



普通高等教育土木与交通类“十三五”规划教材

数值算法及软件应用

主 编 刘爱华 赖佑贤 丛沛桐
副主编 陈永喜 朱家立 黄锦城
李 青 欧阳帆



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育土木与交通类“十三五”规划教材

数值算法及软件应用

主 编 刘爱华 赖佑贤 丛沛桐
副主编 陈永喜 朱家立 黄锦城
李 青 欧阳帆



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

· 北京 ·

内 容 提 要

本书理论体系完整、原理方法简单易懂。首先,从求解问题的灵活性和工程应用的广泛性出发,重点介绍了有限元方法(FEM)的基本原理及一般工程问题的有限元求解思路,讨论了有限元模型的建立和计算结果的解释与处理方面的关键问题,并结合ANSYS等常用有限元软件进行了算例分析。其次,书中还介绍了算法原理更为复杂、但解题功能更为强大的两种数值算法,即边界元法(BEM)与离散元法(DEM)的基本思想和优势,以及存在的主要问题和发展方向。最后,对工程数值模拟分析中的其他有代表性的计算软件,如FLAC3D、Surpac、Micromine等软件进行了概括性的介绍。

本书既可作为高等院校土木、水利、建筑、交通及其他岩土工程类专业学生数值算法与软件应用课程的教材,也可作为相关学科领域研究生、工程技术人员及科研人员了解数值算法及软件应用方面知识的重要参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数值算法及软件应用 / 刘爱华, 赖佑贤, 丛沛桐主
编. — 北京: 中国水利水电出版社, 2017.4
普通高等教育土木与交通类“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5170-5264-7

I. ①数… II. ①刘… ②赖… ③丛… III. ①数值计
算—应用软件—高等学校—教材 IV. ①0245

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第054961号

书 名	普通高等教育土木与交通类“十三五”规划教材 数值算法及软件应用 SHUZHI SUANFA JI RUANJIAN YINGYONG
作 者	主 编 刘爱华 赖佑贤 丛沛桐 副主编 陈永喜 朱家立 黄锦城 李 青 欧阳帆
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 14.75印张 340千字
版 次	2017年4月第1版 2017年4月第1次印刷
印 数	0001—1000册
定 价	36.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

随着计算机运算能力的不断提升，数值算法的重要性和实用性日益凸显，与之相应的则是各类工程应用程序的蓬勃发展和推广应用。

数值计算方法既有数学理论上的抽象性和严谨性，又有实用性和实验性的技术特征，是一门理论性和实践性都很强的学科。数值方法的突出优点是能够替代昂贵而又非常耗时的物理试验，对所研究的问题进行数值模拟和科学分析。事实上，随着数值方法的不断发展与进步，计算机硬件设施的越来越先进，计算机运算速度的越来越快，使得以计算机为载体、以基于数值算法原理开发而成的工程应用程序为工具的数值模拟计算与仿真分析，已获得越来越广泛的工程实际应用。可以毫不夸张地说，数值模拟计算方法和技术已经成为从事工程科学研究和实际工程设计施工的工程技术和科研人员必须掌握的一种高效、可靠的分析工具。数值计算方法及其应用也已经成为高等学校培养高层次、创新型，能从事科学研究、技术应用和工程管理人才的必修课程。

本教材在内容安排上，既注重学科知识的完整性，也兼顾学科知识的实用性。采取由浅入深、先易后难、重点突出的学习思路。全书首先以有限元原理和解题方法为重点，系统阐述了运用数值算法求解工程问题的一般步骤，讨论了影响数值计算结果准确度和可靠性的关键因素及对策，提供了典型工程算例。接着较完整地介绍了边界元与离散元两种数值算法的基本思想、优势与发展方向。最后，对目前在工程应用领域获得了较广泛应用的代表性数值计算与分析软件进行了概括性介绍。书中内容既反映了数值方法及工程应用程序当前在工程领域所取得的理论及实践成果，也融入了作者的一些思路和想法，力求立足学术前沿，反映学科最新成就。全书共分9章：

