华东师范大学
函授教材

代数讲义

华东师范大学数学系
代数教研組編

（第二册）

华东师范大学出版社

华东师范大学函授教材

代 數 講 義

第 二 册

华东师范大学数学系代数教研組編

华东师范大学出版社

1 9 5 9 年

代 数 講 义

（第 二 册）

华东师范大学数学系代数教研組編

（內部讀物　凭証发行）

*

华东师范大学出版社出版

（上海中山北路3663号）

上海市書刊出版业营业許可証出〇八八号

上海市印刷三厂印刷　新华書店上海发行所发行

•

开本 787×1092 公厘 1/27　印張 4 10/27　字数 94,000

1959 年 3 月第一版

1959 年 3 月第一次印刷

印数 1—9,100

統一書号：13135·24

定　价：(十)0.52元

目　錄

第三章 綫性規劃

在第二次世界大战中，由于战爭的需要，需要研究怎样的合理安排才能使在一定的人力物力的条件下完成最大的任务，譬如說，軍事物資运輸任务很重，怎样最有效地利用和发掘运輸潛力等。于是产生了一門嶄新的数学分支，叫做运筹学，大概地說，运筹学就是研究在一定人力物力的条件下发揮最大的效用，或者是研究在一定的任务下怎样用最小的人力物力去完成它。用数学的語来說，前者是求最大或极大的問題，后者是求最小或极小的問題。战后运筹学广泛地被用在工业，商业，交通运輸业等方面去，得到了很大的发展。今年暑假在全国科学大跃进的浪潮中，許多高等学校的数学系同学与教师跑出学校，利用运筹学中的一个分枝——綫性规划，为許多企业單位解决了迫切需要解决的問題，特別是运輸上的調运問題，为国家节約了大量資金，同时也为数学怎样联系实际开辟了道路。

运筹学中有很多分枝，有綫性規划，非綫性规划，排队論，博奕論，策略論，質量控制，产品檢驗等。这里我們只討論綫性規划，而且着重討論康脫洛維奇問題，因为这个問題比較簡單，有确定的解法，用处也大，而且它的理論与我們所講过的綫性方程組的理論有較密切的联系，关于这一部分教材，可参考

1. 科学院力学研究所所編的小册子“运筹学”。
2. 数学通报 1958，第十二期。
3. 数学通报 1958，第十一期。

§1. 綫性規划問題的数学形式

我們先来說明綫性規划問題的数学形式，它的一般形式是求滿足綫性方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \quad x_i\geqslant 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad i=1,\cdots,n \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1}$$

而又使綫性函数(一次函数)

$$S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{2}$$

达到最小值的非負解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其中 a_{ij}，b_i 及 c_i 都是已知常数。我們称綫性方程組（1）为这綫性規划問題的限制条件，綫性函数 S 为这綫性規划問題的目标函数。因此，綫性規划問題也即是求满足限制条件（1）而又使目标函数达最小值的解，这种解我們称为这綫性規划問題的最优解。

有时，綫性規划的問題是要求满足限制条件而又使目标函数 S 达到最大。这时候我們只要考虑以 $-S=S_1$ 来代替 S，于是求 S 最大値的問題，就是求 S_1 最小値的問題，所以一般的只需考慮最小値的問題即可。

有时，在限制条件（1）中出現不等式，例如問題求满足限制条件

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3\leqslant 8, \\ 2x_1-x_2+3x_3\leqslant 9, \quad x_1, x_2, x_3\geqslant 0, \\ 2x_1+x_2-4x_3\geqslant 2, \end{cases}$$

而又使
$$S=3x_1+2x_2-4x_3$$
最小的解，这个問題显然与下列形式的問題完全一样：求满足限制条件

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=8, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_5=9, \quad x_1, \cdots, x_6\geqslant 0 \\ 2x_1+x_2-4x_3-x_6=2, \end{cases}$$

