

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

spark® 星火书业

经济应用数学基础(一)

微 积 分

辅导及习题精解

(与人大修订本教材配套)

张天德 主编

联系考研,渗透精讲历年考研真题

- 知识图表 清晰梳理考点重点难点
- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 快速升华应用应试能力

新 华 出 版 社

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

 星火书业

经济应用数学基础(一)

微 积 分

辅导及习题精解

(与人大修订本教材配套)

主 编 张天德 龙和平

副主编 郑修才 叶 宏

吴 强

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导及习题精解/张天德主编. —北京:新华出版社, 2006. 8

ISBN 7-5011-7613-2

I. 微... II. 张... III. 微积分—高等学校—教学参考资料 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 095024 号

微积分辅导及习题精解

责任编辑: 白 玉

装帧设计: 星火视觉设计中心

出版发行: 新华出版社

地 址: 北京石景山区京源路 8 号

网 址: <http://www.xinhupub.com>

邮 编: 100043

经 销: 新华书店

印 刷: 山东省文登市印刷厂有限公司

开 本: 880mm×1230mm 1/32

印 张: 17.25

字 数: 425 千字

版 次: 2006 年 8 月第一版

印 次: 2006 年 8 月第一次印刷

书 号: ISBN 7-5011-7613-2

定 价: 18.80 元

本社购书热线:(010)63077122 中国新闻书店电话:(010)63072012

图书如有印装问题,请与印刷厂联系调换 电话:(0631)8452262

前言

微积分是经济管理院校的一门重要的基础课程。中国人民大学赵树嫄主编的《微积分》(第二版)(以下简称《教材》)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为微积分这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者学好《教材》、学好微积分,我们根据多年的教学经验编写了与此配套的《微积分辅导及习题精解》。本书旨在帮助、指导广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与技巧,提高应试能力和数学思维水平。

本书共分九章,每章又分若干节,章节的划分和标题与《教材》一致。在本书中每节包括两大部分内容:

一、知识要点与考点:用表格形式简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统梳理,并提出理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题,特别指出了各类考试中经常考查的重要知识点。

二、经典例题解析:广泛查阅资料,精选出了具有代表性、典型性的例题进行分类解析。在解题过程中,有“思路探索”:帮助读者尽快找到解决问题的思路和方法;有“方法点击”:帮助读者找到解决问题的关键、技巧与规律。

为了帮助读者对每章所学过的知识进行复习巩固,在每章最后一节编写完成后,另外增加三部分内容:

一、本章知识结构及内容小结:本书用结构图形式将本章知识点有机联系起来,组成网络结构,便于学生从总体上更加系统地掌握本章知识体系和核心内容。

二、本章教材习题全解:对《教材》里的习题全部做了解答,有的习题还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力。

三、同步自测题及解答:精选有代表性、测试价值高的题目(有些题目选自历年全国研究生入学考试试题),以此检测学习效果,提高应试水平。

在本书的最后还附有2006年全国硕士研究生入学统一考试数学三和数学四真题及解答。

本书的编写力求突出以下几个特点:

一、对基本知识力求系统化,便于读者整体地理解和掌握知识,在头脑中形成清晰、稳固的认知结构,这是提高解题能力和数学思维水平的基础。

二、应试性特点明显。本书针对部分读者要报考研究生的情况,特选取部分研究生入学考试的典型试题,分析思路,提炼方法,并在灵活性、严密性、准确性、简捷性诸多方面做出表率,真正提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力,把握重点、了解考研动向、开拓视野。

三、本书力求在讲解基本知识的过程中渗透教学思想方法,通过例题讲解、习题解答及自测题练习,在提高读者的解题能力、应试能力的同时,提高其综合数学素养。本书不仅是在读大学生同步学习的优秀辅导书,又是广大教师的得力教学参考书,还可为本科毕业生考研复习和众多成人学员自学提供富有成效的帮助。

本书注意博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分。在此,向这些书籍的编著者表示感谢,由于作者水平有限及编写时间仓促,书中疏漏与不妥之处,在所难免,敬请广大读者提出宝贵意见,以便再版时更正改进。