第1章对数值算法的定义和发展等情况作了简要介绍。

第2章介绍了有限元法的基本理论，包括有限元的基本概念、插值函数和有限元分析的基本单元等。

第3章介绍了有限元方程组的解法，着重论述了有限元法在固体力学、结构力

学非线性分析中的基本解法，并给出了有限单元法求解的一些基本简例。

第4章从理论和方法角度讨论了有限元模型的建立和计算结果的解释与处理方面的若干问题。

第5章对常用的有限元工程计算软件进行了介绍。

第6章着重介绍了有限元软件在岩土工程问题中的分析应用及简例。

第7章阐述了边界元法的基本思想、优势与发展方向。介绍了岩土力学领域的边界元解法以及几种边界元计算分析软件，比较了边界元和有限元的优劣势。

第8章对离散元法的基本思想、优势与发展方向进行了简单介绍，讨论了典型离散元模拟分析算例，介绍了离散元方法的基本原理以及该方法与其他数值算法的耦合问题，指出了该方法目前存在的主要问题，介绍了3种离散元计算分析软件。

第9章介绍了工程数值模拟分析中的其他计算软件。

基于数值算法及软件应用学科本身的特点，无论是算法原理还是基于算法原理开发形成的软件都在以惊人的速度不断更新和发展。限于编者水平，书中难免存在不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编者

2016年12月

主 编 简 介

刘爱华 男，1963 年 3 月生，湖南邵东人，博士、教授、博士研究生导师。

国际岩石力学学会会员，中国岩石力学与工程学会工程实例委员会委员，企业安全生产标准化建设指导与评审专家。长期从事岩石力学计算方法与理论、岩土工程加固机理与灾害防治以及安全管理工程等领域的工作。1983 年毕业于中南大学，1988—1995 年公派留学法国，获国立巴黎高等矿业学校硕士和博士学位并在巴黎第十二大学完成博士后工作。1995—1997 年任职中南大学资源与安全工程学院，1996 年晋升为教授。1997—2004 年分别任职美国 CPI 和 IBM 等公司。2004—2013 年任中南大学教授、博士研究生导师。2013 年 12 月调入华南农业大学水利与土木工程学院。荣获教育部 1995 年度“优秀青年教师资助计划”、国家教委优秀留学人员基金、IET 等奖励。曾担任 973 项目子课题负责人及 973 项目研究骨干，获得过省部级科技进步特等奖、一等奖、二等奖，以及校级教学成果一等奖和省级教学成果二等奖。已出版著作 5 部，发表 SCI、EI 等科研论文 80 多篇，获国家发明专利授权 1 项。E-mail: alexliu@163.com

赖佑贤 男，1972 年 2 月生，江西赣州人，研究生学历，教授级高级工程师。

现为广州市水电建设工程有限公司创新中心主任，公司技术负责人，广东华南高新技术产业研究院执行院长，同时兼任广东省河道淤泥处理及资源化利用工程技术研究中心和越秀区河道淤泥处理及资源化利用工程技术研究开发中心主任等职务。长期从事水利水电工程、市政工程的施工与管理工作，近年来主要从事水利工程、污淤泥工程技术及水环境治理技术研究及施工管理工作，先后担任《广州市荔湾区花地河景观西闸工程》《广州市海珠区调水补水工程设计采购施工总承包标段一》《马涌河水质净化技术》《污水污泥干化及其燃料化利用技术》《海砂混凝土及其在广东省海堤工程中的应用研究》以及《江湖淤泥理化调理及复合固化处理技术系统》等多个工程项目和科研项目的负责人，曾获得多项工程奖项和科技奖项，作为发明权人申请专利 20 多项，发表论文 20 余篇。

丛沛桐 男，1965 年 2 月生，黑龙江集贤人，博士、教授、博士研究生导师。

中国农业工程学会农业水土工程专业委员会委员，广东省人民政府应急委专家，广州市人民政府决策咨询专家。从事水利信息化与防灾减灾、智慧水务等领域研究工作。获省部级自然科学二等奖 1 项。主编学术专著 3 部，发表 SCI、EI 等科研论文 60 余篇。

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 数值算法基本定义	1
1.2 数值算法的发展历程	1
1.3 计算机技术与数值算法工程应用	3
第 2 章 有限元法基本理论	5
2.1 概论	5
2.1.1 有限元基本思想	5
2.1.2 有限元发展过程	5
2.1.3 有限元分析的内容和作用	7
2.2 有限元法的基本概念	7
2.2.1 物理概念	7
2.2.2 数学概念	10
2.2.3 求解原理	12
2.3 有限元法的理论基础	12
2.3.1 基本概念	12
2.3.2 加权余值法	13
2.3.3 变分原理	22
2.3.4 积分方程的有限元解法	23
2.3.5 有限元解的收敛性	30
2.4 插值函数(形函数)	31
2.4.1 有限元插值的一般理论	31
2.4.2 一维单元的插值函数	33
2.4.3 平面三角形单元的插值函数	35
2.4.4 平面矩形单元的插值函数	39
2.4.5 三维单元的插值函数	41