而又使
$$S=3x_1+2x_2-4x_3$$
最小的解，事实上，我們虽然多添了三个未知量 x_4，x_5，x_6，但是它們对目标函数 S 是不起任何影响的，而 $3x_1+2x_2-x_3\leqslant 8$ 与 $3x_1+2x_2-x_3+x_4=8$ $(x_4\geqslant 0)$ 对 x_1, x_2, x_3 来說所受的約束是一样的。

有时，在目标函数中出現常数項，例如

$$S=25+3x_1+2x_2-4x_3。$$

这时可以把常数 25 去掉。显然，使 $S_1=3x_1+2x_2-4x_3$ 为最小的 x_1, x_2, x_3 也是使 S 为最小的。

归根結底，綫性規划的一般形式是求满足限制条件（1）而使綫性函数（2）达到最小値的解。

順便說一下，如果目标函数 S 不是一次函数，譬如是个高次的代数式：

$$S=3x_1^2+5x_2x_3-2x_3^5$$

而問題也是要求滿足限制条件（1）而使这个函数 S 达到最小値的解，这种問題我們称为非綫性規划問題：

§2. 綫性規划問題

我們通过一些例子来說明綫性規划問題是那些形式的問題，然后在下面几节中我們来討論它們的解法。

例1. 某机械工厂有机床兩台(万能式)，加工一定数量的三种不同零件，但每种零件在同一机床上的生产速度不相同，它的加工費的單位成本也不同；并且机床工作能力是有一定限度的；假定在一星期内第一台机床只能工作 H_1 小时，第二台机床只能工作 H_2 小时，問在一星期内，把这三种零件如何分配給这兩台机床加工，使得总的加工費用最低？

設 c_{ij} 表示第 i 台机床加工第 j 种零件一件所需的加工費（即單位加工費），其中 $i=1, 2;\ j=1, 2, 3$。

又設 h_{ij} 表示第 i 台机床加工第 j 种零件一件所需的小时数。

單位加工費		第一零件	第二零件	第三零件
	第一台机床	c_{11}	c_{12}	c_{13}
	第二台机床	c_{21}	c_{22}	c_{23}

單位加工时間		第一零件	第二零件	第三零件
	第一台机床	h_{11}	h_{12}	h_{13}
	第二台机床	h_{21}	h_{22}	h_{23}

这些数值 c_{ij} 与 h_{ij} 都是已知的。

設我們在一星期内至少要加工第一种另件 a_1 个，第二种另件 a_2 个，

第三种另件 a_3 个。把这三种零件給这兩台机床加工的分配方案是：讓第 i 台机床加工第 j 种零件 x_{ij} 个，即

分配方案为：

	第一零件	第二零件	第三零件
第一台机床	x_{11}	x_{12}	x_{13}
第二台机床	x_{21}	x_{22}	x_{23}

于是第一台机床的加工費为 $c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}$；
第二台机床的加工費为 $c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$，
所以总的加工費为

$$S=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$$

而按照这个方案，在一星期內第一台机床工作的时間为

$h_{11}x_{11}+h_{12}x_{12}+h_{13}x_{13}$ 小时，它必須不超过 H_1；

第二台机床工作的时間为

$h_{21}x_{21}+h_{22}x_{22}+h_{23}x_{23}$ 小时，它必須不超过 H_2，

所以这个問題的数学形式就是要求滿足限制条件

$$\begin{cases} h_{11}x_{11}+h_{12}x_{12}+h_{13}x_{13}\leqslant H_1 & x_{11}+x_{21}\geqslant a_1 \\ h_{21}x_{21}+h_{22}x_{22}+h_{23}x_{23}\leqslant H_2 & x_{12}+x_{22}\geqslant a_2 \\ x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}\geqslant 0 & x_{13}+x_{23}\geqslant a_3 \end{cases}$$

而又使目标函数（这里是加工費）

$$S=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}\,x_{ij}$$

为最小的解。按 §1 所說，这是綫性規划的問題。

例2. 营养是保証身体健康不可缺少的条件之一，每人每天都必須吸收一定量的营养素。所謂营养素是包括維他命 A、B、C、D、蛋白質、鈣質、脂肪和糖等。这些营养素包含在各种不同的食物中，这些食物所含营养素的量和成份都不相同，价格也各不相同。要是我們不惜代价来获取充分的营养素，那末这个例子可以不必談。但是我們总想在許多种不同的食物中，选取某些既能有足夠的各种营养素，化錢又少，

