B \notin \alpha$，那么直线 AB 与 l 的位置关系是________________.

三、解答题

1. 如图 1-17，正方体 AC_1 中，M、N、P、Q、R、S 分别是正方体各棱的中点，证明 $MNPQRS$ 为平面图形.

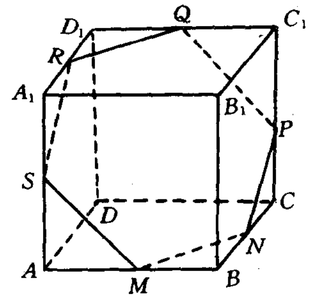


图 1-17

2. 两个不全等的三角形不在同一个平面内，它们的边两两对应平行，试证三对对应顶点连线必相交于一点，见图 1-18.

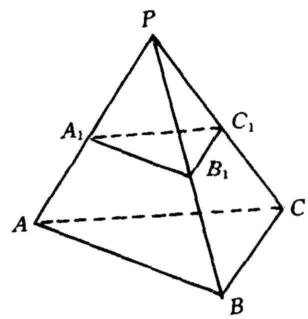


图 1-18

二、空间两条直线

【训练指要】

1. 掌握空间两条直线平行、相交、异面这三种位置关系，以及它们所成角和距离的概念. 对于异面直线的距离，只要求会计算已给出公垂线时的距离.

2. 证明两条直线是异面直线，除利用定理证明外，还常用反证法证明，要求学生理解反证法证明命题的思路.

3. 能够画出空间两条直线的各种位置关系的图形，能够根据图形想象它们的位置关系.

4. 两异面直线所成的角 θ，满足 $0° < \theta \leqslant 90°$，常采用平移的方法转化为相交直线所成的角.

【典题解析】

例 1 已知：$\alpha \cap \beta = a$，$b \subset \beta$，$a \cap b = A$，且 $c \subset \alpha$，$c \parallel a$，

求证：b、c 为异面直线(图 1-19).

证明：证法一：$\because c \subset \alpha$，$a \cap b = A$，$\alpha \cap \beta = a$，

$\therefore A \in a \subset \alpha$，而 $a /\!/ c$，于是 $A \notin c$. 在直线 b 上任取一点 B(不同于 A). $\because b \subset \beta$，$\therefore B \notin \alpha$，

$\therefore AB$ 与 c 为异面直线. 即 b、c 为异面直线.

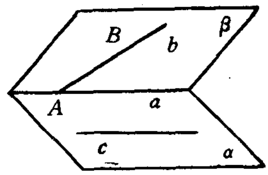


图 1-19

证法二：假设 b、c 不是异面直线，即 b、c 为共面直线，则 b、c 为相交直线或平行直线.

(i) 若 $b \cap c = P$，已知 $b \subset \beta$，$c \subset \alpha$，又 $\alpha \cap \beta = a$，则 $P \in b \subset \beta$，且 $P \in c \subset \alpha$，从而，交点 P 一定在平面 α、β 的交线上(公理二)，即 $P \in a$，于是 $a \cap c = P$，这与已知条件 $a /\!/ c$ 矛盾；因此 b、c 相交不能成立.

(ii) 若 $b /\!/ c$，已知 $a /\!/ c$，则 $a /\!/ b$(公理四)，这与已知条件 $a \cap b = A$ 矛盾，因此 b、c 平行也不能成立.

综合(i)、(ii) 可知 b、c 为异面直线.

证法三：假设 b、c 不是异面直线，即假设直线 b、c 在同一个平面 γ 内，则 $b \subset \gamma$，$c \subset \gamma$.

在直线 b 上任取一点 B(不同于 A，$B \notin \alpha$)；从而，平面 γ 一定经过 B 点与直线 c.

又 $\because A \in a$，$a /\!/ c$，$\therefore A \notin c$，于是经过 c 与 c 外一点 A 的平面就是平面 α，而这样的平面只能有一个(公理三的推论 1)，

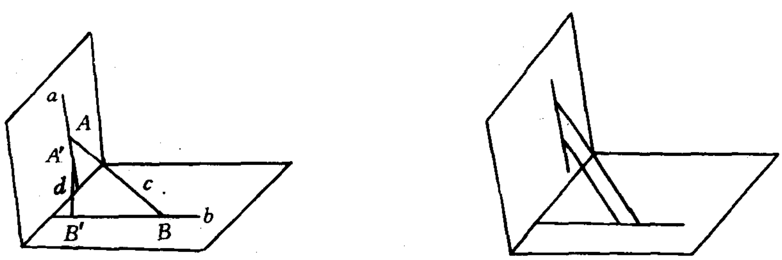
从而，直线 b、c 都在平面 α 内，但 $B \in b \subset \alpha$，这与 $B \notin \alpha$ 矛盾. 因此 b、c 为异面直线.

评析：证法一是直接从已知条件出发，运用异面直线的判定定理，导出结论的直接证法. 证法二是根据空间的两条直线的三种位置关系，把“b、c 为异面直线”的反面看作“b、c 为相交直线或平行直线”，然后逐一用枚举法加反证法予以证明. 证法三是根据异面直线的定义，把“不同在任何一个平面的两条直线”的反面看作“同在某一个平面内的两条直线”，然后导出矛盾.