2.5 等参元及特殊单元介绍	45
2.5.1 等参元的坐标变换式	45
2.5.2 平面直边三角形等参单元	46
2.5.3 平面四边形等参单元	47
2.5.4 三维六面体等参单元	48
2.5.5 特殊单元介绍	50
2.6 有限元刚度矩阵计算	53
2.6.1 有限元刚度矩阵计算	53
2.6.2 刚度矩阵特点	59
2.6.3 刚度矩阵计算机存储	60
2.7 数值积分方法	61
2.7.1 数值积分方法的基本思想	61
2.7.2 牛顿-柯塔积分法	61
2.7.3 高斯积分法	62
2.7.4 二维问题中的数值积分	62
2.7.5 三维问题中的数值积分	63
第3章 有限元法与力学计算	64
3.1 固体力学基本方程	64
3.1.1 应力和平衡方程	64
3.1.2 应力、应变、位移关系	66
3.1.3 线性应力-应变关系	67
3.1.4 平面应力和平面应变	68
3.2 最小位能原理	70
3.3 有限元方程的建立	70
3.4 单元矩阵的计算	71
3.5 有限元非线性分析基本概念	73
第4章 有限元法应用中的核心内容	75
4.1 概述	75
4.2 有限元法求解步骤	75
4.2.1 结构离散	75
4.2.2 单元分析	76
4.2.3 整体分析	79
4.3 有限元模型的建立	80
4.3.1 有限元建模的任务	81
4.3.2 有限元模型的定义	82
4.3.3 有限元建模的一般步骤	84
4.4 有限元建模技术	87
4.4.1 单元类型和形状的选择	87
4.4.2 网格的划分	88

4.4.3	力/位移边界条件	89
4.4.4	模型检查	92
4.5	有限元解的误差分析及收敛性	92
4.5.1	有限元解的误差及产生原因	92
4.5.2	收敛准则	93
4.5.3	有限元解的下限性	93
4.6	单元应力计算结果的误差与平均处理	94
4.6.1	应力结果的误差性质	94
4.6.2	高斯积分点上的应力精度	95
4.6.3	共用节点上应力的平均处理	96
4.6.4	误差处理方法	97
第5章	有限元计算软件功能与典型应用软件	99
5.1	概述	99
5.2	有限元分析的计算机程序化	100
5.2.1	有限元分析平台及分析过程	100
5.2.2	有限元分析的离散方式	101
5.2.3	有限元分析程序模块	102
5.3	有限元软件及其实施路径	104
5.3.1	有限元分析软件简介	104
5.3.2	有限单元法实施路径	104
5.4	ANSYS 软件及其应用	105
5.4.1	ANSYS 软件简介	105
5.4.2	基于 ANSYS 的有限元分析过程	111
5.5	LS-DYNA 软件介绍	116
5.5.1	LS-DYNA 简介	116
5.5.2	LS-DYNA 功能特点	116
5.6	ABAQUS 非线性有限元分析软件	117
5.7	MSC. MARC 软件介绍	118
第6章	有限元法与岩土工程应用	119
6.1	有限元与岩土工程分析	119
6.1.1	概述	119
6.1.2	岩体物理特性与有限元处理方法	119
6.1.3	岩体的应力-应变关系	120
6.1.4	岩体的强度条件	121
6.1.5	斜层状岩体的平面变形的弹性矩阵	123
6.1.6	节理单元的处理方法	124
6.2	岩土工程问题的边界条件	127
6.2.1	概述	127
6.2.2	静力问题的边界条件	127

6.2.3 动力问题的边界条件	128
6.3 边坡稳定性有限元分析	129
6.3.1 计算条件和参数	129
6.3.2 计算范围和有限元网格	129
6.3.3 计算结果分析	129
6.4 隧道开挖与支护有限元分析	131
6.4.1 计算条件	131
6.4.2 计算参数和有限元网格	132
6.4.3 计算结果分析	133
6.5 采场参数优化有限元分析	134
6.5.1 计算分析	134
6.5.2 计算条件和参数	135
6.5.3 数值计算模型的建立	136
6.5.4 计算结果分析	136
第7章 边界元法基础	141
7.1 概述	141
7.1.1 边界元法发展简述	141
7.1.2 基本思想	142
7.1.3 边界元法的优势和发展方向	142
7.2 泊松方程的边界元法	143
7.2.1 积分方程的建立和基本解	143
7.2.2 边界离散为边界单元并建立代数方程组	146
7.2.3 系数矩阵中元素的计算	149
7.2.4 域内 p 点 $\phi(p)$ 函数值的计算	151
7.2.5 线性边界单元和高阶单元的计算	151
7.3 弹性体受力分析的边界元法	155
7.3.1 基本概念	155
7.3.2 弹性问题边界积分方程表达式	157
7.3.3 二维弹性体的基本解和边界元方程的表达式	159
7.3.4 系数矩阵中元素 H_{ij} 和 G_{ij} 的计算	162
7.3.5 域内点的位移和内点、边界点应力的计算	163
7.4 体积力的边界积分计算	167
7.4.1 重力荷载	168
7.4.2 离心力荷载	168
7.4.3 热载荷	169
7.5 三维弹性体的边界元公式	170
7.5.1 三维弹性体的基本解和三阶张量	170
7.5.2 三维体积力的边界积分式	171
7.5.3 离心力载荷三维体积力边界积分式	172

7.5.4 三维稳态热载荷的边界积分公式	172
7.6 岩土力学中的边界元法	172
7.7 边界元软件简介	174
7.7.1 边界元法软件 THBEM2 及 THBEM3	174
7.7.2 三维边界元法流体动力学分析软件 LINFLOW	175
7.7.3 边界元软件 Map3D	176
7.8 边界元与有限元的比较	180
第 8 章 离散元法基础	181
8.1 概述	181
8.1.1 基本思想	181
8.1.2 离散元法在国内外的发展状况	182
8.1.3 离散元一般求解步骤及应用领域	183
8.2 基本原理	184
8.3 离散元法与其他数值方法的耦合	186
8.4 离散元法存在的问题和展望	187
8.4.1 离散元法存在的主要问题	187
8.4.2 离散元法研究的展望	188
8.5 离散元软件介绍	189
8.5.1 PFC (Particle Flow Code) 软件	189
8.5.2 EDEM 软件	194
8.5.3 UDEC 高级非连续力学分析软件	200
第 9 章 工程数值模拟分析中的其他计算软件	207
9.1 FLAC3D 软件介绍	207
9.1.1 FLAC3D 简介	207
9.1.2 FLAC3D 优缺点	208
9.1.3 本构模型	208
9.1.4 单元与网格生成	208
9.1.5 边界条件和初始条件	208
9.1.6 计算步骤	209
9.1.7 FLAC3D 模拟分析结果的表现形式	209
9.2 Surpac 软件介绍	212
9.2.1 Surpac 简介	212
9.2.2 三维图形系统 (3D Graphic System)	213
9.2.3 功能模块	214
9.2.4 技术特点	218
9.3 Micromine 软件简介	218
9.4 AutoCAD 绘图软件简介	220
参考文献	222

1.1 数值算法基本定义

计算机硬件和软件技术以及计算理论和方法本身的高速发展催生了一系列既快又准、适应性强的计算性学科分支,计算数学就是其中之一。而计算数学中的数值计算方法是一种研究并解决数学问题的数值近似解方法,是在计算机上使用的解数学问题的方法。该方法通过计算机编程将计算机硬件、软件计算理论有机地结合起来,大大提升了计算能力。由此发展形成的各种数值计算方法,也已成为科学技术和社会生活各个领域解决“计算”问题的有效桥梁和工具。

数值计算方法的计算对象是微积分、线性代数、常微分方程中的数学问题。内容涉及插值和拟合、数值微分和数值积分、求解线性方程组的直接法和迭代法、计算矩阵特征值和特征向量和常微分方程数值解等问题。根据所运用的数学计算方法的不同,数值计算方法可以分为不同的类型。工程应用领域中使用最为频繁的一些经典数值计算方法包括有限单元法、边界元法和离散单元法等。

有限单元法和边界元法通常假定研究对象(如岩体)是连续介质,并且只发生小变形,整个研究对象(包括边界约束条件)均用一个矩阵方程描述,求解该方程即可得到位移、应变和应力等未知量。在许多不能将研究对象简单地假设为连续介质的场合,如在岩石力学中,通常可采用离散元方法。它可用来分析变形连续和不连续的多个物体相互作用问题、物体的断裂问题以及大位移和大转动问题。

近年来,随着工程规模、尺寸的不断攀升,工程施工条件越来越复杂,工程上出现的科学和技术上的新问题、新现象越来越多,求解难度越来越高,传统的、单一的数值计算方法难以满足各种新的要求。为此,在传统数值算法基础上发展起来一些新的数值分析方法,如连续等效的损伤断裂分析法和非连续的块体理论、不连续变形分析以及数值流形分析等,无论在理论方法,还是在技术和应用上都获得了突破。

1.2 数值算法的发展历程

在近代工程结构设计中,往往要进行非线性结构分析,而使用的方法不外乎是解析分析和数值计算两类方法。解析分析指应用固体力学与结构力学的线性理论求

解简单结构的线性问题。为此,不得不对结构本身和加载方式进行大量简化,但是,过多的简化将可能导致不正确的甚至错误的解答。因此,所得的解析解当然也十分有限,远不能适应工程实际需要。数值计算(或离散化)方法主要是指差分法和变分法。前者是用差分表达式来逼近微分方程表达式;后者是采用直接变分把连续条件放松而导出离散方程(代数方程),其优点是可以稳定逼近正确解。

事实上,对于许多力学问题或场问题,人们已经得到了它们应遵循的基本方程(常微分方程或偏微分方程)和相应的边界条件,但能用解析方法求出精确解的只是方程性质比较简单、且几何边界相当规则的少数问题。对于大多数的工程技术问题,由于物体的几何形状较复杂或者问题的某些特征是非线性的,则很少有解析解。因此,寻求和发展一种新的高效求解问题的方法——数值解法,成为必然。

在力学领域,把连续介质力学的近代理论和数值分析的近代方法(即计算机法)结合起来形成了一种非连续介质的数值分析方法。代表性成果是在20世纪50年代末与60年代初出现的有限元法。

有限元方法是一种旨在分片插值逼近的方法,其基本前提是:将连续的求解域离散为一组有限个单元的组合体。这样的组合体能解析地模拟或逼近求解区域。由于单元能按各种不同的连接方式组合在一起,且单元本身又可以有不同的几何形状,因此可以模型化几何形状复杂的求解域。有限单元法作为一种数值分析方法的另一重要步骤是利用在每一个单元内假设的近似函数来表示全求解区域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数在各个单元结点上的数值以及插值函数表达。这样一来,一个问题的有限单元分析中,未知场函数的节点值就成为新的未知量。从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题,一经求解出这些未知量,就可以利用插值函数确定单元组合体上的场函数。显然,随着单元数目的增加,也即单元尺寸的缩小,解的近似程度将不断改进,如果单元是满足收敛要求的,近似解最后将收敛于精确解。

从应用数学角度来看,有限单元法基本思想的提出,可以追溯到库兰特(Courant)在1943年的工作,他第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小位能原理相结合,来求解圣文南(St. Venant)扭转问题。一些应用数学家、物理学家和工程师出于各种原因都涉足过有限单元的概念。但是直到1960年以后,随着电子数值计算机的广泛应用和发展,有限单元法的发展速度才显著加快。

现代有限单元法第一个成功的尝试,是将刚架位移法推广应用于弹性力学平面问题。这是特纳(Turner)、克拉夫(Clough)等人在分析飞机结构时于1956年得到的成果。他们第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。三角形单元的单元特性是由弹性理论方程来确定的,采用的是直接刚度法。他们的研究工作打开了利用电子计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960年克拉夫进一步处理了平面弹性问题,并第一次提出了“有限单元法”的名称,使人们开始认识了有限单元法的功效。

此后的20多年,有限单元法的理论和应用都得到迅速的、持续不断的发展。从确定单元特性和建立求解方程的理论基础和途径来说,正如上面所提到的,特纳、克拉夫等人开始提出有限单元法时是利用来源于结构分析的直接刚度法。它可

