国防科学技术大学惯性技术实验室优秀博士学位论文丛书

高动态下捷联惯性导航算法误差分析与优化方法研究

Research on Error Analysis and Optimization Methods for Strapdown Inertial Navigation Algorithm under Highly Dynamic Environment

宋敏　吴文启　潘献飞　著

国防工業出版社
National Defense Industry Press

国防科学技术大学惯　　　　博士学位论文丛书

高动态下捷联惯性导航算法误差分析与优化方法研究

Research on Error Analysis and Optimization Methods for Strapdown Inertial Navigation Algorithm under Highly Dynamic Environment

宋　敏　吴文启　潘献飞　著

国防工業出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高动态下捷联惯性导航算法误差分析与优化方法研究/宋敏，吴文启，潘献飞著. —北京：国防工业出版社，2017.2

（国防科学技术大学惯性技术实验室优秀博士学位论文丛书. 自主导航理论与方法）

ISBN 978-7-118-10181-2

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①宋…　②吴…　③潘…　Ⅲ. ①惯性导航系统－算法－研究　Ⅳ. ①TN966

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 023786 号

※

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×1000　1/16　印张 10¼　字数 172 千字

2017 年 2 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—1500 册　定价 50.00 元

国防书店：（010）88540777　　发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755　　发行业务：（010）88540717

序

大学之道，在明明德，在亲民，在止于至善。

——《大学》

国防科学技术大学惯性导航技术实验室，长期从事惯性导航系统、卫星导航技术、重力仪技术及相关领域的人才培养和科学研究工作。实验室在惯性导航系统技术与应用研究上取得显著成绩，先后研制我国第一套激光陀螺定位定向系统、第一台激光陀螺罗经系统、第一套捷联式航空重力仪，在国内率先将激光陀螺定位定向系统用于现役装备改造、首次验证了水下地磁导航技术的可行性，服务于空中、地面、水面和水下等各种平台，有力地支撑了我军装备现代化建设。在持续的技术创新中，实验室一直致力于教育教学和人才培养工作，注重培养从事导航系统分析、设计、研制、测试、维护及综合应用等工作的工程技术人才，毕业的研究生绝大多数战斗于国防科技事业第一线，为"强军兴国"贡献着一己之力。尤其是，培养的一批高水平博士研究生有力地支持了我军信息化装备建设对高层次人才的需求。

博士，是大学教育中的最高层次。而高水平博士学位论文，不仅是全面展现博士研究生创新研究工作最翔实、最直接的资料，也代表着国内相关研究领域的最新水平。近年来，国防科学技术大学研究生院为了确保博士学位论文的质量，采取了一系列措施，对学位论文评审、答辩的各个环节进行严格把关，有力地保证了博士学位论文的质量。为了展现惯性导航技术实验室博士研究生的创新研究成果，实验室在已授予学位的数十本博士学位论文中，遴选出23本具代表性的优秀博士学位论文，分成五个专题，结集出版，以飨读者。这五个专题分别是：(1)激光陀螺惯导系统技术；(2)地磁导航技术；(3)嵌入式组合导航技术；(4)航空重力测量技术；(5)自主导航理论与方法。

结集出版的目的有三：其一，不揣浅陋。此次以专著形式出版，是为了尽可能扩大实验室的学术影响，增加学术成果的交流范围，将国防科学技术大学惯性导航技术实验室的研究成果，以一种"新"的面貌展现在同行面前，希望更多的同仁们和后来者，能够从这套丛书中获得一些启发和借鉴，那将是作者和编辑都倍感欣慰的事。其二，不宁唯是。以此次出版为契机，作者们也对原来的学位论

文内容进行诸多修订和补充，特别是针对一些早期不太确定的研究成果，结合近几年的最新研究进展，又进行了必要的修改，使著作更加严谨、客观。其三，不关毁誉，唯求科学与真实。出版之后，诚挚欢迎业内外专家指正、赐教，以便于我们在后续的研究工作中，能够做得更好。