这就需要計算了。为了簡單起見，这里只用維他命 A、B、C 来举例。假定現有四种食品：甲、乙、丙、丁；我們用下列表来表出每斤食物(甲、乙、丙、丁)中所含維他命 A、B、C 的量：

	單位	食物甲	食物乙	食物丙	食物丁	每人每日需要量
維他命 A	国际單位	1000	1500	1750	3250	4000
維他命 B	毫克	0.6	0.27	0.68	0.3	1
維他命 C	毫克	17.5	7.5	0	30	30
食物單价(每斤)	元	2	1.5	2.5	3	

現在問題是买食物甲、乙、丙、丁各多少，使得旣能滿足維他命 A、B、C 的需要量而化錢又最少。

把它列成数学式子如下：

設买食物甲、乙、丙、丁各 x_1、x_2、x_3、x_4 斤。于是这个問題就是要求滿足限制条件

$$\begin{cases} 1000x_1+1500x_2+1750x_3+3250x_4\geqslant 4000 \\ 0.6x_1+0.27x_2+0.68x_3+0.3\ x_4\geqslant 1 \\ 17.5x_1+7.5x_2+0\cdot x_3+30x_4\geqslant 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4\geqslant 0 \end{cases}$$

而使目标函数(价格)

$$S=2x_1+1.5x_2+2.5x_3+3x_4.$$

取最小值的解，这是綫性規划的問題。

例3. 現在我們举一个綫性規划应用在农业生产合作社的例子。

某合作社有可耕地 80 亩，这些土地适合种土豆，小麦，大豆，白菜，菠菜和搞畜牧。这些农作物，有的春天播种秋天收，有的秋天种冬天收，有的冬天种要到第二年夏天才能成熟。在不同的季节里，各种农作物需用的劳动力、資金都不一样，而社内的劳动力、資金(包括种子、肥料、农具等)是有一定限制的，現在的問題是如何安排社里的生产，也就是說要种多少亩土豆，多少亩小麦，多少亩大豆，……，使得社内全年收入

最多。为了解决这个問題，我們現在把这个例子的詳細数据用表列出：

农 作 物

因素	單位	土豆	小麦	大豆	畜牧	白菜	菠菜	因素的上限
土地（春）	亩	1	1	1	1			80
土地（秋）	亩		1	1	1	1	1	80
資金	元	80	40	20	30	80	50	2400
1—2 月劳动力	劳动日	16	5					280
3—4 月劳动力	劳动日	12	8					300
5—6 月劳动力	劳动日	10	10	15				320
7—8 月劳动力	劳动日			4		40		320
9—10月劳动力	劳动日			1		10	70	300
11—12月劳动力	劳动日		8	1		40	160	320
收入	元	170	140	80	50	400	880	

先来解釋一下这个表，从竖的来看，第三列表示每种一亩地的土豆需要資金 80 元，在一月到二月間需劳动力 16 个劳动日，三、四月間需 12 个劳动日，5、6 月間需 10 劳动日，最后能收入 170 元，第三列到第八列完全类似，最后一列“因素的上限”表示土地、資金以及兩个月間所能給的劳动力的最大限度，也就是，我們作生产配置时必須使得土地、資金、劳动力不超过这些数。

現在很容易把这問題写成数学形式，我們設 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 各代表种土豆，种小麦，种大豆，搞畜牧，种白菜，种菠菜的亩数。于是我們的問題就是要求滿足限制条件

$$\left\{\begin{array}{ll}
x_1+x_2+x_3+x_4 & \leqslant 80\\
x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 & \leqslant 80\\
80x_1+40x_2+20x_3+30x_4+80x_5+50x_6 & \leqslant 2400\\
16x_1+5x_2 & \leqslant 280\\
12x_1+8x_2 & \leqslant 300\\
10x_1+10x_2+15x_3 & \leqslant 320
\end{array}\right.$$

$$
\begin{cases}
\qquad 4x_3 + \qquad 40x_5 \qquad \leqslant 320 \\
\qquad x_3 + \qquad 10x_5 + 70x_6 \leqslant 300 \\
8x_2 + x_3 + \qquad 40x_5 + 160x_6 \leqslant 320 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geqslant 0
\end{cases}
$$

而使目标函数(总收入)

$$S = 170x_1 + 140x_2 + 80x_3 + 50x_4 + 400x_5 + 880x_6$$

取最大値的解，这是綫性規划的問題。

上面举的三个例子是綫性規划的較一般的問題，下面我們要举一个例子，所謂康脫洛維奇問題，这一类問題在运輸問題(粮食調运，棉花調运，煤炭調运等)上常碰到，应用較广，我們也称它为物資調运問題，这是一个特殊的綫性規划問題，它有較簡易的解法。我們后面几节也是着重的要講这一問題的解法。

例4. 某一建筑工地，要把 m 个地点 $A_1, A_2, \cdots A_m$ 的土挖起来，去填到 n 个地点 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 上去。已知地点 A_i 所要挖起的土方为 b_i，地点 B_j 所需要填的土方为 a_j，地点 A_i 到地点 B_j 的距离为 c_{ij} 公里。現在的問題是要把那些地点的土运多少到那些地点去，作一个統一安排，使得所化的总劳动力最小。这里还有一个条件是挖起的总土方与填下的总土方是相等的，也即 $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$。

一般說，运輸所化的劳力与距离成正比，与重量成正比，所以我們不妨在这問題中以土方公里作为劳力的單位，为了使这問題一目了然起見，作一表以說明这个問題：

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	$c_{11}^{x_{11}}$	$c_{12}^{x_{12}}$	$\cdots$	$c_{1n}^{x_{1n}}$	b_1
A_2	$c_{21}^{x_{21}}$	$c_{22}^{x_{22}}$	$\cdots$	$c_{2n}^{x_{2n}}$	b_2
$\vdots$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$	$\cdot$
A_m	$c_{m1}^{x_{m1}}$	$c_{m2}^{x_{m2}}$	$\cdots$	$c_{mn}^{x_{mn}}$	b_m
	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	

c_{ij} 为 A_i 到 B_j 之距离，設 x_{ij} 为从 A_i 运到 B_j 去之土方。

由上得出这問題的限制条件为

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=b_i & (i=1,\cdots,m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}=a_j & (j=1,\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

目标函数为 $S=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$，求满足限制条件而使 S 为最小的解。从表上看，也就是要求非負值 x_{ij}，代入表中时，每一行各 x 値相加要等于該行最右端之 b. 每列各 x 值相加要等于該列最后之 a，这就是限制条件。目标函数就是所有各相应的 x 值与 c 值之积的总和。这就是康脫洛維奇問題，下一节將專門討論这問題的解法。

§3. 康脫洛維奇問題解法

康脫洛維奇問題就是求未知量 x_{ij} $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 的，他满足

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=b_i & (i=1,\cdots,m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}=a_j & (j=1,\cdots,n)\end{cases} \tag{1}$$

及

$$x_{ij}\geqslant 0,\ \begin{pmatrix} i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n\end{pmatrix} \tag{2}$$

而使

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\,x_{ij} \tag{3}$$

取最小值；其中 a_j，b_i 满足

$$\sum_{j=1}^{n} a_j=\sum_{i=1}^{m} b_i \tag{4}$$

我們先来研究一下綫性方程組（1），它含有 $m\cdot n$ 个未知量 x_{ij}，共 $m+n$ 个綫性方程。这 $m+n$ 个方程中，由于条件（4），最后一个方程是前面 $m+n-1$ 个方程的綫性組合。事实上，前 m 个方程相加减去后 $n-1$ 个方程卽得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=\sum_{i=1}^{m} b_i-\sum_{j=1}^{n-1} a_j,$$