以很好地帮助人们明确有限单元法的一些物理概念,但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963—1964年,贝塞林(Besseling)、迈罗氏(Melosh)和约翰(Jones)等证明了有限单元法是基于变分原理的里兹(Ritz)法的另一种形式,从而使里兹法分析的所有理论基础都适用于有限单元法,确认了有限单元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立有限元方程和经典里兹法的主要区别是,有限单元法假设的近似函数不是在全求解域而是在单元上规定的,而且事先不要求满足任何边界条件,因此它可以用来处理很复杂的连续介质问题。从20世纪60年代后期开始,进一步利用加权余量法来确定单元特性和建立有限元求解方程。有限单元法中所利用的主要是伽辽金(Galerkin)法。它可以用于已经知道问题的微分方程和边界条件、但是变分的泛函尚未找到或者根本不存在的状况,因而进一步扩大了有限单元法的应用领域。

今天,有限单元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题,由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等,从固体力学扩展到流体力学、传热学等连续介质力学领域。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到方案的优化设计。可以预计,随着计算机技术的发展,有限单元法作为一个具有稳固理论基础和广泛应用效力的数值分析工具,必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用,其自身亦将得到进一步的发展和完善。

1.3 计算机技术与数值算法工程应用

对工程问题进行数值分析的重要意义在于,它可以通过分析计算来确定设计的合理性,在设计阶段就能发现潜在的问题,通过优化设计方案提高产品性能,延长使用寿命,降低工程造价;也可以通过全部或部分替代传统的费时、费工又费钱的物理试验来确定结构破坏的原因和可能性,提高结构的可靠性。

解决工程实际问题的基本特征常常是:在一个已知的区域中,根据基本的物理定理,建立起控制区域的微分方程,它描述的多是物理量的变化率满足的规律;针对具体的问题,有确定的边界和专门的边界条件;分析的任务是需要决定这些物理量的变化规律。而数值分析是针对某种具体的工程问题,采用有效的方法,求解出问题确定的数值解答的方法。

然而,由于数值分析面对的研究对象本身和工程条件十分复杂,例如,介质的各向异性、非均质特性、介质不连续性、复杂边界条件及其随时间变化等,使得数值分析无一例外地必须进行大量的复杂和烦琐的数值运算,而这些海量计算工作的完成,如果没有计算机技术的帮助,将是难以想象和几乎不能实现的。

数字电子计算机的普及和有限元法的迅速发展,给实际结构的线性与非线性分析增添了巨大的生命力。因此,就在电子计算机和线性有限元分析软件的功能日益扩大和使用日益普遍的同时,非线性有限元分析软件也日趋成熟。从20世纪80年代初起,随着非线性理论与分析方法的日益完善,非线性有限元分析也日益扩展到许多工程领域,比如机械制造、材料加工、航空航天、汽车、土木建筑、电子、船舶、铁道、能源等。而在岩土工程领域,能采用解析法求解的岩土工程问题数量相

当有限，因此，包括有限单元法、离散元和差分法等在内的数值解法在该领域更是得到了大力发展，成果显著。

毋庸置疑，随着数值方法的不断发展和功能越来越强大计算机的出现，已经成为广大工程技术人员必不可少分析工具的数值模拟理论和技术，必将有更大的发展和应用空间。

有限元法基本理论

2.1 概论

2.1.1 有限元基本思想

自然界中不论是生物、地质还是力学的每一现象，实际上都可借助于物理定理，按照与各种主要对象相联系的代数方程、微分方程或积分方程来描述。确定具有奇特形状的孔洞、许多加劲杆以及承受压力、热力和空气动力的一个压力容器中的应力分布，查明在海水或空气中污染物质的浓度，以及为了求解并预示形成龙卷风和雷暴雨的机理而模拟大气中的气候，这些都是许多重要实际问题中的几个例子。用精确分析方法对这些问题的控制方程式进行求解是一个棘手的任务。这时，近似分析方法提供了求解的另一种手段。在这些近似方法中，在文献中最常出现的有限差分法和变分法，诸如里兹法和伽辽金法。

在一个差分方程的有限差分近似式中，以差商来代替方程式中的导数，该差商包含了在域中各个网格点上解得的值。引入边界条件后解这些方程式，可得各网点处的数值。有限差分法在概念上虽然简单，但它具有一些缺点。最明显的缺点是近似解的导数不准确、沿非线性边界难于引入边界条件、几何上复杂的域难于精确表达以及不适用非均匀和非矩形的网格。

在微分方程的变分解中，将微分方程换成一个等效的变分，然后假定其近似解为已知的近似函数 ϕ_j 的组合 ($\sum c_j \phi_j$)，参数 c_j 按变分式确定。变分法的缺点是对具有任意域的问题难以建立近似函数。

