新编中学数学解题方法全书

高中版 上卷

刘培杰 主编

哈爾濱工業大學出版社

高中版 上卷

新编中学数学
解题方法全书

刘培杰　主编

算法之事，不独日用饮食、米盐零杂。有无相易，子母互权，必藉算法为用者。即如度土田而推积步，计道里而定均输，因高广而立商工，凡可尺量寸计而得者，皆有算法存焉。若夫楼台山岳之高，濠堑坑谷之深，河梁海口之遥且阔，虽不能身履其地，苟可望而测之者，亦可算得其数。至于仰观天文，俯察地理，尤以算法为大用焉。故深于算法者，可以析至繁之数。穷至赜之理，造至精至奇之器，夺造化之权舆，泄天人之秘奥。国家因此以富强，天下俱得其便利，其功岂浅鲜哉！

——华衡芳《行宗轩草稿》之七

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书共包括两部分:第一编高中代数,第二编三角函数。本书以专题的形式对中学数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合高中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书.上卷:高中版/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.9

ISBN 7-5603-2426-6

Ⅰ.新… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 111304 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫 刘 瑶
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 28.25 字数 632 千字
版 次 2006 年 11 月第 1 版 2006 年 11 月第 1 次印刷
印 数 1~4 000 册
定 价 38.00 元

目录
CONTENTS

上　　卷

第一编　高中代数

目录 CONTENTS

目录
CONTENTS

第二编　三角函数

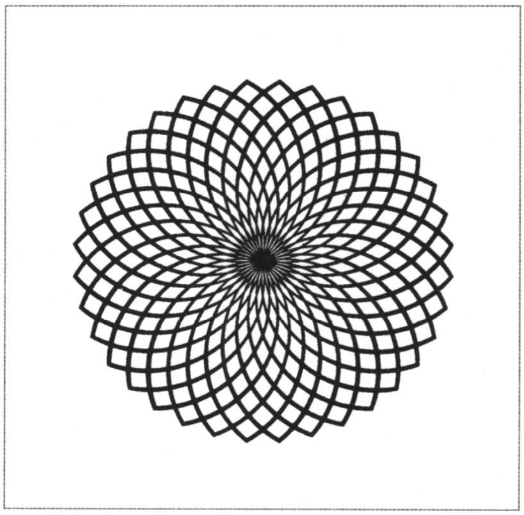
目录 CONTENTS

目录

CONTENTS

第一编

高中代数



数之为物，不借器而存，稽实待虚，其道如《易》，故礼乐代更，而方圆不易；书契形各，世殊方别，而奇偶自如。数之不亡，不能亡也。

——梅文鼎《方程论·数学存古序》

怎样应用 $\varnothing \subseteq A$

数学中规定空集是任何集合的子集，即 $\varnothing \subseteq A$，对此可从两个角度来理解.

一、从子集和空集的概念来理解

子集的定义：如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集. 因为一个命题的逆否命题与原命题等价，所以关于子集的等价定义是：如果不是集合 B 的元素也一定是集合 A 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集.

空集 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合，当然不属于集合 A 的元素，也必定不属于空集 $\varnothing$，所以有 $\varnothing \subseteq A$.

二、从并集概念来理解

并集 $A \cup B$ 定义：由所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的并集，即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

由 $A \cup B$ 的定义得 $A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$. $\varnothing$ 是空集，有 $A \cup \varnothing = A$，故有 $\varnothing \subseteq A \cup \varnothing = A$，即 $\varnothing \subseteq A$.

因此，“空集是任何集合的子集”这个规定是合理的.

在解题中要注意应用这个规定.

例 1 已知 $A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$，$B = \{x \mid x^2 - 2ax + a + 2 \leqslant 0\}$，若 $B \subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

解 当 $B = \varnothing$ 时，二次三项式 $x^2 - 2ax + a + 2$ 的判别式为负，即 $(-2a)^2 - 4(a+2) < 0$，得 $-1 < a < 2$.