作者

2006年7月于济南

目 录

前 言	(1)
第一章 函 数	(1)
第一节 集合	(1)
第二节 实数集	(3)
第三节 函数关系	(5)
第四节 函数表示法	(6)
第五节 建立函数关系的例题	(8)
第六节 函数的几种简单性质	(10)
第七节 反函数 复合函数	(15)
第八节 初等函数	(18)
第九节 函数图形的简单组合与变换	(21)
本章知识结构及内容小结	(22)
本章教材习题全解	(23)
同步自测题	(46)
参考答案	(47)
第二章 极限与连续	(50)
第一节 数列的极限	(50)
第二节 函数的极限	(51)
第三节 变量的极限	(54)
第四节 无穷大量与无穷小量	(55)
第五节 极限运算法则	(57)
第六节 两个重要的极限	(61)
第七节 函数的连续性	(66)
本章知识结构及内容小结	(75)
本章教材习题全解	(76)
同步自测题	(101)
参考答案	(103)
第三章 导数与微分	(108)
第一节 导数概念	(108)
第二节 导数的基本公式与运算法则	(114)
第三节 高阶导数	(123)
第四节 函数的微分	(126)
本章知识结构及内容小结	(129)
本章教材习题全解	(130)
同步自测题	(160)

参考答案	(162)
第四章 中值定理与导数的应用	(167)
第一节 中值定理	(167)
第二节 洛必达法则	(174)
第三节 函数的增减性	(180)
第四节 函数的极值	(182)
第五节 最大值与最小值 极值的应用问题	(185)
第六节 曲线的凹向与拐点	(188)
第七节 函数图形的作法	(192)
第八节 变化率及相对变化率在经济中的应用——边际分析与弹性分析介绍	(195)
本章知识结构及内容小结	(200)
本章教材习题全解	(201)
同步自测题	(227)
参考答案	(230)
第五章 不定积分	(237)
第一节 不定积分的概念	(237)
第二节 不定积分的性质	(240)
第三节 基本积分公式	(242)
第四节 换元积分法	(244)
第五节 分部积分法	(252)
第六节 有理函数的积分	(260)
本章知识结构及内容小结	(263)
本章教材习题全解	(263)
同步自测题	(289)
参考答案	(291)
第六章 定积分	(296)
第一节 定积分的概念	(296)
第二节 定积分的基本性质	(300)
第三节 定积分与不定积分的关系	(303)
第四节 定积分的换元法	(311)
第五节 定积分的分部积分法	(316)
第六节 定积分的应用	(322)
第七节 定积分的近似计算	(329)
第八节 广义积分与 Γ 函数	(331)
本章知识结构及内容小结	(338)
本章教材习题全解	(339)
同步自测题	(369)
参考答案	(371)
第七章 无穷级数	(378)
第一节 无穷级数的概念与性质	(378)

第二节 常数项级数的审敛法	(381)
第三节 幂级数	(387)
第四节 函数展开成幂级数	(392)
本章知识结构及内容小结	(395)
本章教材习题全解	(396)
同步自测题	(413)
参考答案	(415)
第八章 多元函数	(420)
第一节 空间解析几何简介	(420)
第二节 多元函数的概念	(423)
第三节 二元函数的极限与连续	(424)
第四节 偏导数	(428)
第五节 全微分	(432)
第六节 复合函数的微分法	(435)
第七节 隐函数的微分法	(440)
第八节 二元函数的极值	(443)
第九节 二重积分	(448)
本章知识结构及内容小结	(457)
本章教材习题全解	(458)
同步自测题	(476)
参考答案	(478)
第九章 微分方程与差分方程简介	(483)
第一节 微分方程的一般概念	(483)
第二节 一阶微分方程	(484)
第三节 几种二阶微分方程	(491)
第四节 二阶常系数线性微分方程	(495)
第五节 差分方程的一般概念	(501)
第六节 一阶和二阶常系数线性差分方程	(502)
本章知识结构及内容小结	(504)
本章教材习题全解	(504)
同步自测题	(520)
参考答案	(521)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(525)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(534)

第一章 函数

函数是高等数学的主要研究对象. 本章首先引入集合, 然后研究两个实数集合之间的一种对应关系——函数关系, 并介绍函数的基本性质和常见初等函数.