在此，一并感谢各位编委以及国防工业出版社的大力支持！

吴美平

2015 年 10 月 09 日于长沙

前　言

随着捷联惯性导航系统在高超声速飞行器导航等高动态环境下应用,传统导航算法精度受高动态特别是大机动环境影响较大的问题日益凸显。同时,惯性器件精度的不断提高也对导航算法精度提出了更高的要求。随着高精度激光陀螺、光纤陀螺在高动态捷联惯性导航领域的广泛应用,冷原子陀螺和加速度计等超高精度惯性器件的概念研究及实验室原型样机的出现,传统上忽略的算法误差需要重新审视。

本书重点研究以下问题:如何解析定量分析大机动和圆锥、划摇运动并存的高动态环境下捷联惯性导航算法的误差?如何优化现有圆锥算法和划摇算法,在兼顾其在纯圆锥、划摇环境下最优精度的同时,提高其在大机动条件下的精度?如何优化捷联惯性导航速度数值积分算法,在降低计算量的同时,提高数值算法的精度?围绕上述基础理论问题,本书完成的工作和研究成果概括如下:

(1)提出了圆锥运动和大机动并存情况下圆锥算法误差量化分析方法。

对连续圆锥积分关于时间进行了 8 阶泰勒级数展开,作为圆锥算法误差分析和优化设计的基础。选择频率级数圆锥算法和显式频率整型圆锥算法等两种具有代表性的压缩形式圆锥算法进行误差分析。指出了两种圆锥算法在算法结构上的相似性。用相对圆锥误差和平均误差累积率方法分析了这两种圆锥算法在纯圆锥环境下的精度关系。对这两种圆锥算法关于时间进行了泰勒级数展开,并与连续圆锥积分的泰勒级数进行比较,推导了其在大机动条件下的误差方程。指出了两种圆锥算法大机动条件下误差方程的异同,并分析了二者误差方程存在差异的原因。

(2)提出了兼顾圆锥运动和大机动条件下算法精度的扩展圆锥算法及其优化方法。

给出了圆锥算法优化的原则,即必须在保证圆锥算法在纯圆锥环境下最优精度的前提下,提高算法在大机动条件下的精度。指出现有圆锥算法采用压缩的圆锥算法形式,不能满足算法优化的需求。采用扩展的圆锥算法形式进行了圆锥算法优化。对扩展的圆锥算法形式进行了时间泰勒级数展开,并与连续圆

锥算法泰勒级数进行比较，推导出扩展形式圆锥算法提高在大机动条件下精度需满足的方程。根据压缩形式圆锥算法系数与扩展形式圆锥算法系数的关系，给出扩展形式圆锥算法保持纯圆锥环境下最优精度需要满足的方程。联立求解这两种方程得到了优化圆锥算法系数。分析了扩展圆锥算法的精度，给出了大机动条件下的误差公式。

（3）提出了划摇运动和大机动并存情况下连续形式速度积分算法误差量化分析方法。

对比力加速度引入的速度增量的精确表达式进行了 5 阶泰勒级数展开，作为速度积分算法误差分析和优化设计的基础。指出了近似速度旋转补偿项和精确近似旋转补偿项的差别。通过泰勒级数展开，分析了带有近似速度旋转补偿项的速度积分算法的误差，指出了带有近似速度旋转补偿项的速度积分误差与忽略姿态增量二阶和高阶项的关系。分析了采用精确速度旋转补偿项的速度积分算法以及基于速度平移矢量的 3 种速度积分算法在大机动条件下的精度。推导的误差方程给出了这几种速度积分算法在大机动条件下的相对精度关系。

（4）提出了划摇运动和大机动并存情况下速度数值积分算法误差量化分析方法。给出了 3 种典型速度数值积分算法在大机动条件下的误差方程。提出了一种优化速度数值积分算法。

结合具体导航应用分析了带有近似速度旋转补偿项的速度数值积分算法的误差，比较了连续形式速度积分算法本身的误差与数值计算误差的关系。对所提出的优化速度数值积分算法与带有近似速度旋转补偿项及精确速度补偿项的速度数值积分算法进行比较，比较其精度与计算量。证明了该优化算法具有较高精度且需要的计算量较低。推导了基于速度平移矢量的速度数值积分算法的误差方程，并且分析了数值积分算法误差与压缩形式频率级数划摇算法误差的关系。