卽
$$\sum_{i=1}^{m} x_{in}=a_n,$$
此卽（1）中最后一个方程。

前 $n+m-1$ 个方程的系数矩陣为：(这里未知量的次序排成 $(11)(12)\cdots(1n)\cdots(mn)$)

$$\begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ m+2 \\ \vdots \\ m+n-1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} (11) & (12) & \cdots & (1n) & (21) & (22) & \cdots & (2n) & \cdots & (m1) & (m2) & \cdots & (mn) \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & \cdots 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array} \qquad (5)$$

容易看出这矩陣的秩为 $m+n-1$；事实上，考虑由 $(1,n)$，$(2,n)$，$\cdots$，(m,n)，$(1,1)$，$\cdots$，$(1,n-1)$ 等 $n+m-1$ 列所組成的 $m+n-1$ 階行列式，显然它不等于零，所以矩陣（5）的秩为 $n+m-1$，故（1）中前 $n+m-1$ 个方程是独立的。还要注意除掉 $n=1, m=1$ 的情形外，$n\cdot m-(n+m-1)=(n-1)\cdot(m-1)$ 总是大于零的，也卽未知量的个数要比独立方程的个数多。根据綫性方程組的理論，可以把方程組（1）解出，其中有 $n+m-1$ 个未知量 x_{i_1}，x_{i_2}，$\cdots$，$x_{i_{n+m-1}}$（註1）可以用其他

（註1） 这里 $x_{i_1},\cdots,x_{i_{n+m-1}}$ 是 x_{11}，x_{12}，$\cdots$，x_{mn} 中的某 $n+m-1$ 个，指标另外取过，容易混看，希讀者注意。

$(n-1)\cdot(m-1)$ 个未知量 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_s}$ $(s=(n-1)\cdot(m-1))$ 綫性表出:

$$\begin{cases} x_{i_1}=N_1+\sum_{k=1}^{s} d_{1k}\, x_{j_k} \\ x_{i_2}=N_2+\sum_{k=1}^{s} d_{2k}\, x_{j_k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{i_{n+m-1}}=N_{n+m-1}+\sum_{k=1}^{s} d_{n+m-1,\,k}\, x_{j_k} \end{cases} \tag{6}$$

这里系数 $N_1, \cdots, N_{n+m-1}$ 及 d_{1k} 是由 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{n+m-1}}$ 所唯一确定。我們称(6)为綫性方程組(1)的一个消去系統,其中 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_{n+m-1}}$ 称为消去未知量, $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_s}$ 称为独立未知量。消去未知量与独立未知量的全体即 $n\cdot m$ 个未知量 x_{ij},而且它們間沒有重复的。按綫性方程組的理論,只要对独立未知量 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_s}$ 独立地任意給数值,再由(6)式算出相应的消去未知量 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_{n+m-1}}$ 的值,即得方程組(1)的所有解。如果 $N_1 N_2, \cdots, N_{n+m-1}$ 都 $\geqslant 0$,則当独立未知量 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_s}$ 都取零值时所得的方程組(1)的解能滿足条件(2),我們称这样的解为(1)的**可行解**,而此时(6)称为**可行消去系統**。

順便注意一下,方程組(1)的消去系統只有有限个,可行消去系統更是有限个(个数更少),因此方程組(1)的可行解也只有有限个。

現在我們来进一步解康氏問題。为此,設我們已求出一个可行消去系統(6),將(6)的表达式代入目标函数 $S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$ 中,消去 S 中的消去未知量,于是得

$$S=M+\sum_{k=1}^{s} \lambda_k\, x_{j_k} \tag{7}$$

其中 $$M=C_{i_1} N_1+\cdots+C_{i_{n+m-1}} N_{n+m-1}。\text{(註1)} \tag{8}$$

(註1) 这里 c_{i_1} 是指 x_{i_1} 所相当的 x_{uv} 所对应的 c_{uv},例如若 $x_{i_1}=x_{23}$,則 $c_{i_1}=c_{23}$;其余 c_{i_r} 类似。

而 $$\lambda_k = c_{j_k} + c_{i_1} d_{1k} + c_{i_2} d_{2k} + \cdots + c_{i_{n+m-1}} d_{n+m-1,k} \tag{9}$$