第一节 集合

一、知识要点与考点

1. 集合的描述与运算

表示法	列举法	按任意顺序列出集合的所有元素, 并用花括号{}括起来
	描述法	设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则, A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合, 则记为 $A = \{a \mid P(a)\}$
全集、空集与子集	全集	由所研究的一切事物构成的集合称为全集, 记为 U
	空集	不包含任何元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$
	子集	如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素, 即“如果 $a \in A$, 则 $a \in B$ ”, 则称 A 为 B 的子集. 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A .
运算	并集	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
	交集	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
	差集	$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
	补集	$A' = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$
	笛卡尔乘积	设有集合 A 和 B . $x \in A, y \in B$, 所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合, 称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积, 记为 $A \times B$, 即 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

2. 集合运算律

交换律	$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$
结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
分配律	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C); (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
摩根律	$(A \cup B)' = A' \cap B'; (A \cap B)' = A' \cup B'$

第1章 函数

DI YI ZHANG

3. 重点、难点与考点

重点	集合的描述及运算
难点	集合的运算律及笛卡尔乘积
考点	集合的运算

二、经典例题解析

基本题型 I：集合的表示法

例 1 用描述法表示下列集合

- (1) 由方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的根所组成的集合.
- (2) 由正数全体组成的集合.

解: (1) $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$

(2) $B = \{x \mid x > 0\}.$

【方法点击】 用描述法表示集合是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来,用 $\{x \mid x \text{ 具有的共同属性}\}$ 表示.

例 2 用列举法表示下列集合.

- (1) 由 1, 3, 5, 7 组成的集合.
- (2) 由方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的根所组成的集合.

解: (1) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 或 $A = \{3, 1, 5, 7\}$ 等.

(2) $B = \{1, 3\}.$

【方法点击】 用列举法表示集合时,必须列出集合中的所有元素,不能遗漏和重复.

基本题型 II：集合的运算

例 3 集合的三种基本运算——并、交、补.

(1) 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 7, 8\}$, 求 $A \cup B, A \cap B, A - B$.

(2) 设集合 $A = \{x \mid -1 \leq x < 2\}, B = \{x \mid x \geq 0\}, C = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 求 $A \cup (B \cap C)$.

(3) 设 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}, R = \{1, 3\}$, 求 $M', R', M' \cup R', M' \cap R', (M \cup R)' \cap M$.

解: (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}, A \cap B = \{2, 4\}, A - B = \{1, 3\}.$

(2) $\because B \cap C = \{x \mid 0 \leq x < 3\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = \{-1 \leq x < 3\}.$

(3) $\because M = \{2, 3\}$

$\therefore M' = U - M = \{-1, 0, 1, 4\}$

$R' = U - R = \{-1, 0, 2, 4\}$

$M' \cup R' = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$

$M' \cap R' = \{-1, 0, 4\}$

又 $M \cup R = \{1, 2, 3\}$

$$\text{故 } (M \cup R)' = U - (M \cup R) = \{-1, 0, 4\}$$

$$\text{或由 } (M \cup R)' = M' \cap R' = \{-1, 0, 4\}$$

$$\text{所以 } (M \cup R)' \cap M = \{-1, 0, 4\} \cap \{2, 3\} = \emptyset.$$

【方法点击】 求不等式所构成集合的并、交运算,最好借助于数轴表示,显得一目了然;进行并、交的混合运算应注意并、交无先后,但括号优先,先里后外;抽象集合的并、交运算特点是并集取“全部”;交集取“公共”。

例4 集合的笛卡尔乘积.

(1) 设 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 5\}$, 求 $A \times B, B \times B$.

(2) 设 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y | 0 \leq y \leq 1\}$, 求 $A \times B$.

解: (1) $A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (3, 2), (3, 5), (5, 2), (5, 5), (7, 2), (7, 5)\}$

$$B \times B = \{2, 5\} \times \{2, 5\} = \{(2, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5)\}.$$

(2) $A \times B = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. 它表示平面直角坐标系中如图 1-1 所示的矩形区域.