（5）提出了兼顾划摇运动和大机动条件下算法精度的扩展划摇算法及其优化方法，并在此基础上对基于速度平移矢量的速度数值积分算法进行了优化。

对连续划摇积分进行了 7 阶时间泰勒级数展开，并以其作为算法优化和误差分析的基础。为保证划摇算法在纯划摇条件下的最优精度，同时降低大机动条件下的误差，优化划摇算法采用扩展算法形式。将扩展形式划摇算法的泰勒级数与连续划摇积分的泰勒级数进行比较得到一组方程，再扩展压缩形式频率级数圆锥和划摇设计方程使之适用于扩展划摇算法，联立求解这两组方程得到了扩展形式划摇算法系数。误差分析显示，用扩展形式划摇算法代替压缩形式

频率级数划摇算法构造速度平移矢量数值算法，能够避免速度积分算法在数值计算过程中的精度降低。基于扩展形式频率级数圆锥算法和划摇算法，设计了一种优化速度数值积分算法。该算法与连续形式算法的误差方程形式相同，且需要的计算量较少，适合用于高精度惯性导航系统，提高导航精度。

本书通过仿真验证了理论分析结果的正确性。在大机动条件和纯圆锥、划摇环境下检验了优化圆锥算法和划摇算法的精度，证明了优化的基于速度平移矢量速度数值积分算法在精度和计算量上的优越性。

关键词：捷联惯性导航；高动态；大机动；扩展圆锥算法；扩展划摇算法；速度平移矢量；速度数值积分算法；误差分析；优化

目 录

第1章 绪 论

1.1 捷联惯性导航算法精度

捷联惯性导航是根据牛顿运动学定律进行航位推算的技术。捷联惯性导航系统利用直接固连在载体上的陀螺仪和加速度计测量载体角运动和线运动。测量得到的角速率(或角增量)和比力加速度(或比力积分增量)输入导航计算机,结合初始条件、积分角速率(或计算角增量)得到载体的姿态;利用得到的姿态信息将比力加速度(或比力积分增量)变换到导航坐标系,结合重力场信息,计算得到载体的速度;最后对速度进行积分得到载体的位置[1]。这3个积分过程分别称为姿态解算、速度解算和位置解算[1]。为了保证算法误差,相对于由惯性传感器引入的误差可以忽略不计,这3个计算过程必须选择高精度的数值积分算法。而在实际捷联惯性导航中,为了降低捷联陀螺和加速度计的输出噪声对系统解算精度的影响,并且能够完全利用输出信息,陀螺和加速度计的输出一般采用增量形式,即加速度计输出为比力积分增量,陀螺输出为角增量。在高动态运行或恶劣振动环境下,刚体有限转动的不可交换性将会带来很大的负面效应,如圆锥(Coning)效应、划摇(Sculling)效应以及涡卷(Scrolling)效应,分别引入姿态解算误差、速度解算误差以及位置解算误差[1,2]。

由于捷联惯性导航系统完全依赖自身惯性器件获取必要的信息,不依赖任何外界输入,也不向外界辐射任何能量,是一种完全自主的导航系统[3],因此具有隐蔽性好、抗干扰能力强、满足全天候使用需求等优点,在军事领域得到了广泛的应用。而捷联惯性导航系统体积小、重量轻、易维护和可靠性高等优点,又使其被大量应用于民用领域[4-6]。

捷联惯性导航系统的精度主要取决于惯性传感器件的精度、导航算法精度、导航计算机的处理能力以及载体所处的外界环境等。随着计算机技术的快速发展,导航计算机的处理能力不再是制约捷联惯性导航系统精度的主要因素。而随着惯性传感器制造工艺水平的提高,其输出的数据越来越接近载体的实际运动情况,给捷联惯性导航系统带来的误差越来越小,如激光陀螺精度已优于0.001°/h,石英挠性加速度计精度已达到 μg 量级。这对导航算法的精度提出了更高的要求。因为,一般认为导航算法的误差应该低于惯性器件引入误差的

5%[1,2]。对于一般的航空航天、航海和陆地导航等应用,传统捷联惯性导航算法的精度已能满足要求。但随着捷联惯性导航系统在高超声速飞行器等领域的应用[7-10],捷联惯性导航开始更多地工作在宽频谱振动/大机动等高动态环境下,传统导航算法面临挑战。

大机动(Maneuvers)指的是载体运动角速度或加速度幅值较大而频率较低的情况,如角速率达到 100°/h ~ 1000°/h,加速度达到 4 ~ 100g;宽频谱振动(Vibrations)指的是载体处于线振动或角振动环境下,振动幅值较小,但振动频率范围较宽,达到几百赫兹。振动环境对载体运动的影响常表现为宽频谱圆锥运动和宽频谱划摇运动。

以高超声速飞行器为例,飞行速度一般大于 5Ma,线加速度幅值较大,其转向时角加速度幅值也较大[11-12]。

速率偏频激光陀螺系统 IMU 随其转台高速旋转,角速率幅值较大[23-33];旋转弹道导弹绕其弹体轴线高速自旋,角速率幅值较大[34-45];高超声速飞行器加速很快,线加速度幅值较大,其转向时角加速度幅值也较大[7-10],因此这些捷联惯性导航系统经常处于大机动运动环境下,即振动/大机动等高动态工作环境也对捷联惯性导航算法提出了更高的要求。

随着高精度激光陀螺、光纤陀螺在高动态捷联惯性导航领域的广泛应用,冷原子陀螺和加速度计等超高精度惯性器件的概念研究及实验室原型样机的出现[3],传统上忽略的算法误差也需要重新审视。例如,基于冷原子陀螺和加速度计的捷联惯性导航系统的导航定位精度有望达到 10m/h 的水平[3],这对导航算法精度提出了更高的要求。

1.2 高动态下捷联惯性导航算法精度

高动态工作环境引入的捷联惯性导航算法误差主要分为姿态算法误差、速度算法误差和位置算法误差等 3 个方面。导航解算是个迭代过程,误差会随着解算过程不断积累。例如,姿态算法误差会引起比力变换的误差,然后经过一次积分,引入速度误差,再积分引入位置误差;速度算法误差也会经过积分放大引入位置误差。因此,要从源头处尽量减小误差,这就要求导航算法本身的误差要尽可能的小。从 20 世纪 50 年代末首次提出捷联惯性导航系统的概念以来,研究人员不断地尝试各种方法,设计和优化姿态、速度及位置算法,以求减小导航误差。可以说,捷联惯性导航算法的发展过程,就是寻求减小导航算法误差的过程。而捷联惯性导航对算法执行的实时性和精确性要求较高,这对导航计算机的处理能力是一种挑战,所以捷联惯性导航算法的发展和当时的计算机发展水

平息息相关。

1.2.1 姿态解算算法

姿态算法的精度直接影响比力积分变换的精度,进而影响速度、位置解算的精度,所以从捷联惯性导航的概念提出以来,导航领域的研究人员更多地把精力集中在姿态积分算法的设计研究上。由于受当时计算机字长和吞吐能力的限制,姿态更新算法的阶次和执行频率不能兼顾。所以,20 世纪 50 年代末和 60 年代,捷联惯性导航领域的学者主要致力于两种姿态积分算法的研究实现:一种是一阶数值积分算法,但是计算频率较高,如 10 ~ 20kHz;另一种是高阶数值积分算法,但是执行频率较低,如 50 ~ 100Hz[1]。载体运动中的高频成分会引入不可交换性误差,对姿态解算精度影响较大,需要用执行频率较高的算法才能更精确地处理。但受当时的计算机处理能力限制,高速算法只能用精度有限的一阶积分算法实现。与之相对的是,高阶算法的支持者认为高阶算法与一阶算法相比精度更高,应该使用高阶算法进行姿态解算。但不可否认的是,高阶算法也比一阶算法更复杂,需要更多的计算量,因而只能以较低速率执行,以满足当时计算机吞吐能力的限制[1]。两种方法孰优孰劣,莫衷一是。四元数方法的出现使得兼顾这两个方法的优点成为可能。相对于方向余弦矩阵方法和欧拉角法,四元数方法以其非奇异性、简便性和计算有效性而成为姿态更新的首选方法[46]。在当时设计的姿态更新方法中,四元数方法在高频角速率环境下姿态更新精度更高[1]。

结合上述两类姿态更新算法的优势,Savage 于 1966 年提出了一种双速姿态积分算法结构[47]。该结构将姿态更新分为两个部分:简单的高速一阶算法和复杂的中速高阶算法。将两部分结合使用,中速算法执行姿态更新,高速算法为中速算法提供输入。在姿态更新周期内,高速算法用于处理载体的高频角振动,减小高频角振动引入的圆锥误差。这两部分算法配合使用,该双速算法的综合精度与以较高频率执行高阶算法的精度相当。并且,由于高阶算法以较低速率执行,高速部分采用简单的一阶算法,使得该双速算法的总体计算量与前述的采用一阶积分算法的高速姿态算法的计算量大致相当。随着导航精度要求的提高,Savage 提出的这个双速姿态更新算法的缺陷逐渐体现出来。在这个双速算法结构中,连续形式的姿态微分方程是用 Picard 迭代积分的方式描述的,其中高速算法和中速算法是同时定义的。这种方法的复杂性限制双速结构中的高阶中速算法只能采用二阶算法,限制了精度的进一步提高[1]。

1969 年,Jordan 提出了一种新的双速姿态更新算法结构[48]。与 Savage 的

双速算法不同的是，Jordan 的双速算法中，高速算法和中速算法是分开定义的。Jordan 先假设载体处于特殊运动条件下，即绕一个固定轴旋转，得到精确的姿态解，并由此给出中速算法。在此假设条件下，中速算法的输入是角速率矢量的积分，即角增量。对于一般的运动条件，即载体的转动方向不定，Jordan 认为中速算法的形式应保持不变，但是高速算法不再是角速率矢量的积分，而应该是 Euler 转动矢量变化率的积分。由此，精确的中速算法的输入不再是角增量，而是 Euler 转动矢量。因此，Jordan 的双速姿态更新算法结构中，中速部分采用精确的高阶算法（方向余弦矩阵方程），高速部分采用简化的二阶积分算法。

1971 年，Bortz 拓展了 Jordan 的双速算法结构[49]。其高速部分基于 Laning 于 1949 年提出的精确的等效转动矢量微分方程[50]。积分该等效转动矢量微分方程，能够为中速算法提供精确的姿态变化量作为输入。通过截取方向余弦矩阵方程中的两个三角系数，可以根据需要构造中速算法，达到任意阶次的精度。在实践中，通常采用简化的 Bortz/Laning 等效转动矢量微分方程来构造高速算法。由此可见，Jordan 和 Bortz 的双速算法结构更加方便应用，因为高速算法和中速算法部分都可以根据实际应用需要来单独设计。此后，Jordan 提出的基于方向余弦矩阵方程的精确中速算法结合 Bortz 提出的基于精确等效转动矢量微分方程的中速算法形成的双速算法结构，构成了捷联惯性导航姿态更新算法发展的基础[1]。

另外，在 Jordan 和 Bortz 双速算法结构中，精确的中速算法部分是用方向余弦矩阵的形式描述的。那么，在不对高速算法部分做任何修改的同时，可以将中速算法部分改成用四元数方法进行姿态更新[1]。四元数姿态更新算法同样是精确的。四元数姿态更新描述的中速算法结合等效转动矢量微分方程表示的高速算法构成的双速算法结构也得到了广泛的应用。Savage 在 1998 年详细描述了这两种双速姿态更新算法，同时针对当时计算机的能力和软件技术水平，给出捷联惯性导航姿态算法的误差标准，即姿态算法本身引入的误差应该控制在惯性器件引入误差的 5% 内[1]。该文献是对捷联惯性导航姿态更新算法的重要总结，是设计姿态算法的重要依据。

目前，许多飞行器和其他载体上的捷联惯性导航系统都采用这两种双速姿态更新算法结构。中速算法的频率，如 50 ~ 200Hz，是基于载体可能经历的最大角速率而设计的，目的是确保每个姿态更新周期内的最大姿态变化量较小，保持姿态更新过程中的小角度近似。高速算法的频率（如 1 ~ 4kHz）设计则主要是考虑捷联惯性导航工作的振动环境，尽可能减小振动引入的圆锥效应[1]。

由于四元数姿态更新算法的精确性，捷联惯性导航领域的研究人员开始把更多的精力集中在高速算法的研究上。得益于计算机处理能力的提升，高速算

法不再局限于最初的一阶算法，而开始利用高阶算法计算等效转动矢量。

对于等效转动矢量微分方程，大多数的研究都是基于同样的近似，即在小角度假设的条件下忽略微分方程中的三元叉乘项，并将保留的叉乘项中的等效转动矢量用角速率积分代替[3]。该叉乘项的数值积分即为圆锥校正算法，则作为中速算法输入的等效转动矢量由角速率积分增量和圆锥校正两部分组成。自此，捷联惯性导航姿态算法的发展更多地体现在不同的圆锥补偿算法的设计和优化上。

Miller 首先引入了在纯圆锥环境下优化圆锥算法系数的概念[51]。Miller 用的中速算法是四元数姿态更新方法，输入为高速算法提供的等效转动矢量。Miller 先用角增量的 3 阶时间泰勒级数展开解出一组 3 子样圆锥算法系数；而后又在纯圆锥条件下比较了等效转动矢量的解析表达式和计算表达式，得到等效转动矢量误差，即圆锥算法误差。再将这个误差项对于频率进行泰勒级数展开，并令展开式中的 3 次和 5 次幂系数为零，得到另一组 3 子样圆锥算法系数，并证明了该组系数在圆锥误差补偿性能上的优越性。

Miller 提出的这种在纯圆锥条件下优化圆锥算法设计的思想得到了广泛的应用。Ignagni 给出 9 种圆锥校正算法[52]，推导出纯圆锥条件下有关圆锥积分以及角增量叉积的两个重要性质：一是在纯圆锥环境下，每个姿态更新间隔内的圆锥积分是个常数，只与更新间隔的长度有关，与绝对时间无关；二是在纯圆锥环境下，角速率积分采样值之间的叉积只与两个采样值的相对时间间隔有关，与采样值的绝对时间无关。这两个重要性质是圆锥算法形式简化和系数优化的基础，被广泛应用于此后很多有关圆锥算法优化的研究工作中。分别利用时间泰勒级数展开和纯圆锥条件下的频率泰勒级数展开，Ignagni 给出了几个圆锥算法的推导过程并评估了这些算法在纯圆锥运动以及平缓角运动条件下的精度，指出在纯圆锥条件下，用 Miller 算法优化得到的圆锥算法较优，而在平缓角运动条件下，用时间泰勒级数展开得到的圆锥算法精度较高。Ignagni 还考察了 Miller 算法在更一般的角运动条件下的性能。分析表明，在角速率可以表示成谐函数之和的情况下，用 Miller 方法得到的圆锥算法仍然是最优的。

Jiang 把前一个圆锥补偿周期的角增量之和作为修正项引入当前周期内的圆锥补偿运算，来提高圆锥算法性能[53,54]。改进了 Jordan 的 2 子样算法和 Miller 的 3 子样算法。利用前一个周期的采样值进行圆锥补偿运算，提高了圆锥算法精度和数据采样值的利用率。这是对圆锥算法形式和设计方法的重要改进。

Musoff 用 Jacobian 椭圆函数和 Richardson 外推法评估了 Miller 算法的性能。仿真证明当角速度是由 Jacobian 椭圆函数描述的广义圆锥运动时，Miller 算法不再是最优的[55]。提出了用数据插值技术改进算法性能的方法。