设 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2，且 $x_1 < x_2$，这时有

$$B = \{x \mid x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$$

满足 $B \subseteq A$ 的充要条件为

$$\begin{cases} a \geqslant 2 \text{ 或 } a \leqslant -1 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 1 \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} a \geqslant 2 \text{ 或 } a \leqslant -1 \\ a + \sqrt{a^2 - a - 2} \leqslant 4 \\ a - \sqrt{a^2 - a - 2} \geqslant 1 \end{cases}$$

解得(图 1)

$$2 \leqslant a \leqslant \frac{18}{7}$$

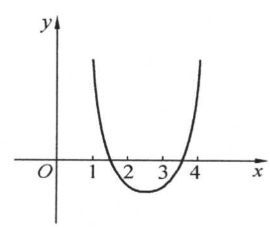


图 1

综合上述，a 的取值范围为

$$-1 < a \leqslant \frac{18}{7}$$

例 2 设 $A = \{x \mid x^2 + px + q = 0, p \in \mathbf{R}, q \in \mathbf{R}\}$，$M = \{1,3,5,7,9\}$，$S = \{1,4,7,10,12\}$，且 $A \cap M = \varnothing$，$A \cap S = A$，求 p, q 满足的条件.

心得 体会 拓广 疑问

解 由题意知道 $A \subseteq \{4,10,12\}$.

因为 $\{4,10,12\}$ 的子集是 $\varnothing$, $\{4\}$, $\{10\}$, $\{12\}$, $\{4,10\}$, $\{4,12\}$, $\{10,12\}$, $\{4,10,12\}$, 又一元二次方程至多有两个根,集合 A 不可能是 $\{4,10,12\}$,于是有:

(1) $A=\varnothing$,这时一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的判别式是负值,即 $p^2<4q$.

(2) $A=\{4\}$,有 $x^2+px+q=(x-4)^2$,得 $p=-8, q=16$.

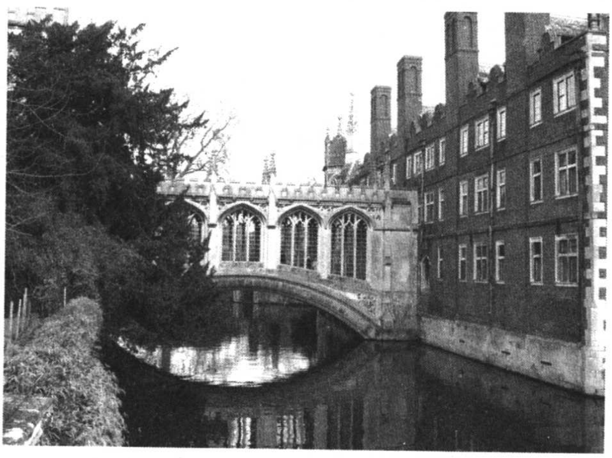
(3) $A=\{10\}$,有 $x^2+px+q=(x-10)^2$,得 $p=-20, q=100$.

(4) $A=\{12\}$,有 $x^2+px+q=(x-12)^2$,得 $p=-24, q=144$.

(5) $A=\{4,10\}$,有 $x^2+px+q=(x-4)(x-10)$,得 $p=-14, q=40$.

(6) $A=\{4,12\}$,有 $x^2+px+q=(x-4)(x-12)$,得 $p=-16, q=48$.

(7) $A=\{10,12\}$,有 $x^2+px+q=(x-10)(x-12)$,得 $p=-22, q=120$.



剑桥大学圣约翰学院叹息桥

尽管数学的系谱是悠久而又朦胧的,但是数学思想是起源于经验的。这些思想一旦产生,这门学科就以其特有的方式生存下去。和任何其他学科,尤其是经验学科相比,数学可以比作一种有创造性的,又几乎完全受审美动机控制的学科。

——J. Von Neumann

怎样用 $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$ 解题

众所周知关于集合的并和交及其交换律、结合律、分配律，还有余(补)集($\overline{A}$)，差集($A\cap\overline{B}$)，对偶原理$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，等等.