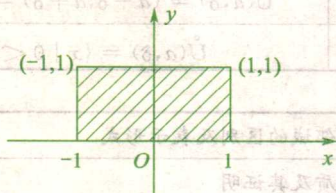


图 1-1

【方法点击】 集合的笛卡尔乘积与集合的次序有关,一般地 $A \times B$ 与 $B \times A$ 是不同的两个集合.

第二节

实数集

一、知识要点与考点

1. 实数绝对值的定义及性质

定义	一个实数 x 的绝对值定义为 $ x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
性质	$ x \geq 0$ $ x = \sqrt{x^2}$ $ -x = x $ $ x \leq x \leq x $ $\{x x < a\} = \{x -a < x < a\}$ $\{x x > b, b > 0\} = \{x x < -b\} \cup \{x x > b\}$ $ x + y \leq x + y $ $ x - y \geq x - y $ $ xy = x y $ $ \frac{x}{y} = \frac{ x }{ y }, y \neq 0$

第1章 函数

DI YI ZHANG

2. 区间与邻域

区间	有限区间	开区间	$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
		闭区间	$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
		半开半闭区间	$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$
	无限区间		$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$ $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$
邻域	点 a 的 δ 邻域		$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \mid x - a < \delta\}$
	点 a 的去心 δ 邻域		$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < x - a < \delta\}$

3. 重点、难点与考点

重点	掌握去心邻域与邻域的区别及表示形式
难点	实数绝对值的性质及其证明
考点	绝对值的运算性质

二、经典例题解析

基本题型 I : 求解含绝对值的不等式

例 1 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

- (1) $|x| \leq 2$; (2) $|x - 5| \leq 1$; (3) $|x - x_0| < \varepsilon (\varepsilon > 0, x_0 \text{ 为常数})$;
(4) $|x| > 1$; (5) $|x + 2| \geq 3$.

解: (1) 即 $-2 \leq x \leq 2$, 区间为 $[-2, 2]$.

(2) 由 $-1 \leq x - 5 \leq 1$ 知 $4 \leq x \leq 6$, 区间为 $[4, 6]$.

(3) 由 $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$ 知 $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, 区间为 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

(4) 即 $x > 1$ 或 $x < -1$, 区间为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(5) 由 $x + 2 \geq 3$ 或 $x + 2 \leq -3$ 知 $x \geq 1$ 或 $x \leq -5$, 故区间为 $(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$.

【方法点击】 求解含绝对值的不等式关键是要正确去掉绝对值符号.

第三节

函数关系

一、知识要点与考点

1. 函数的定义

名称	定义	说明
函数	若 D 是一个非空实数集合, 设有一个对应规则 f , 使每一个 $x \in D$, 都有一个确定的实数 y 与之对应, 则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系, 或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y = f(x)$, $x \in D$. 其中 x 称自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$. 全体函数值的集合 $\{y y = f(x), x \in D_f\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 记作 Z 或 Z_f .	(1) f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则, 而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值; (2) 表示函数的记号可以任意选取; (3) 构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f; (4) 当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时, 两个函数相等.

2. 重点、难点与考点

重点	求函数的定义域、函数值, 区分两个函数是否相同
难点	对函数关系的理解及值域的确定
考点	求函数的定义域

二、经典例题解析

基本题型 I : 判定两个函数是否相同

例 1 下列各对函数中, 相同的一对函数是().

(A) $y = \frac{x^3}{x}$ 与 $y = x^2$

(B) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$

(C) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = x$

(D) $y = x^2$ 与 $u = v^2$

解: 排除法可知选项(D)中的两个函数相同.

∵ 选项(A)中两个函数的定义域 $D_1 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $D_2 = (-\infty, +\infty)$ 不相同; 选项(B)中的 $D_1 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \neq D_2 = (0, +\infty)$; 而选项(C)中的两个函数定义域虽相同, 但对应法则不相同, 其中函数 $y = x$, 当 $x > 0$ 时, $y > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y < 0$. 而函数 $y = \sqrt{x^2}$, 当 $x > 0$ 时 $y > 0$; 当 $x < 0$ 时 $y > 0$.

