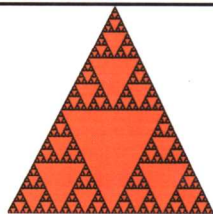


高中版 上卷



新编中学数学

解题方法全书

刘培杰 主编

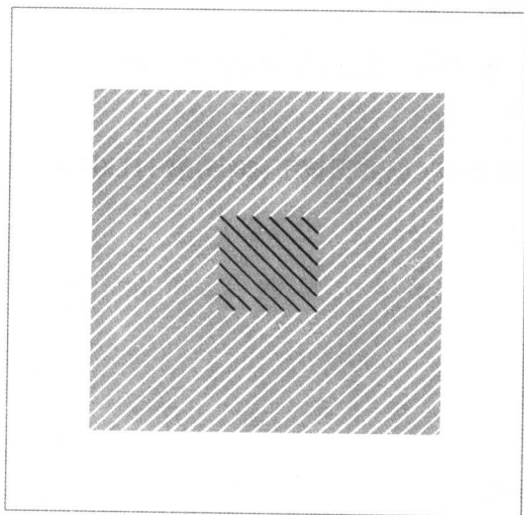


哈尔滨工业大学出版社



新编中学数学 解题方法全书

刘培杰 主编



算法之事，不独日用饮食、米盐零杂。有无相易，子母互权，必藉算法为用者。即如度土田而推积步，计道里而定均输，因高广而立商工，凡可尺寸量寸计而得者，皆有算法存焉。若夫楼台山岳之高，濠堦坑谷之深，河梁海口之遥且阔，虽不能身履其地，苟可望而测之者，亦可算得其数。至于仰观天文，俯察地理，尤以算法为大用焉。故深于算法者，可以析至繁之数。穷至赜之理，造至精至奇之器，夺造化之权舆，泄天人之秘奥。国家因此以富强，天下俱得其便利，其功岂浅鲜哉！

——华衡芳《行宗轩草稿》之七

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书共包括两部分:第一编高中代数,第二编三角函数。本书以专题的形式对中学数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大幅度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合高中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书.上卷:高中版/刘培杰
主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.9

ISBN 7-5603-2426-6

I.新… II.刘… III.数学课-高中-解题
IV.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 111304 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫 刘 瑶
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 28.25 字数 632 千字
版 次 2006 年 11 月第 1 版 2006 年 11 月第 1 次印刷
印 数 1~4 000 册
定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



上 卷

第一编 高中代数

怎样应用 $\emptyset \subseteq A$	3
怎样用 $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ 解题	5
怎样解集合、映射、函数的有关问题	7
怎样用补集思想解题	10
怎样在解集合问题时“前思后想”	14
怎样应用相等且有限的数集的性质	17
怎样利用一一映射概念解题	19
怎样计算有限集元素的个数	21
怎样理解反函数(I)	24
怎样理解反函数(II)	27
怎样求反函数	30
怎样求复合函数的反函数	33
怎样利用函数图象的对称性解题	35
怎样求函数解析式	39
怎样在求函数解析式时讨论定义域	42
怎样利用函数定义域解题	45
怎样避免解题中出现与定义域有关的常见错误	49
怎样确定不等式恒成立的参数的取值范围	52
怎样求函数 $y = ax + b + k \sqrt{cx + d}$ 的值域	56
怎样用图象法求一类函数的值域	59
怎样用换元法求一类函数的值域	62
怎样用斜率法求一类函数的值域	64
怎样求函数的值域(I)	66
怎样求函数的值域(II)	70
怎样用特殊的函数值解题	72
怎样求二元函数极值	74
怎样用几何意义巧求最值	79
怎样利用两个函数单调性求一类分式函数的最值	80

目 录

CONTENTS

目 录
CONTENTS

怎样证明绝对值不等式	82
怎样用不等式的解域解题	84
怎样用“搭棚子”解不等式	87
怎样用特殊方法解不等式	90
怎样解含参数的各类不等式	92
怎样用升次、降次、拆项及引进新参数法证明不等式	94
怎样证明循环对称不等式	96
怎样证一类对称形不等式	101
怎样证不等式 $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ ($a > 0, b > 0, n \in \mathbf{N}$)	104
怎样证明算术 - 几何平均值不等式	108
怎样解形如 $(ax^2 + bx + c)^{mx^2 + nx + p} > S$ 型“超越不等式”	109
怎样解绝对值不等式	112
怎样运用放缩法证明不等式 (I)	114
怎样运用放缩法证明不等式 (II)	116
怎样用设值法证明不等式	118
怎样避免函数学习中的几个常见错误	122
怎样利用一次函数性质解题	125
怎样应用函数的性质解题	127
怎样构造函数 $f(x) = kx + b$ 解题	131
怎样用构造二次函数法巧解高考题	134
怎样用构造法解一类具有相同数式结构的问题	138
怎样利用参数研究二次函数的最值和作图	142
怎样求复合函数的单调区间	144
怎样判定复合函数单调性	146
怎样利用一次函数的保号性解题	148
怎样用图解法求函数 $f(t) = \varphi(t) + kQ(t)$ 的最值	150
怎样应用反函数的几个性质解题	152
怎样用单调函数法比较对数大小	154
怎样利用函数的单调性解题	155
怎样证明函数 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ 的单调性	162
怎样用简易方法解高次不等式	164
怎样应用换底公式的几个推论	166
怎样比较不同底的对数大小 (I)	169
怎样比较不同底的对数大小 (II)	170
怎样用转化放缩法比较对数的大小	173
怎样用幂函数、指数函数、对数函数的性质解题	175
怎样利用方程的思想解题	178
怎样利用揭示周期法解题	182
怎样求函数 $f(x)$ 周期	184



怎样用初等方法解函数方程	188
怎样用图象法解一类含参数方程	192
怎样巧解形状整齐的方程组	194
怎样用多项式的性质证明恒等式	196
怎样利用函数的性质求方程的解	198
怎样用图象法确定二次方程中参数的取值范围	200
怎样对含参数的不等式中的参数进行讨论	203
怎样解含参数的对数方程	205
怎样对对数方程的根进行舍取	208
怎样解 $f(x)\sqrt{h(x)-g^2(x)}+g(x)\sqrt{h(x)-f^2(x)}=h(x)$ 型方程	211
怎样运用添项法证明一类不等式	213
怎样巧用构造法证明不等式(I)	216
怎样巧用构造法证明不等式(II)	218
怎样用换元法证明分式不等式	223
怎样用换元法证明不等式	226
怎样妙用函数单调性解不等式	228
怎样应用 $(a \pm b\sqrt{c})^n = A_n \pm B_n\sqrt{c}$	230
怎样求某些特殊类型代数函数的极值	232
怎样求正弦复合函数的极值	234
怎样用图象法求条件极值	240

目 录

CONTENTS

第二编 三角函数

怎样用三角函数的定义解题	249
怎样证明单角三角恒等式	253
怎样证明三角条件等式	256
怎样在三角恒等变形中消元	261
怎样求三角函数连乘积的值	266
怎样在三角函数中运用比例性质解题	269
怎样在代数中使用三角代换	271
怎样求 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + a\sin\alpha\sin\beta$ 的值	275
怎样挖掘有关三角函数问题中的隐含条件	277
怎样发挥三角函数有界性的解题功能	280
怎样探求三角函数问题的一题多解	283
怎样用部分分式速求函数值域	286
怎样求函数 $u = \frac{b\sin\theta + d}{a\cos\theta + c}$ 的值域	288
用三角法求 $y = \sqrt{ax + b} \pm \sqrt{cx + d}$ 型函数的值域	291
怎样求三角函数式的最值(I)	293

目
录
CONTENTS

怎样求三角函数式的最值(II)	300
怎样用数学思想探求三角函数的最值	304
怎样巧求函数 $y = A\sin^m x + B\cos^n x$ 的最小值	307
怎样求函数 $y = a\sin^2 x + b\sin x + c$ 的极值	310
怎样求 $\frac{f(\cos^2 \theta)}{g(\sin^2 \theta)}$ 型三角函数的极值	313
怎样用单位圆解题	315
怎样用半单位圆的性质解题	319
怎样利用单位圆证明三角不等式	322
怎样使用点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 在单位圆上解题	324
怎样利用单位圆实现数形迁移	327
怎样求三角函数的解析式	330
怎样求一些正(余)切函数的最小正周期	332
怎样解证有关最小正周期问题	336
怎样用最小周期解三角函数方程	339
怎样利用和差换元巧解三角函数问题	341
怎样解含参数的三角问题	344
怎样用构造辅助方程法解三角问题	347
怎样解关于三角形的定形问题	350
怎样利用正余弦函数的轴对称性解题	354
怎样利用三角函数定义结合图象解三角函数不等式	357
怎样用辅助元素法证明三角函数不等式	360
怎样利用参数方程和图象法解三角函数不等式	365
怎样应用函数值相同解三角函数方程	371
怎样用 $\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$ 的结果解题	374
怎样运用三角函数知识讨论方程解的个数	377
怎样在指定区间上解三角函数方程	379
怎样判断三角函数方程的解集是否相等	382
怎样对三角函数方程通值式进行化简与对增根进行分离	386
怎样求方程 $x^2 f(x) + xg(x) + q(x) = 0$ 的实根($f(x)$ 或 $g(x)$ 为三角函数)	392
怎样应用 $a\sin x + b\cos x = c$ 的判别式	395
怎样对 $f(x) = a\sin x + b\cos x$ 进行求值化简证明	397
怎样应用三角公式 $\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C}$ 解题	400
怎样用解析法解三角函数问题	404
怎样取反三角函数	408
怎样应用三角函数线解题	410
怎样求关于形如 $\arcsin(\sin x)$ 的值	412
怎样解涉及和(差)角范围的问题	413

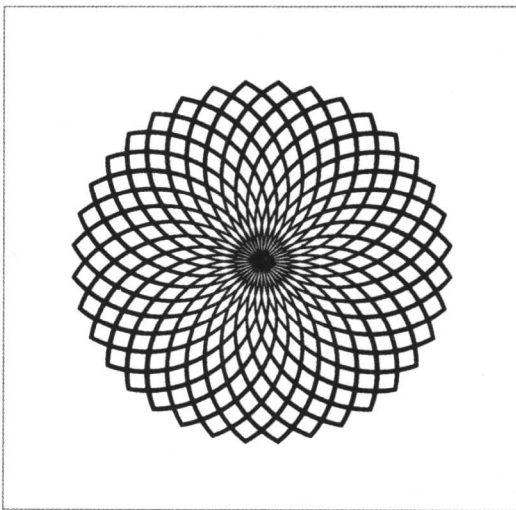
怎样用反三角函数解题	417
怎样用取正余弦法证明反三角函数恒等式	421
怎样求反三角函数的数列和	424
怎样证明反三角函数恒等式(I)	427
怎样证明反三角函数恒等式(II)	429
怎样用反三角函数表示非定义区间的角	431
怎样用三角法证明关于椭圆的命题	434
怎样用三角法证明关于双曲线的命题	436
怎样用三角代换法证明不等式	439

目录

CONTENTS

第一编

高中代数



数之为物，不借器而存，稽实待虚，其道如《易》，故礼乐代更，而方圆不易；书契形各，世殊方别，而奇偶自如。数之不亡，不能亡也。

——梅文鼎《方程论·数学存古序》

怎样应用 $\emptyset \subseteq A$

数学中规定空集是任何集合的子集,即 $\emptyset \subseteq A$,对此可从两个角度来理解.

一、从子集和空集的概念来理解

子集的定义:如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集.因为一个命题的逆否命题与原命题等价,所以关于子集的等价定义是:如果不是集合 B 的元素也一定是集合 A 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集.

空集 \emptyset 是不含任何元素的集合,当然不属于集合 A 的元素,也必定不属于空集 \emptyset ,所以有 $\emptyset \subseteq A$.

二、从并集概念来理解

并集 $A \cup B$ 定义:由所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A, B 的并集,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

由 $A \cup B$ 的定义得 $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$. \emptyset 是空集,有 $A \cup \emptyset = A$,故有 $\emptyset \subseteq A \cup \emptyset = A$,即 $\emptyset \subseteq A$.

因此,“空集是任何集合的子集”这个规定是合理的.

在解题中要注意应用这个规定.

例 1 已知 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}, B = \{x \mid x^2 - 2ax + a + 2 \leq 0\}$,若 $B \subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

解 当 $B = \emptyset$ 时,二次三项式 $x^2 - 2ax + a + 2$ 的判别式为负,即 $(-2a)^2 - 4(a + 2) < 0$,得 $-1 < a < 2$.

设 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 ,且 $x_1 < x_2$,这时有

$$B = \{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$$

满足 $B \subseteq A$ 的充要条件为

$$\begin{cases} a \geq 2 \text{ 或 } a \leq -1 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 1 \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} a \geq 2 \text{ 或 } a \leq -1 \\ a + \sqrt{a^2 - a - 2} \leq 4 \\ a - \sqrt{a^2 - a - 2} \geq 1 \end{cases}$$

解得(图 1)

$$2 \leq a \leq \frac{18}{7}$$

综合上述, a 的取值范围为

$$-1 < a \leq \frac{18}{7}$$

例 2 设 $A = \{x \mid x^2 + px + q = 0, p \in \mathbf{R}, q \in \mathbf{R}\}, M = \{1, 3, 5, 7, 9\}, S = \{1, 4, 7, 10, 12\}$,且 $A \cap M = \emptyset, A \cap S = A$,求 p, q 满足的条件.

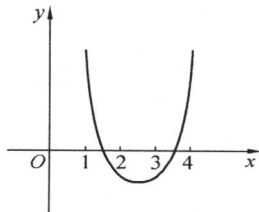


图 1

解 由题意知道 $A \subseteq \{4, 10, 12\}$.

因为 $\{4, 10, 12\}$ 的子集是 $\emptyset, \{4\}, \{10\}, \{12\}, \{4, 10\}, \{4, 12\}, \{10, 12\}, \{4, 10, 12\}$, 又一元二次方程至多有两个根, 集合 A 不可能是 $\{4, 10, 12\}$, 于是有:

(1) $A = \emptyset$, 这时一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的判别式是负值, 即 $p^2 < 4q$.

(2) $A = \{4\}$, 有 $x^2 + px + q = (x - 4)^2$, 得 $p = -8, q = 16$.

(3) $A = \{10\}$, 有 $x^2 + px + q = (x - 10)^2$, 得 $p = -20, q = 100$.

(4) $A = \{12\}$, 有 $x^2 + px + q = (x - 12)^2$, 得 $p = -24, q = 144$.

(5) $A = \{4, 10\}$, 有 $x^2 + px + q = (x - 4)(x - 10)$, 得 $p = -14, q = 40$.

(6) $A = \{4, 12\}$, 有 $x^2 + px + q = (x - 4)(x - 12)$, 得 $p = -16, q = 48$.

(7) $A = \{10, 12\}$, 有 $x^2 + px + q = (x - 10)(x - 12)$, 得 $p = -22, q = 120$.

心得体会 拓广 疑问



剑桥大学圣约翰学院叹息桥

尽管数学的系谱是悠久而又朦胧的,但是数学思想是起源于经验的。这些思想一旦产生,这门学科就以其特有的方式生存下去。和任何其他学科,尤其是经验学科相比,数学可以比作一种有创造性的,又几乎完全受审美动机控制的学科。

——J. Von Neumann

怎样用 $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ 解题

众所周知关于集的并和交及其交换律、结合律、分配律,还有余(补)集(\bar{A}),差集($A \cap \bar{B}$),对偶原理 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$,等等.

本节再介绍一个公式,如果以 $N(A)$ 表示集合 A 中元素个数,则 $N(A)$ 具有若干十分有用的运算公式.例如,我们不难从图 1 知道 $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$,从图 2 知道 $N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - N(A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.从而介绍更一般的公式,即

$$N\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

其中, $S_1 = \sum_{i=1}^n N(A_i)$, $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(A_i \cap A_j)$, $S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(A_i \cap A_j \cap A_k)$, \cdots , $S_n = N(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$.还可从图中看出其他一些公式,如 $N(A \cap \bar{B}) = N(A) - N(A \cap B)$, $N(B) = N(A \cap B) - N(A \cap \bar{B})$, $N(\bar{A} \cap \bar{B}) = N(I) - N(A \cup B)$,等等.

现举例说明其应用.

例 1 某科研所共有成员 100 名,其中曾获得过科技奖的成员共 50 名,在各种杂志上曾发表过文章的成员共 40 名,发表过文章但没有获奖的成员共 10 名,求下列人数.