例 2 与两条异面直线都相交的两条直线有什么样的位置关系？请作出你的判断，并证明判断的正确性.

已知：直线 a、b 为异面直线，直线 c 交 a 于 A、交 b 于 B 点，直线 d 交 a 于 A'，交 b 于 B' 点，如图 1-20(1).

求证：直线 c、d 不平行.



(1) (2)

图 1-20

证明：假定 $c /\!/ d$，则 c、d 确定平面 γ，且 $A, A', B, B' \in \gamma$.

$\because A, A' \in a$，　$B, B' \in b$，且 A, A', B, B' 为不同的四个点，

$\therefore a \subset \gamma$，$b \subset \gamma$，即直线 a、b 共面 γ，这与已知条件 a、b 异面矛盾.

故假定 $c /\!/ d$ 是错误的，即 c 与 d 不平行.

评析：本题易犯的错误之一，是画出了不正确的图形(图 1-20(2))，并由此得出错误的结论"与两条异面直线都相交的两条直线可以平行."易犯的错误之二，是忽略了两条直线有一个公共点的特例(图 1-20(1) 中 A、A' 重合)，于是得出了错误的结论，即"与两条异面直线都相交的两条直线异面."

例 3 如图1-21，空间四边形 $ABCD$，E、F 分别为 BC、CD 的中点，G、H 分别为 AB、AD 上的点，且 $AG:GB \neq AH:HD$，求证：GH 与 EF 是异面直线.

证明：方法一(反证法)：

假设 EF、GH 在同一平面内，那么 EF 与 GH 有两种情况：(1)$EF \parallel GH$；(2)$EF \cap GH = P$.

(1) 若 $EF \parallel GH$，连结 BD，$\because E$、F 分别为 BC、CD 中点，

$\therefore EF \parallel BD$，$\therefore GH \parallel BD$. $\therefore AG:GB = AH:HD$，这与已知 $AG:GB \neq AH:HD$ 相矛盾，所以假设不成立.

(2) 若 $EF \cap GH = P$，$P \in EF$，$EF \subset$ 平面 CBD，$\therefore P$ 在平面 CBD 内，同理可证，P 在平面 ABD 内.

$\therefore P$ 在这两个平面的交线上，$\therefore EF \cap BD = P$，这与 $EF \parallel BD$ 相矛盾，故假设不成立，$\therefore$ 直线 EF 与 GH 是异面直线.

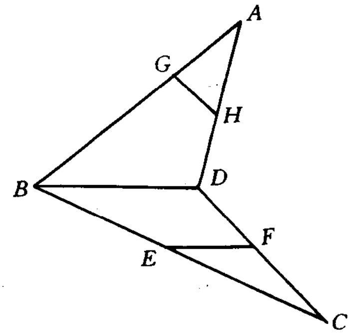


图 1-21

方法二(反证法)：

假设 EF、GH 在同一平面内，如图 1-22.

$\because EF \parallel BD$，$\therefore BD \parallel$ 平面 $EFHG$. $BD \subset$ 平面 ABD，平面 $ABD \cap$ 平面 $EFHG = GH$，$\therefore BD \parallel GH$(线面平行的性质).

$\therefore AG:GB = AH:HD$. 这与已知相矛盾，故假设不成立. $\therefore GH$ 与 EF 是异面直线.

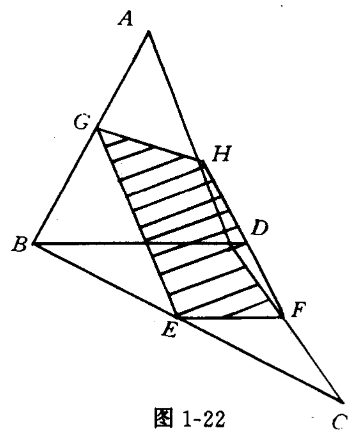


图 1-22

评析：立体几何开始阶段由于已知条件甚少，而其研究对象又往往符合排中律，所以反证法用得较多. 反证法最后都要"归谬"，即出现矛盾. 一般地，出现矛盾有六种情况，即和已知定义矛盾、和已知公理矛盾、和已知定理矛盾、和题设条件矛盾、和开始所作的假设矛盾、或者推出两种不同的结果自相矛盾等等. 高考考试说明中要求学生理解用反证法证明命题的思路，会用反证法证明一些简单的问题.

例 4 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 点分别是 A_1A、C_1C 的中点，求证四边形 BED_1F 是菱形.

证明：取 B_1B 的中点 G，连接 GC_1，如图 1-23.

$\because GB \mathrel{\underline{\parallel}} C_1F$，$\therefore C_1FBG$ 是平行四边形.

$\therefore FB \mathrel{\underline{\parallel}} C_1G$，同理 $GC_1 \mathrel{\underline{\parallel}} D_1E$，

$\therefore FB \mathrel{\underline{\parallel}} D_1E$，$FBED_1$ 是平行四边形.

又 $FB = FD_1 = \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2}$(其中 a 为正方体的棱长)，

$\therefore$ 平行四边形 BED_1F 是菱形.

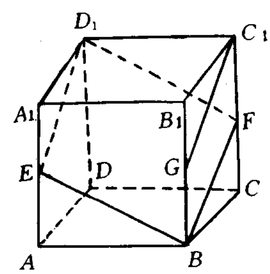


图 1-23