对于选项(D)中的两个函数, 只是变量的表示字母不同, 但定义域和对应法则

第1章 函数

DI YI ZHANG

完全相同.

∴ 仅选项(D)是正确的.

【方法点击】 区分两个函数是否相同,关键是研究确定函数关系的两个要素——定义域和对应法则,而与变量用什么字母表示无关.

基本题型 II :求函数的定义域

例 2 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \ln(x^2 - 1) + \arcsin \frac{1}{x+1}.$$

$$(2) y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}.$$

$$\text{解: (1) 由题意} \begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x + 1 \neq 0, \\ \left| \frac{1}{x+1} \right| \leq 1. \end{cases} \quad \text{由 } x^2 - 1 > 0 \text{ 得 } x < -1 \text{ 或 } x > 1.$$

$$\text{由 } \left| \frac{1}{x+1} \right| \leq 1, \text{ 得 } x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 0, \text{ 故定义域为 } (-\infty, -2] \cup (1, +\infty).$$

$$(2) \text{ 由题意} \begin{cases} \frac{5x-x^2}{4} > 0 \\ \lg \frac{5x-x^2}{4} \geq 0 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 0 < x < 5 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

故原函数定义域 $[1, 4]$.

【方法点击】 求初等函数的定义域有下列原则:① 分母不能为零.② 偶次根式的被开方数大于等于零.③ 对数的真数大于零.④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x| \leq 1$.

⑤ $\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

第四节

函数表示法

一、知识要点与考点

1. 函数的三种表示法

名称	定义
公式法	把一个函数关系用解析式表示的方法称为函数解析法,也叫公式法
表格法	把自变量所取的值和对应的函数值列成表,用以表示函数关系,如我们所用的各种数学用表——平方表、对数表、三角函数表等,函数的这种表示法称为表格法
图形法	用某个坐标系中的一条曲线来表示两个变量之间的对应关系,称为图形法或图示法

2. 分段函数与隐函数

名称	定义	说明
分段函数	对于其定义域内自变量 x 不同的取值,不能用一个统一的数学表达式表示,而要用两个或两个以上的式子表示的一类函数称为“分段函数”	分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数
隐函数	由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数.	因变量能用自变量直接表示出来(如 $y=f(x)$)的函数称为显函数,否则为隐函数.

3. 重点、难点与考点

重点	函数的三种表示方法,分段函数
难点	分段函数的判别与运算
考点	分段函数求值及运算

二、经典例题解析

基本题型 I : 求分段函数的定义域

例 1 求函数 $y = \frac{1}{\ln|x|}$ 的定义域.

解: 绝对值函数可以化为分段函数

$$y = \frac{1}{\ln|x|} = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & x > 0 \text{ 且 } x \neq 1 \\ \frac{1}{\ln(-x)}, & x < 0 \text{ 且 } x \neq -1 \end{cases}$$

其中第一段的定义域为 $(0,1) \cup (1,+\infty)$,第二段的定义域为 $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$,再取各段定义域的并集 $(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$,即定义域为 $\{x | -\infty < x < +\infty \text{ 且 } x \neq 0, x \neq \pm 1\}$.

【方法点击】 分段函数的定义域就是将每段表达式的定义域并在一起.

基本题型 II : 分段函数求值

例 2 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$ 求 $f(3), f(2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(-\frac{1}{2})$ 及

$f(x+1)$.

解: $f(3) = (x-1)|_{x=3} = 2$

$f(2) = (x-1)|_{x=2} = 1$

$f(0) = 2|_{x=0} = 2$

$f(\frac{1}{2}) = 2|_{x=\frac{1}{2}} = 2$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^x \Big|_{x=-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f(x+1) = \begin{cases} 2^{x+1}, & -1 < x+1 < 0, \\ 2, & 0 \leq x+1 < 1, \\ x+1-1, & 1 \leq x+1 \leq 3, \end{cases}$$

$$\text{即 } f(x+1) = \begin{cases} 2^{x+1}, & -2 < x < -1, \\ 2, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

【方法点击】 由于分段函数在各段上的对应法则是不同的,所以求分段函数在某点的函数值时,关键要弄清该自变量所在区间段对应的函数表达式是哪一个,然后再代入求值.