如果(7)式中所得的系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 都是非負的，由于滿足限制条件(1)与(2)的解都將由給 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_s}$ 以非負值而得出，于是显然当 $x_{j_1}, \cdots x_{j_s}$ 取零值时將得 S 值最小，于是(6)所对应的可行解就是这康氏問題的最优解，而 M 即为 S 的最小值。

如果(7)式中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 中有負值，例如 $\lambda_1<0$，于是当 $x_{j_2}, \cdots, x_{j_k}$ 取零值，而 x_{j_1} 取正值时所得的 S 值將小于 M，然而我們所取的 x_{j_1} 值还必須使(6)式的消去未知量的值都得非負值，也即要使 $N_1 + d_{11} x_{j_1}$，$N_2 + d_{21} x_{j_1}, \cdots, N_{n+m-1} + d_{n+m-1,1} x_{j_1}$ 都为非負值。于此时，我們可用消去未知量中某一个来代替 x_{j_1}，而得新的可行消去系統及新的可行解，相应的 S 值肯定地將比第一个可行解的 S 值要小些。这个方法称为叠代法，由于可行解只有限个，例如 t 个，每叠代一次得一新的可行解，相应的有一 S 值，而 S 值逐漸小下去，所以在叠代过程中可行解不可能重复出現。因此在有限次叠代之后，必然可得一消去系統，代入目标函数中，独立未知量的系数全为非負，于是即得最优解。

最好还是讓我們通过例子来說明前面嚕囌的叙述，現在設有一个康氏問題为：

也即求滿足限制条件

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10 x_{11}	5 x_{12}	6 x_{13}	7 x_{14}	25
A_2	8 x_{21}	2 x_{22}	7 x_{23}	6 x_{24}	25
A_3	9 x_{31}	3 x_{32}	4 x_{33}	8 x_{34}	50
	15	20	30	35	100

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=25 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=25 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=15 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=20 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=30 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=35 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4 \end{cases} \tag{10}$$

而使，目标函数

$$S = 10x_{11}+5x_{12}+6x_{13}+7x_{14}+8x_{21}+2x_{22}+7x_{23}+6x_{24} +9x_{31}+3x_{32}+4x_{33}+8x_{34} \tag{11}$$

为最小的解。

这里 $m=3$, $n=4$, 故可行消去系統中有 6 个独立未知量, 6 个消去未知量。很容易地从 (10) 可以解得(解法我們將在后面再提)

$$\left\{\begin{aligned}x_{11}&=15-x_{21}-x_{31}\\x_{12}&=10+x_{21}+x_{31}-x_{13}-x_{14}\\x_{22}&=10-x_{21}-x_{31}+x_{13}+x_{14}-x_{32}\\x_{23}&=15+x_{31}-x_{13}-x_{14}+x_{32}-x_{24}\\x_{33}&=15-x_{31}+x_{14}-x_{32}+x_{24}\\x_{34}&=35-x_{14}-x_{24}\end{aligned}\right. \tag{12}$$

把它們代入 (11) 式 S 中, 即得

$$S=665-4x_{13}-7x_{14}+x_{21}-5x_{24}+5x_{31}+4x_{32} \tag{13}$$

在 (13) 式中, 系数 λ 値为負的有 x_{13}, x_{14}, x_{24}、而其中 x_{14} 的系数絕对值最大, 我們考慮把 x_{14} 叠代掉。在 (12) 式中, 含 x_{14} 而系数为 -1 的有 x_{12}, x_{23}, x_{34}; 而这三个表达式中常数項最小的是 x_{12} (为10), 因此当独立变量 $x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{13}, x_{24}$ 都取零値时, x_{14} 最大只能取 10 (再大 x_{12} 就要取負值了)。这样我們以 x_{12} 来叠代 x_{14}, 也即將以含独立未知量 $x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{13}, x_{24}, x_{12}$ 的新的可行消去系統来代替含 $x_{21}, x_{31}, x_{13}, x_{32}, x_{24}, x_{14}$ 为独立未知量的旧的可行消去系統 (12)。新的可行解將是 $x_{21}=x_{31}=x_{13}==x_{32}=x_{24}=x_{12}=0$, 而 $x_{14}=10, \cdots$。所以新的可行解所对应的 S 显然由 (13) 即知为 $665-7\times 10=595$。新的可行消去系統可由 (12) 式很容易的写出:

$$\left\{\begin{aligned}x_{14}&=10+x_{21}+x_{31}-x_{13}-x_{12}\\x_{23}&=5-x_{21}+x_{12}+x_{32}-x_{24}\\x_{22}&=20-x_{32}-x_{12}\\x_{11}&=15-x_{21}-x_{31}\\x_{33}&=25+x_{21}-x_{13}-x_{12}-x_{32}+x_{24}\\x_{34}&=25-x_{21}-x_{31}+x_{13}+x_{12}-x_{24}\end{aligned}\right. \tag{14}$$

它的做法就是从 (12) 中的第二式解出 x_{14}, 再把它代入 (12) 中含 x_{14} 的各式即得。再把它代入 (13) 式中, 即得

$$S=595+7x_{12}+3x_{13}-6x_{21}-5x_{24}-2x_{31}+4x_{32} \tag{15}$$

現在 x_{21} 的系数負得最大，而在 (14) 式中含 x_{21} 为負系数的消去未知量中以 x_{23} 的常数項为最小。所以考慮以 x_{23} 代替 x_{21}，从 (14) 可解得

$$\begin{cases} x_{21}=5-x_{23}+x_{12}+x_{32}-x_{24} \\ x_{14}=15+x_{31}-x_{13}-x_{23}+x_{32}-x_{24} \\ x_{12}=20-x_{32}-x_{12} \\ x_{11}=10+x_{23}-x_{12}-x_{32}+x_{24}-x_{31} \\ x_{33}=30-x_{23}-x_{13} \\ x_{34}=20+x_{23}-x_{32}-x_{31}+x_{13} \end{cases}$$

这个可行消去系統的可行解为 $x_{23}=x_{12}=x_{32}=x_{24}=x_{31}=x_{13}=0$，而 $x_{21}=5$，所以根据 (15)，它所对应的 S 值显然为 $595-6\times5=565$，把 (16) 中 x_{21} 的表达式代入 (15)，卽得

$$S=565+x_{12}+3x_{13}+6x_{23}-2x_{32}+x_{24}-2x_{31} \qquad (17)$$

x_{32} 的系数是負的，而 (16) 中含 x_{32} 为負系数的有 x_{12}, x_{11}, x_{34}，其中以 x_{11} 的常数項最小，所以考慮以 x_{11} 代替 x_{32}，从 (16) 可解得

$$\begin{cases} x_{32}=10+x_{23}-x_{12}+x_{24}-x_{31}-x_{11} \\ x_{21}=15-x_{31}-x_{11} \\ x_{14}=25-x_{13}-x_{12}-x_{11} \\ x_{22}=10-x_{23}-x_{24}+x_{31}+x_{11} \\ x_{33}=30-x_{23}-x_{13} \\ x_{34}=10+x_{12}-x_{24}+x_{11}+x_{13} \end{cases} \qquad (18)$$

以 x_{32} 的表达式代入 (17) 中卽得

$$S=545+3x_{12}+3x_{13}+4x_{23}-x_{24}+2x_{11} \qquad (19)$$

再用 x_{34} 来代替 x_{24}：$x_{24}=10+x_{12}+x_{11}+x_{13}-x_{34}$

將此式代入 (I9)，卽得

$$S=535+2x_{12}+2x_{13}+4x_{23}+x_{11}+x_{34} \qquad (20)$$

独立变量的系数全为非負。所以最优解为 $x_{12}=x_{13}=x_{23}=x_{11}=x_{34}==x_{22}=x_{31}=0$，$x_{14}=25$，$x_{21}=15$，$x_{24}=10$，$x_{32}=20$，$x_{33}=30$，而 S 的最小値为 535。