- (1) 既发表过文章又获奖的成员;
- (2) 既没发表过文章也没获奖的成员;
- (3) 获奖但没发表过文章的成员.

解 设集合 I, A, B 如下.

$I = \{x \mid x \in \{\text{所有全体成员}\}\}$, $A = \{x \mid x \in \{\text{发表过文章的成员}\}\}$, $B = \{x \mid x \in \{\text{获奖的成员}\}\}$, 则

$$A \cap \bar{B} = \{x \mid x \in \{\text{发表过文章但没有获奖的成员}\}\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in \{\text{既发表过文章又获奖的成员}\}\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{x \mid x \in \{\text{既没发表过文章也没获奖的成员}\}\}$$

$$\bar{A} \cap B = \{x \mid x \in \{\text{获奖但没发表过文章的成员}\}\}$$

由已知条件得到 $N(I) = 100$, $N(A) = 40$, $N(B) = 50$, $N(A \cap \bar{B}) = 10$.

借助集合中元素个数 $N(A)$ 的运算性质得出

$$(1) N(A \cap B) = N(A) - N(A \cap \bar{B}) = 40 - 10 = 30;$$

$$(2) N(\bar{A} \cap \bar{B}) = N(I) - N(A \cup B) = N(I) - (N(A) + N(B) - N(A \cap B)) = 100 - (40 + 50 - 30) = 40;$$

$$(3) N(\bar{A} \cap B) = N(B) - N(A \cap B) = 50 - 30 = 20.$$

例 2 某单位共有 10 人懂外语,语种为日语和法语.其中,有 7 人会日语,6

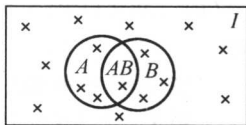


图 1 x 表示元素

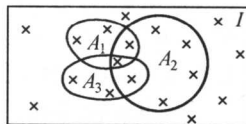


图 2 x 表示元素

心得 体会 拓广 疑问

人会法语.现在要选出一个3人小组出国考察,要求成员满足下列两个条件:

- (1) 小组成员至少要会一种外语;
- (2) 小组成员中至少有一人同时会法语和日语.

试问该小组共有几种选法?

解 设集合 A 和 B , $A = \{x \mid x \in \{\text{会日语成员}\}\}$, $B = \{x \mid x \in \{\text{会法语成员}\}\}$, 则 $\overline{A \cap B} = \{x \mid x \in \{\text{同时会日语和法语成员}\}\}$.

由已知条件 $N(A) = 7$, $N(B) = 6$, $N(A \cup B) = 10$, 则 $N(A \cap B) = N(A) + N(B) - N(A \cup B) = 7 + 6 - 10 = 3$. 考察小组的选法为 $C_3^1 \cdot C_7^2 + C_3^2 \cdot C_7^1 + C_3^3 = 85$.

答:共有 85 种选法.

例 3 试问在 $1, 2, \dots, 100$ 中能被 3 或 4 或 5 整除的数共有多少?

解 设全集 $I = \{x \mid x = 1, 2, \dots, 100\}$, $A_i = \{x \mid x \in I \text{ 且 } x \text{ 被 } i \text{ 整除}\}$, $i = 3, 4, 5$.

令 $A = A_3 \cup A_4 \cup A_5$, 则所求的数为 $N(A) = N(A_3 \cup A_4 \cup A_5) = N(A_3) + N(A_4) + N(A_5) - N(A_3 \cap A_4) - N(A_3 \cap A_5) - N(A_4 \cap A_5) + N(A_3 \cap A_4 \cap A_5) = 33 + 25 + 20 - 8 - 6 - 5 + 1 = 60$.

答:共有 60 个数.

例 4 把 k 个人分配到 n 个教室中去, 每个教室最多可容 k 人, $n < k$. 问有多少种分配方法使每个教室都有人?

解 记全集 $I = \{x \mid x \text{ 为把 } k \text{ 人分到 } n \text{ 个教室去的方法}\}$, $A_i = \{x \mid x \in I, \text{ 第 } i \text{ 个教室被分配到人}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 则 $\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in I, \text{ 每个教室都分配到人}\}$, $N(\bigcap_{i=1}^n A_i)$ 为所求之数. 直接求此值是困难的, 但是求 $N(I)$ 并不难. 因为每个人都可能进入任何一个教室, 有 n 种分配法, k 个人共有 n^k 种分配方法, 此即 $N(I) = n^k$. 另一方面, 由对偶原理

$$I - \bigcap_{i=1}^n A_i = \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$N(\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i})$ 比较容易求, 其中 $\overline{A_i} = \{x \mid x \in I, \text{ 第 } i \text{ 个教室分不到人}, i = 1, 2, \dots, n\}$. 所以有 $N(\overline{A_i}) = (n-1)^k$. 因为此时 k 个人只能进 $n-1$ 个教室(除第 i 个外), 从而 $S_1 = \sum_{i=1}^n N(\overline{A_i}) = C_n^1 (n-1)^k$. 由于对 $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \{x \mid x \in I, \text{ 第 } i \text{ 和第 } j \text{ 个教室未分到人的}\}$, 故有 $N(A_i \cap A_j) = (n-2)^k$. 此时把 k 个人分到其余 $n-2$ 个教室中去, 从而

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) = C_n^3 (n-3)^k$$

⋮

$$S_n = C_n^n (n-n)^k = 0$$

最后可得 $N(\bigcap_{i=1}^n A_i) = N(I) - N(\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}) = n^k - C_n^1 (n-1)^k + C_n^2 (n-2)^k - C_n^3 (n-3)^k + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^k$ 为所求的结果.

怎样解集合、映射、函数的有关问题

一、关于判断两个集合之间的包含关系

设 A, B 是两个非空集合, 欲证明 $A \subseteq B$, 就是要证明 A 是 B 的子集, 应该回到子集的定义中去.

例 1 已知集合 $M = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$, 集合 $N = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbf{Z}\}$, 试确定集合 M, N 之间的包含关系.

解 因 $6n = 3(2n)$, $n \in \mathbf{Z}$, 所以 $2n \in \mathbf{Z}$, 故 N 中所有元素都在集合 M 中, 即 $N \subseteq M$. 又 M 中的元素 3 不属于 N , 所以, $N \subset M$.

例 2 数集 $X = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $Y = \{x \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 X, Y 的关系是().

(A) $X \subset Y$ (B) $X \supset Y$ (C) $X = Y$ (D) $X \neq Y$ 且 $X \not\subset Y, X \not\supset Y$

解 因为 $2n + 1 = 4\left(\frac{n}{2}\right) + 1$.

当 n 为偶数时, 则 $\frac{n}{2} \in \mathbf{Z}$, 所以 $2n + 1 = 4k + 1$.

当 n 为奇数时, 则 $4\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = 4\left(\frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 = 4\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1$.

所以 $\frac{n+1}{2} \in \mathbf{Z}$, 所以 $2n + 1 = 4k - 1$, 故 $X \subseteq Y$.

反之, $4k + 1 = 2(2k) + 1$, 因为 $2k \in \mathbf{Z}$, 所以 $4k + 1 = 2n + 1, 4k - 1 = 2(2k - 1) + 1$.

因为 $2k - 1 \in \mathbf{Z}$, 所以 $4k - 1 = 2k + 1$, 故又 $Y \subseteq X$.

从而推得 $X = Y$, 应选(C).

证明两个集合相等, 可用定义“若 $A \subseteq B, B \subseteq A$, 则 $A = B$ ”. 这还是涉及判断两个集合之间的包含关系.

例 3 设集合 $S = \{x \mid x = 14m + 36n, m, n \in \mathbf{Z}\}$.

(1) 判断 2 是否在 S 中;

(2) 试证 S 与全体偶数集相等.

分析 (1) 判断 2 是否在 S 中, 即能否找到适当的整数 m, n , 使 $14m + 36n = 2$, 通过解不定方程是可以确定的.

(2) 设偶数集 $P = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, 欲证明 $S = P$, 就要证明 $S \subseteq P$ 且 $P \subseteq S$.

解 (1) 由 $x = 14m + 36n = 2(7m + 18n)$, 当 $m = -5, n = 2$ 时有 $x = 2$, 所以 $2 \in S$.

(2) 设偶数集 $P = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, 先证 $S \subseteq P$.

因为 $x = 14m + 36n = 2(7m + 18n)$, 其中 $m, n \in \mathbf{Z}$, 所以 $7m + 18n$ 为整数, 即 $x = 2(7m + 18n)$ 为偶数. 所以 $S \subseteq P$.

再证 $P \subseteq S$, 由(1)的解法可知 $x = 2k = 2[7(-5k) + 18 \cdot 2k]$.

因为 $k \in \mathbf{Z}$, 令 $-5k = m, 2k = n$, 则 $m, n \in \mathbf{Z}$.

所以 $x = 2k = 2(7m + 18n) = 14m + 36n$.

所以 $P \subseteq S$, 故 $S = P$.

二、关于证明映射 $f: A \rightarrow B$ 是一一映射

怎样证明 $f: A \rightarrow B$ 是一一映射,课本对此只是直观说明,而无严格证明.事实上,根据一一映射的定义,其证明步骤如下.

(1) 先证 $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 上的映射(如问题已指出是映射,此步可从略).

(2) 再证 f 是 A 到 B 上的一一映射.

- 1) 对于集合 A 中不同元素,在集合 B 中有不同的像;
- 2) B 中每一个元素都有原像.

例 4 已知 f 是集合 \mathbf{R}^+ 到集合 \mathbf{R} 上的映射, $f: x \rightarrow \lg x, x \in \mathbf{R}^+$, 求证: 映射 f 是一一映射.

证明 因为题设已指出 f 是映射, 只要证 f 是一一映射就行了. 下面从两个方面加以证明.

(1) 设 $x_1 \neq x_2$, 且 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$, 则 $y_1 = \lg x_1, y_2 = \lg x_2$, 且 $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$.

$$y_1 - y_2 = \lg x_1 - \lg x_2 = \lg \frac{x_1}{x_2} \quad \text{①}$$

因为 $x_1 \neq x_2$, 且 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$, 所以 $\frac{x_1}{x_2} \neq 1$.

所以 $\lg \frac{x_1}{x_2} \neq 0$, 即式 ① 中 $y_1 \neq y_2$.

故 \mathbf{R}^+ 中的不同元素在 \mathbf{R} 中有不同的像.

(2) 设 $y_3 \in \mathbf{R}$, 且 $y_3 = \lg x_3$, 则 $x_3 = 10^{y_3} > 0$, 所以 $x_3 \in \mathbf{R}^+$.

故 \mathbf{R} 中每一个元素在 \mathbf{R}^+ 中都有原像.

由(1)、(2)可知, 映射 f 是从 \mathbf{R}^+ 到 \mathbf{R} 的一一映射.

例 5 设集合 $A = \{\theta \mid 0 < \theta < 2\pi\}$, $B = \{(x, y) \mid x = \sin \theta, y = 2\sin \theta \cos \theta\}$.

(1) 证明: $f: A \rightarrow B$ 是一一映射;

(2) 求 B 中的点到原点的最大距离.

证明 (1) 先证 f 是映射.

设 $\theta_1 \in (0, 2\pi)$, 则 $x_1 = \sin \theta_1, y_1 = \sin 2\theta_1$. (x_1, y_1) 唯一确定, 所以 f 是 $A \rightarrow B$ 的映射.

再证 f 是一一映射.

1) 设 $\theta_1 \neq \theta_2$, 且 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$, 则 $\begin{cases} x_1 = \sin \theta_1 & x_2 = \sin \theta_2 \\ y_1 = \sin 2\theta_1 & y_2 = \sin 2\theta_2 \end{cases}$

若 $x_1 \neq x_2$, 则不论 y_1 与 y_2 是否相等, 都有 $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, B 中有不同的像.

若 $x_1 = x_2$, 即

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \quad \text{①}$$

由 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$ 和式 ① 可知 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ 或 $\theta_1 + \theta_2 = 3\pi$. 则 $y_1 = \sin 2\theta_1$; $y_2 = \sin 2\theta_2 = \sin 2(\pi - \theta_1) = -\sin 2\theta_1$ 或 $y_2 = \sin 2\theta_2 = \sin 2(3\pi - \theta_1) = -\sin 2\theta_1$. 此时均有 $y_1 \neq y_2$, 所以 $(x_1, y_2) \neq (x_2, y_2)$. 即 B 中有不同的像.

所以 A 中的不同元素, 在 B 中有不同的像.

2) 设 $\begin{cases} x_3 = \sin \theta_3 \\ y_3 = \sin 2\theta_3 \end{cases}$.

当 $x_3 = 0$ 时, 即 $\sin \theta_3 = 0$, 取 $\theta_3 = \pi$, 则 $\theta_3 \in (0, 2\pi)$, 此时 $y_3 = 0$.

当 $x_3 \neq 0$ 时, 易证 $\cos \theta_3 = \frac{y_3}{2x_3} < 1$.

所以总有 $\theta_3 \in (0, 2\pi)$ 的值存在, 即 B 中每一个元素有原像.

由 1)、2) 知, f 是 A 到 B 上的一一映射.

(2) 设 B 中的任意一点到原点的距离为 d , 则

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\sin^2 \theta + 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \sqrt{-4(\sin^2 \theta - \frac{5}{8})^2 + \frac{25}{16}}$$

所以当 $\sin^2 \theta = \frac{5}{8}$ 时, $d_{\max} = \frac{5}{4}$.

三、关于函数概念、性质

例 6 如图 1 所示, 正方形 $CDEF$ 的边长为 4, 截去一个角 ABF , 得到五边形 $ABCDE$. 已知 $AF = 2$, $BF = 1$, 在 AB 上取一点 P , 过 P 作 CD, DE 的平行线得矩形 $PNDM$, 试求矩形 $PNDM$ 的最值.

解 延长 NP, MP 分别和 EF, CF 交于 Q, S .

设 $PQ = x (0 \leq x \leq 1)$, 则 $PN = 4 - x$.

由相似三角形可以求得 $PS = 2 - 2x$, 所以 $PM = 4 - (2 - 2x) = 2 + 2x$.

设矩形 $PNDM$ 的面积为 $S(x)$, 则

$$S(x) = (4 - x)(2 + 2x) = -2(x - \frac{3}{2})^2 + 12 \frac{1}{2}$$

由图 2 可知抛物线顶点横坐标不在闭区间 $[0, 1]$ 内, 所以

$$S_{\max} = S|_{x=1} = 12, \quad S_{\min} = S|_{x=0} = 8$$

例 7 已知 $m \in \mathbf{R}$, 方程 $x^2 + 2mx - 3m + 1 = 0$ 有实数根 x_1 和 x_2 , 试求 $x_1^2 + x_2^2$ 的最值.

解 因为 $\Delta = 4m^2 + 4(3m - 1) = 4(m^2 + 3m - 1) \geq 0$, 所以

$$m \leq \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \text{ 或 } m \geq \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \quad \textcircled{1}$$

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -2m, x_1 \cdot x_2 = -(3m - 1)$.

令 $u = x_1^2 + x_2^2$, 则

$$u = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{4} \quad \textcircled{2}$$

将 $m = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ 代入式 $\textcircled{2}$ 得

$$u = 4\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{4} = 11 - 3\sqrt{13}$$

将 $m = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ 代入式 $\textcircled{2}$ 得 $u = 11 + 3\sqrt{13}$. 所以

$$u_{\min} = 11 - 3\sqrt{13}$$

这里, 有些读者可能会不考虑判别式, 用顶点法求, 显然是错的. 有的求出最大值是 $11 + 3\sqrt{13}$ 也不对. 从式 $\textcircled{2}$ 可知当 $m \rightarrow +\infty$ 或 $m \rightarrow -\infty$, 均有 $u \rightarrow +\infty$, 所以 u 无最大值.

从上述两例可以看出, 在实际问题中, 常因不考虑定义域而导致错误的结论, 因而结合定义域求法, 加强这方面训练是必要的.

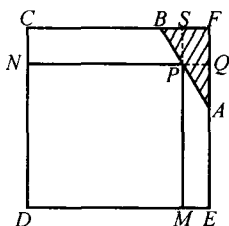


图 1

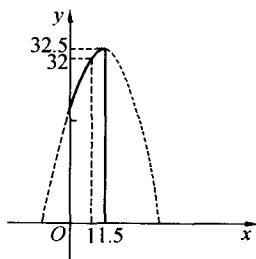


图 2