有限元法由于提供了推导近似函数的系统步骤，因此它克服了变分法的困难，从而优于其他方法，有限元法具有两个基本特点：第一，以一批几何上简单的子域（称为有限元）表示一个几何上复杂的域；第二，有限元法可解释成是变分法的一个逐段应用（例如 Ritz 法和加权残数法）。其中，近似函数是代数多项式（插值函数），而待定参数代表边界上和单元内部若干个预定点（称为节点）处的解答值。由插值法理论可以发现插值函数的阶数（或次数）取决于单元中节点的数目。

2.1.2 有限元发展过程

有限元法最初是在 20 世纪 50 年代作为处理固体力学问题的方法出现的。它是

结构分析矩阵方法 [阿吉里斯 (Argyris), 1955; 列维斯雷 (Livesley), 1964] 的一个分支。而矩阵法本身又是于 1945—1955 年期间, 在研究分析包含有大量构件的复杂结构系统的方法的基础上发展起来的。

结构分析矩阵法的基本点在于把许多单一构件节点上的位移和内力之间的关系用代数方程组的形式表达出来, 而以节点位移、或节点内力、或是把节点位移和节点内力一起作为未知量。根据未知量选择的不同, 矩阵法又可分别称为位移法、力法或混合法。方程组又可以十分方便地以矩阵形式表示, 并且这些方程的求解可有效地由高速数字计算机实现。

“有限元法”这一名称由克拉夫在 1960 年处理弹性平面问题时, 首次提出并使用。对于飞机结构分析, 在 1956 年特纳、克拉夫、马丁 (Martin) 和托普 (Topp) 把位移法应用到平面应力问题中去, 他们把结构划分成一个个三角形和矩形的“单元”。在他们的公式中, 每一单元的特性是用一个单元节点上的力使之与节点位移相联系的单元刚度矩阵来表示的。在一般的矩阵分析中, 每一结构构件的力与位移之间的关系式是精确推导出来的, 而把结构划分成一个个单元的解则仅仅是利用每一单元中近似的位移函数。关于能量原理和矩阵方法的综合性的论述, 阿吉里斯在 1955 年详细地给出了在平面应力状态下矩形板格的单元刚度矩阵的推导。在这之前, 库兰特于 1943 年也应用了“单元”法则, 假设翘曲函数在一个集合体的三角形单元中呈线性分布而得到了圣文南扭转问题的近似解。这些初期的有限元法是建立在虚功原理或最小势能原理上的, 它们可看作为雷利-里兹 (Rayleigh-Ritz) 法的一种推广, 其中假设了分片的线性函数, 它仅仅对近似解是连续的。但是, 作为有限元法本身来说, 它比一般的雷利-里兹法要更灵活、更好用。

由于对场变量所假设的函数仅仅是分片连续的, 这就需要考虑到单元边界间的不连续性, 并发展新的和修正的变分原理。在 1960—1970 年这十年中, 贝塞林 (Besseling, 1963) 等人率先研究提出了基于各种不同变分原理的有限单元法公式。

然而, 有限元法的公式不一定要建立在变分途径的基础上。奥登 (Oden) 在 1969 年从能量-平衡法出发成功地导出了热弹性问题有限单元解析的方程组。绍博 (Szabo) 和李 (Lee) 在 1969 年利用迦辽金法得到了平面弹性问题的有限单元解。

经过一二十年的发展, 有限元法不仅在结构力学领域获得成功, 而且得到了极大发展。有限元法已经在连续体力学的一些问题中得到了应用, 如等直杆的扭转、稳态热传导、理想流体中的势流等。有限元法的使用者也从原先航空结构分析的少数人扩展到土木、机械、造船和核工程的大多数工程人员。

用一些离散的单元代表一个给定的域, 并不是有限元法的新概念。1941 年雷尼柯夫 (Hrenikoff) 提出了所谓网格法, 它将平面弹性体看成是一批杆件和梁。在一个子域上采用逐段连续函数来确定接近未知函数的是库兰特 (1943) 的著作。库兰特使用了一组三角形单元和最小势能原理去分析圣文南扭转问题。自“有限元”这个名词由克拉夫于 1960 年第一次使用后, 有限元应用的著作按指数规律地增多, 现在有许多杂志主要地致力于有限元法理论的发展和应用。考察历史的发展和有限元法的基本理论, 可以找到专门致力于有限元法的介绍和适用的很多教科书 (见本书参考文献)。