本节再介绍一个公式，如果以 $N(A)$ 表示集合 A 中元素个数，则 $N(A)$ 具有若干十分有用的运算公式. 例如，我们不难从图 1 知道 $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$，从图 2 知道 $N(A_1\cup A_2\cup A_3)=N(A_1)+N(A_2)+N(A_3)-N(A_1\cap A_2)-N(A_1\cap A_3)-N(A_2\cap A_3)+N(A_1\cap A_2\cap A_3)$. 从而介绍更一般的公式，即

$$N(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^{n-1}S_n$$

其中，$S_1=\sum\limits_{i=1}^{n}N(A_i)$，$S_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}N(A_i\cap A_j)$，$S_3=\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}N(A_i\cap A_j\cap A_k)$，…，$S_n=N(A_1\cap\cdots\cap A_n)$. 还可从图中看出其他一些公式，如 $N(A\cap\overline{B})=N(A)-N(A\cap B)$，$N(B)=N(A\cap B)-N(A\cap\overline{B})$，$N(\overline{A}\cap\overline{B})=N(I)-N(A\cup B)$，等等.

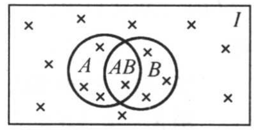


图 1　× 表示元素

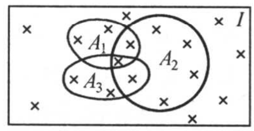


图 2　× 表示元素

心得 体会 拓广 疑问

现举例说明其应用.

例 1　某科研所共有成员 100 名，其中曾获得过科技奖的成员共 50 名，在各种杂志上曾发表过文章的成员共 40 名，发表过文章但没有获奖的成员共 10 名，求下列人数.

(1) 既发表过文章又获奖的成员；

(2) 既没发表过文章也没获奖的成员；

(3) 获奖但没发表过文章的成员.

解　设集合 I,A,B 如下.

$I=\{x\mid x\in\{$所有全体成员$\}\}$，$A=\{x\mid x\in\{$发表过文章的成员$\}\}$，$B=\{x\mid x\in\{$获奖的成员$\}\}$，则

$A\cap\overline{B}=\{x\mid x\in\{$发表过文章但没有获奖的成员$\}\}$

$A\cap B=\{x\mid x\in\{$既发表过文章又获奖的成员$\}\}$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{x\mid x\in\{$既没发表过文章也没获奖的成员$\}\}$

$\overline{A}\cap B=\{x\mid x\in\{$获奖但没发表过文章的成员$\}\}$

由已知条件得到 $N(I)=100$，$N(A)=40$，$N(B)=50$，$N(A\cap\overline{B})=10$.

借助集合中元素个数 $N(A)$ 的运算性质得出

(1) $N(A\cap B)=N(A)-N(A\cap\overline{B})=40-10=30$；

(2) $N(\overline{A}\cap\overline{B})=N(I)-N(A\cup B)=N(I)-(N(A)+N(B)-N(A\cap B))=100-(40+50-30)=40$；

(3) $N(\overline{A}\cap B)=N(B)-N(A\cap B)=50-30=20$.

例 2　某单位共有 10 人懂外语，语种为日语和法语. 其中，有 7 人会日语，6

人会法语.现在要选出一个3人小组出国考察,要求成员满足下列两个条件:

(1) 小组成员至少要会一种外语;

(2) 小组成员中至少有一人同时会法语和日语.

试问该小组共有几种选法?

解 设集合 A 和 B, $A=\{x \mid x\in\{会日语成员\}\}$, $B=\{x \mid x\in\{会法语成员\}\}$,则 $\overline{A\cap B}=\{x \mid x\in\{同时会日语和法语成员\}\}$.

由已知条件 $N(A)=7$, $N(B)=6$, $N(A\cup B)=10$,则 $N(A\cap B)=N(A)+N(B)-N(A\cup B)=7+6-10=3$.考察小组的选法为 $C_3^1\cdot C_7^2+C_3^2\cdot C_7^1+C_3^3=85$.

答:共有85种选法.

例3 试问在1,2,…,100中能被3或4或5整除的数共有多少?

解 设全集 $I=\{x \mid x=1,2,\cdots,100\}$, $A_i=\{x \mid x\in I 且 x 被 i 整除\}$, $i=3,4,5$.

令 $A=A_3\cup A_4\cup A_5$,则所求的数为 $N(A)=N(A_3\cup A_4\cup A_5)=N(A_3)+N(A_4)+N(A_5)-N(A_3\cap A_4)-N(A_3\cap A_5)-N(A_4\cap A_5)+N(A_3\cap A_4\cap A_5)=33+25+20-8-6-5+1=60$.

答:共有60个数.

例4 把 k 个人分配到 n 个教室中去,每个教室最多可容 k 人, $n<k$.问有多少种分配方法使每个教室都有人?

解 记全集 $I=\{x \mid x 为把 k 人分到 n 个教室去的方法\}$, $A_i=\{x \mid x\in I$,第 i 个教室被分配到人, $i=1,2,\cdots,n\}$,则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\{x \mid x\in I$,每个教室都分配到人$\}$, $N(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)$ 为所求之数.直接求此值是困难的,但是求 $N(I)$ 并不难.因为每个人都可能进入任何一个教室,有 n 种分配法, k 个人共有 n^k 种分配方法,此即 $N(I)=n^k$.另一方面,由对偶原理

$$I-\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

$N(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i})$ 比较容易求,其中 $\overline{A_i}=\{x \mid x\in I$,第 i 个教室分不到人, $i=1,2,\cdots,n\}$.所以有 $N(\overline{A_i})=(n-1)^k$.因为此时 k 个人只能进 $n-1$ 个教室(除第 i 个外),从而 $S_1=\sum\limits_{i=1}^{n}(\overline{A_i})=C_n^1(n-1)^k$.由于对 $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\{x \mid x\in I$,第 i 和第 j 个教室未分到人$\}$,故有 $N(A_i\cap A_j)=(n-2)^k$.此时把 k 个人分到其余 $n-2$ 个教室中去,从而

$$S_2=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}N(A_i\cap A_j\cap A_k)=C_n^3(n-3)^k$$

$$\vdots$$

$$S_n=C_n^n(n-n)^k=0$$

最后可得 $N(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)=N(I)-N(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i})=n^k-C_n^1(n-1)^k+C_n^2(n-2)^k-C_n^3(n-3)^k+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\cdot 1^k$ 为所求的结果.

心得 体会 拓广 疑问

怎样解集合、映射、函数的有关问题

一、关于判断两个集合之间的包含关系

设 A,B 是两个非空集合，欲证明 $A\subseteq B$，就是要证明 A 是 B 的子集，应该回到子集的定义中去.

例1 已知集合 $M=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $N=\{x\mid x=6n,n\in\mathbf{Z}\}$，试确定集合 M,N 之间的包含关系.

解 因 $6n=3(2n),n\in\mathbf{Z}$，所以 $2n\in\mathbf{Z}$，故 N 中所有元素都在集合 M 中，即 $N\subseteq M$. 又 M 中的元素 3 不属于 N，所以，$N\subset M$.

例2 数集 $X=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$Y=\{x\mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$，则 X,Y 的关系是( ).

(A) $X\subset Y$ (B) $X\supset Y$ (C) $X=Y$ (D) $X\neq Y$ 且 $X\not\subset Y$, $X\not\supset Y$

解 因为 $2n+1=4\left(\frac{n}{2}\right)+1$.

当 n 为偶数时，则 $\frac{n}{2}\in\mathbf{Z}$，所以 $2n+1=4k+1$.

当 n 为奇数时，则 $4\left(\frac{n}{2}\right)+1=4\left(\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\right)+1=4\left(\frac{n+1}{2}\right)-1$.

所以 $\frac{n+1}{2}\in\mathbf{Z}$，所以 $2n+1=4k-1$，故 $X\subseteq Y$.

反之，$4k+1=2(2k)+1$，因为 $2k\in\mathbf{Z}$，所以 $4k+1=2n+1$，$4k-1=2(2k-1)+1$.

因为 $2k-1\in\mathbf{Z}$，所以 $4k-1=2k+1$，故又 $Y\subseteq X$.

从而推得 $X=Y$，应选(C).

证明两个集合相等，可用定义“若 $A\subseteq B,B\subseteq A$，则 $A=B$”. 这还是涉及判断两个集合之间的包含关系.

例3 设集合 $S=\{x\mid x=14m+36n,m,n\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 判断 2 是否在 S 中；

(2) 试证 S 与全体偶数集相等.

分析 (1) 判断 2 是否在 S 中，即能否找到适当的整数 m,n，使 $14m+36n=2$，通过解不定方程是可以确定的.

(2) 设偶数集 $P=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，欲证明 $S=P$，就要证明 $S\subseteq P$ 且 $P\subseteq S$.

解 (1) 由 $x=14m+36n=2(7m+18n)$，当 $m=-5,n=2$ 时有 $x=2$，所以 $2\in S$.

(2) 设偶数集 $P=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，先证 $S\subseteq P$.

因为 $x=14m+36n=2(7m+18n)$，其中 $m,n\in\mathbf{Z}$，所以 $7m+18n$ 为整数，即 $x=2(7m+18n)$ 为偶数. 所以 $S\subseteq P$.

再证 $P\subseteq S$，由(1)的解法可知 $x=2k=2[7(-5k)+18\cdot2k]$.

因为 $k\in\mathbf{Z}$，令 $-5k=m,2k=n$，则 $m,n\in\mathbf{Z}$.

所以 $x=2k=2(7m+18n)=14m+36n$.

所以 $P\subseteq S$，故 $S=P$.

心得 体会 拓广 疑问

二、关于证明映射 $f:A\to B$ 是一一映射

怎样证明 $f:A\to B$ 是一一映射,课本对此只是直观说明,而无严格证明.事实上,根据一一映射的定义,其证明步骤如下.

(1) 先证 $f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 上的映射(如问题已指出是映射,此步可从略).

(2) 再证 f 是 A 到 B 上的一一映射.

1) 对于集合 A 中不同元素,在集合 B 中有不同的像;

2) B 中每一个元素都有原像.

例 4 已知 f 是集合 $\mathbf{R}^+$ 到集合 $\mathbf{R}$ 上的映射,$f:x\to\lg x,x\in\mathbf{R}^+$,求证:映射 f 是一一映射.

证明 因为题设已指出 f 是映射,只要证 f 是一一映射就行了.下面从两个方面加以证明.

(1) 设 $x_1\neq x_2$,且 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$,则 $y_1=\lg x_1,y_2=\lg x_2$,且 $y_1,y_2\in\mathbf{R}$.

$$y_1-y_2=\lg x_1-\lg x_2=\lg\frac{x_1}{x_2} \quad ①$$

因为 $x_1\neq x_2$,且 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$,所以 $\frac{x_1}{x_2}\neq 1$.

所以 $\lg\frac{x_1}{x_2}\neq 0$,即式 ① 中 $y_1\neq y_2$.

故 $\mathbf{R}^+$ 中的不同元素在 $\mathbf{R}$ 中有不同的像.

(2) 设 $y_3\in\mathbf{R}$,且 $y_3=\lg x_3$,则 $x_3=10^{y_3}>0$,所以 $x_3\in\mathbf{R}^+$.

故 $\mathbf{R}$ 中每一个元素在 $\mathbf{R}^+$ 中都有原像.

由(1)、(2) 可知,映射 f 是从 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}$ 的一一映射.

例5 设集合 $A=\{\theta\mid 0<\theta<2\pi\}$,$B=\{(x,y)\mid x=\sin\theta,y=2\sin\theta\cos\theta\}$.

(1) 证明:$f:A\to B$ 是一一映射;

(2) 求 B 中的点到原点的最大距离.

证明 (1) 先证 f 是映射.

设 $\theta_1\in(0,2\pi)$,则 $x_1=\sin\theta_1,y_1=\sin 2\theta_1$.$(x_1,y_1)$ 唯一确定,所以 f 是 $A\to B$ 的映射.

再证 f 是一一映射.

1) 设 $\theta_1\neq\theta_2$,且 $\theta_1,\theta_2\in(0,2\pi)$,则 $\begin{cases}x_1=\sin\theta_1\\ y_1=\sin 2\theta_1\end{cases}$,$\begin{cases}x_2=\sin\theta_2\\ y_2=\sin 2\theta_2\end{cases}$.

若 $x_1\neq x_2$,则不论 y_1 与 y_2 是否相等,都有 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$,B 中有不同的像.

若 $x_1=x_2$,即

$$\sin\theta_1=\sin\theta_2 \quad ①$$

由 $\theta_1,\theta_2\in(0,2\pi)$ 和式 ① 可知 $\theta_1+\theta_2=\pi$ 或 $\theta_1+\theta_2=3\pi$.则 $y_1=\sin 2\theta_1$;$y_2=\sin 2\theta_2=\sin 2(\pi-\theta_1)=-\sin 2\theta_1$ 或 $y_2=\sin 2\theta_2=\sin 2(3\pi-\theta_1)=-\sin 2\theta_1$.此时均有 $y_1\neq y_2$,所以 $(x_1,y_2)\neq(x_2,y_2)$.即 B 中有不同的像.

所以 A 中的不同元素,在 B 中有不同的像.

2) 设$\begin{cases} x_3 = \sin\theta_3 \\ y_3 = \sin 2\theta_3 \end{cases}$.

当 $x_3 = 0$ 时,即 $\sin\theta_3 = 0$,取 $\theta_3 = \pi$,则 $\theta_3 \in (0,2\pi)$,此时 $y_3 = 0$.

当 $x_3 \neq 0$ 时,易证 $\cos\theta_3 = \dfrac{y_3}{2x_3} < 1$.

所以总有 $\theta_3 \in (0,2\pi)$ 的值存在,即 B 中每一个元素有原像.

由 1)、2) 知,f 是 A 到 B 上的一一映射.

(2) 设 B 中的任意一点到原点的距离为 d,则

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\sin^2\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta} = \sqrt{-4(\sin^2\theta - \frac{5}{8})^2 + \frac{25}{16}}$$

所以当 $\sin^2\theta = \dfrac{5}{8}$ 时,$d_{\max} = \dfrac{5}{4}$.

三、关于函数概念、性质

例 6　如图1所示,正方形 $CDEF$ 的边长为 4,截去一个角 ABF,得到五边形 $ABCDE$. 已知 $AF = 2$,$BF = 1$,在 AB 上取一点 P,过 P 作 CD,DE 的平行线得矩形 $PNDM$,试求矩形 $PNDM$ 的最值.

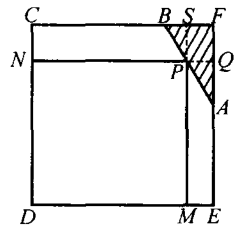


图 1

解　延长 NP,MP 分别和 EF,CF 交于 Q,S.

设 $PQ = x(0 \leqslant x \leqslant 1)$,则 $PN = 4 - x$.

由相似三角形可以求得 $PS = 2 - 2x$,所以 $PM = 4 - (2 - 2x) = 2 + 2x$.

设矩形 $PNDM$ 的面积为 $S(x)$,则

$$S(x) = (4 - x)(2 + 2x) = -2(x - \frac{3}{2})^2 + 12\frac{1}{2}$$

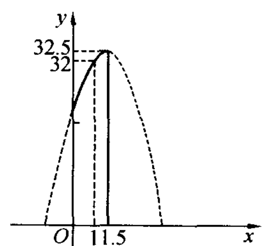


图 2

由图 2 可知抛物线顶点横坐标不在闭区间[0,1]内,所以

$$S_{\max} = S\,|_{x=1} = 12, \quad S_{\min} = S\,|_{x=0} = 8$$

例 7　已知 $m \in \mathbf{R}$,方程 $x^2 + 2mx - 3m + 1 = 0$ 有实数根 x_1 和 x_2,试求 $x_1^2 + x_2^2$ 的最值.

解　因为 $\Delta = 4m^2 + 4(3m - 1) = 4(m^2 + 3m - 1) \geqslant 0$,所以

$$m \leqslant \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \text{ 或 } m \geqslant \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \qquad ①$$

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -2m$,$x_1 \cdot x_2 = -(3m - 1)$.

令 $u = x_1^2 + x_2^2$,则

$$u = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{4} \qquad ②$$

将 $m = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ 代入式 ② 得

$$u = 4\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{4} = 11 - 3\sqrt{13}$$

将 $m = \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ 代入式 ② 得 $u = 11 + 3\sqrt{13}$. 所以

$$u_{\min} = 11 - 3\sqrt{13}$$

这里,有些读者可能会不考虑判别式,用顶点法求,显然是错的. 有的求出最大值是 $11 + 3\sqrt{13}$ 也不对. 从式 ② 可知当 $m \to +\infty$ 或 $m \to -\infty$,均有 $u \to +\infty$,所以 u 无最大值.

从上述两例可以看出,在实际问题中,常因不考虑定义域而导致错误的结论,因而结合定义域求法,加强这方面训练是必要的.