第五节

建立函数关系的例题

一、知识要点与考点

1. 建立函数关系的基本步骤

步骤

- ① 明确问题中的因变量与自变量,并以适当记号表示
- ② 根据题意建立等式,从而得出函数关系
- ③ 确定函数的定义域

2. 重点、难点与考点

重点	函数关系的建立及函数的定义域确定
难点	恰当选设变量,列函数关系的表达式
考点	求解应用问题

二、经典例题解析

基本题型 I : 根据实际应用问题建立函数关系

例 1 将一个底半径为 2cm, 高为 10cm 的圆锥形杯做成量杯, 要在上面刻上表示容积的刻度, 求出溶液高度与其对应容积之间的函数关系.

解: 设溶液高度为 h , 其对应的容积为 V , r 是平行于底面的截面的半径, 如图 1-2 所示, 则

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

因为 r 也是变量, 而需要找的是 V 与 h 之间的函数关系, 所以应设法消去 r , 注意到 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, 有 $\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

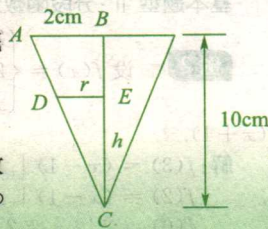


图 1-2

即 $\frac{h}{10} = \frac{r}{2}, r = \frac{1}{5}h$, 代入上式可得

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{5}h\right)^2h = \frac{1}{75}\pi h^3 \quad (0 \leq h \leq 10).$$

例 2

从甲地到乙地的火车票的全价为 q_0 (元), 按铁路部门的规定, 1.1 米以下的儿童免票, 身高超过 1.1 米但不足 1.4 米的儿童购买半价票, 身高超过 1.4 米者购买全票, 试写出从甲地到乙地票价 q 作为身高 s 的函数的表达式.

解: 依题意, q (单位: 元) 作为 s (单位: m) 的函数关系, 可以表示为如下分段函数

$$q = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 < s < 1.1, \\ \frac{1}{2}q_0, & \text{当 } 1.1 \leq s < 1.4, \\ q_0, & \text{当 } s \geq 1.4. \end{cases}$$

例 3

我国工薪人员纳税问题.

根据中华人民共和国个人所得税法规定, 个人工资、薪金所得应纳个人所得税, 应纳税所得额的计算为: 工资、薪金所得, 以每月收入额减除费用八百元后的余额, 为应纳税所得额, 税率如下表所示:

个人所得税税率表(工资、薪金所得适用)

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元不超过 2 000 元的部分	10
3	超过 2000 元不超过 5000 元的部分	15
4	超过 5000 元不超过 20000 元的部分	20
5	超过 20000 元不超过 40000 元的部分	25
6	超过 40000 元不超过 60000 元的部分	30
7	超过 60000 元不超过 80000 元的部分	35
8	超过 80000 元不超过 100000 元的部分	40
9	超过 100000 元的部分	45

若某人的月工资薪金所得为 x 元, 试列出他应缴纳的税款 y 与其工资、薪金所得 x 之间的关系.

解: 按税法规定, 当 $x \leq 800$ 元时, 不必纳税, 这时 $y = 0$.

当 $800 < x \leq 1300$ 元时, 纳税部分为 $x - 800$, 税率为 5%, 因此

$$y = (x - 800) \times \frac{5}{100}$$

当 $1300 < x \leq 2800$ 元时, 其中 800 元不纳税, 500 元应纳 5% 的税, 即 $500 \times \frac{5}{100} = 25$ (元), 再多的部分, 即 $x - 1300$ 按 10% 纳税. 因此他应纳税款为 $y = 25 +$

$(x - 1300) \cdot \frac{10}{100}$ (元), 依此可列出下面的函数关系: