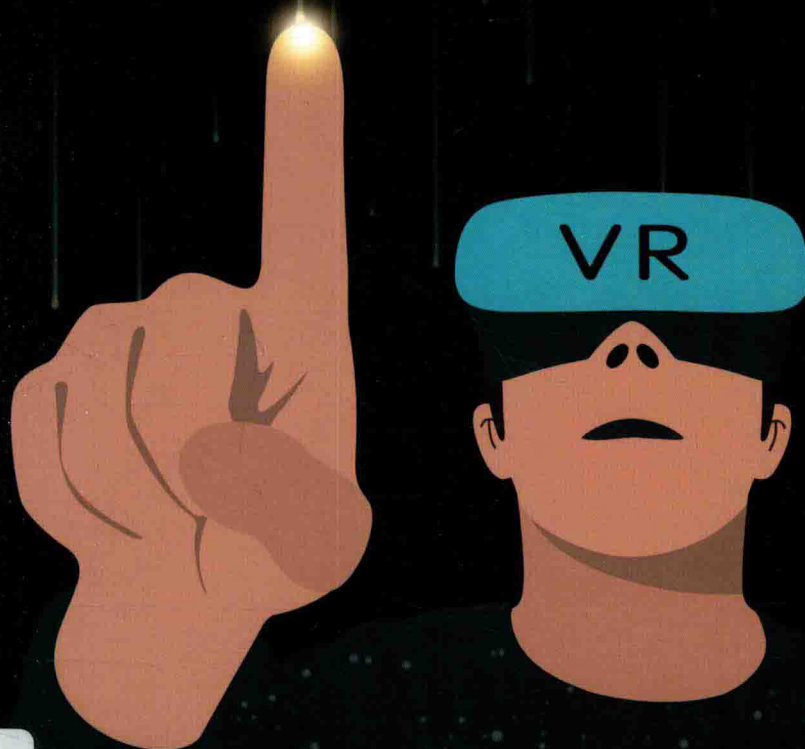


VR 三维技术系列



三维模型 变形算法： 理论和实践（C#版本）

● 赵 辉 顾险峰 雷 娜 著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

VR 三维技术系列

三维模型变形算法：理论和实践 (C#版本)

赵 辉 顾险峰 雷 娜 著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

《三维模型变形算法：理论和实现（C#版本）》介绍了三维模型变形算法和线条抽取算法。本书分为14章，详细讲述了Blender软件中的变形、网格变形算法、外包框变形算法、均值坐标变形算法、格林变形算法、拉普拉斯变形算法、拉普拉斯矩阵在三维模型近似、光滑、优化、骨骼抽取、顶点之间最短距离算法上的应用；还有三维模型的频谱分析、骨骼动画算法、蒙皮算法、三维曲线生成算法、三维模型特征曲线的抽取算法。本书包含了三维模型处理的各种核心算法。

本书不仅可以作为数字媒体技术专业的专业基础课，还可以作为计算机学科和软件工程学科“数据结构和算法”、“计算机图形学”等课程的教材和参考书。我们提供了书里部分代码在网上的开源下载。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

三维模型变形算法：理论和实践：C#版本/赵辉，顾险峰，雷娜著. —北京：电子工业出版社，2017.7
(VR 三维技术系列)

ISBN 978-7-121-31678-4

I. ①三… II. ①赵… ②顾… ③雷… III. ①三维动画软件—算法分析 IV. ①TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 120538 号

策划编辑：张 迪 (zhangdi@phei.com.cn)

责任编辑：张 迪

印 刷：中国电影出版社印刷厂

装 订：三河市良远印务有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本：787×1092 1/16 印张：18.75 字数：480 千字

版 次：2017 年 7 月第 1 版

印 次：2017 年 7 月第 1 次印刷

定 价：99.00 元

所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010) 88254469，zhangdi@phei.com.cn。

序

2015 年以来,虚拟现实技术的应用在国际国内发展很快。教育、医疗、娱乐、影视、游戏、安全、交通等各行各业都对虚拟现实技术进行了大量应用。虚拟现实技术的基础和核心是三维计算机图形学,分为四大模块:建模、渲染、动画、交互。目前国内大量的虚拟现实应用都局限于在西方开发的虚拟现实引擎的技术上进行开发的上层应用。我们这套丛书着重底层核心技术的讲解,三维计算机图形学在知识结构上来说需要数学、物理、工程、计算机编程、艺术五个方面。设计建模、渲染等算法需要微分几何、线性代数、概率统计等数学知识的理解和掌握;动画模拟需要流体、刚体等物理知识的理解和掌握;把这些数学、物理理论变为程序需要极强的编码能力,也就是从理论到实践的工程能力;三维图形学的最终表现形式是视觉上可看得到的,因此也需要良好的艺术修养和审美。虚拟现实和它所依赖的三维计算机图形学特别适合锻炼并能够融会贯通学生的数学、物理、工程、编程和艺术能力。三维计算机图形学是一个跨学科领域,三维图形学处理的是三维模型数据,学生在这个领域中学到的数学建模、工程能力,也可以用到其他行业,如人工智能等,对其他行业的大数据进行分析和处理。

2008 年以来,全国各个高等院校纷纷在各自软件工程学科专业的基础上开设了数字媒体技术专业。数字媒体技术专业和计算机专业专业的区别是,前者主要是着重学习二维图像和三维图形相关的算法和应用开发,而后者还需要学习其他计算机科学相关的知识。由于开设和建立时间短,各学校的数字媒体技术专业的教学工作都还处在摸索阶段,也没有形成统一、成熟的教材体系。根据在数字媒体技术专业多年的教学实践经验,我们总结出本专业要以计算机三维图形学的理论和算法为基础,以三维应用开发为导向进行建设。

根据多年一线教学经验与反馈,以及当前的三维图形学研究成果,我们编写了本套丛书。本套丛书涵盖了三维图形学算法的三个方面:建模、动画和渲染。内容根据数字媒体技术专业的教学特点分散到 5 本 VR 三维技术系列图书中。通过本系列专业图书,再加上已有的成熟的计算机基础编程教材,以及三维软件使用的教材,就可以完整地覆盖数字媒体技术专业的所有课程。

书里的代码采用 C# 编程语言。C# 编程语言是一种结合了 C++ 和 Java 优点的编程语言。C# 语言相对于其他编程语言来说比较容易学习和掌握,但是本套丛书里讲述的原理和算法不仅限于 C# 语言。读者可以通过示例中的代码,采用自己熟悉的编程语言来进行编程。本套丛书包含了很多计算机图形学会议 Siggraph 论文里最新的、核心的、关键突破和进展的图形学算法讲解、实现和分析。

前 言

虚拟现实技术里面最核心的基础是计算机三维图形学技术。其中一个重要的模块是三维模型的变形技术。这个技术涉及如何光滑地改变一个现有模型的形状，从而使该模型的整体姿势发生变化，但是保持局部细节不变。例如，把一个杯子拉伸等。变形算法从 20 世纪 80 年代开始，到现在已经 30 多年的历程。有各种各样的类别和方法，在商业软件，如 Maya 等已经进行应用。

本书不仅讲述了这些商业系统中成熟的应用，而且还讲述了最新的、还没有集成到商业软件中的变形算法。虽然现在大部分虚拟现实的应用都是基于商业软件进行三维模型的功能实现，但是针对特定的需求，需要掌握具体底层的技术，从而进行开发。这本书针对变形算法提供了系统的讲解和实例，从而使读者能够对变形算法有全面的了解、学习和掌握，并且可以直接进行应用。

三维模型变形算法的设计也需要用到微分几何、物理等知识。但是它们是作为我们设计算法的基石和指导，在算法设计过程中，我们针对特定的需求，需要通过近似、简化等方法建立灵活的新的数学模型。也就是三维图形学的算法不仅仅是数学、物理的纯粹计算。

《三维模型变形算法：理论和实现（C#版本）》介绍了三维模型变形算法和线条抽取算法。本书分为 14 章，详细讲述了 Blender 软件中的变形、网格变形算法、外包框变形算法、均值坐标变形算法、格林变形算法、拉普拉斯变形算法、拉普拉斯矩阵在三维模型近似、光滑、优化、骨骼抽取、顶点之间最短距离算法上的应用；还有三维模型的频谱分析、骨骼动画算法、蒙皮算法、三维曲线生成算法、三维模型特征曲线的抽取算法。本书包含了三维模型处理的各种核心算法。

本书不仅可以作为数字媒体技术专业的专业基础课，还可以作为计算机学科和软件工程学科“数据结构和算法”、“计算机图形学”等课程的教材和参考书。需要书里部分代码的读者可以发邮件向作者索取，邮箱地址：graphicsresearch@qq.com。

赵 辉

2017 年 05 月于清华大学近春园



作者简介

赵辉，虚拟现实专家、清华大学丘成桐数学科学中心访问学者、哈佛大学访问学者。主要研究计算微分几何、拓扑、三维模型处理算法（三维模型简化、细分、分割、变形、光滑、参数化、向量场、四边形化等）、三维动画算法（骨骼动画、蒙皮算法）、渲染算法（非真实感渲染、实时渲染、基于物理渲染），以及三维技术在3D打印、虚拟现实、增强现实、三维游戏、手机游戏、影视特效等的应用。



顾险峰，师从国际著名微分几何大师丘成桐院士，现于纽约州立大学石溪分校计算机科学系和应用数学系终身教授，清华大学丘成桐数学科学中心客座教授，大连理工大学海天学者，首都师范大学数字几何和成像实验室主任等。2005年获得美国国家自然科学基金 CAREER 奖，2006年获得中国国家自然科学基金海外杰出青年学者奖，2013年第六届世界华人数学家大会晨兴应用数学金奖等。



顾险峰教授和丘成桐先生及其合作者共同创立了一门新兴的跨领域学科：计算共形几何。这门学科结合了现代几何和计算机科学，广泛应用于计算机图形学、计算机视觉、可视化、几何建模、网络和医学图像等领域。

雷娜，大连理工大学软件学院教授，博士生导师，北京市成像技术高精尖创新中心兼职研究员；中国工业与应用数学学会几何设计与计算专业委员会委员；中国数学会计算机数学专业委员会委员；美国数学会 Mathematical Review 评论员；清华大学数学科学中心访问教授；纽约州立大学石溪分校计算机系访问教授；德克萨斯大学奥斯汀分校计算工程与科学研究所 research fellow；中科院数学与系统科学研究院访问学者。主要研究兴趣是应用现代微分几何和代数几何的理论与方法解决工程及医学领域的问题，聚焦于计算共形几何、计算拓扑、符号计算及其在计算机图形学、计算机视觉、几何建模和医学图像中的应用。



浅谈曲面变形的几何理论基础

在计算机图形学、计算机视觉、计算机辅助设计和医学图像等领域，曲面变形具有根本的重要性。曲面变形的计算方法非常丰富多彩，所用的理论也涉及现代数学的很多分支。这里，我们先简单介绍一些常见算法背后的基础理论。当然，从抽象理论到具体算法，也需要长期的探索和艰苦卓绝的努力。

1. 几何泊松方程

最为常见的曲面变形算法可以归结为求解曲面上的椭圆形偏微分方程（Elliptic Partial Differential Equation）。假设 S 是嵌入在三维欧氏空间中的曲面，自然带有诱导的欧氏黎曼度量 g ，我们可以选择局部等温坐标 (x, y) ，使得黎曼度量具有简单的公式：

$$g = e^{2\lambda(x,y)} (dx^2 + dy^2)$$

如图 1 所示。

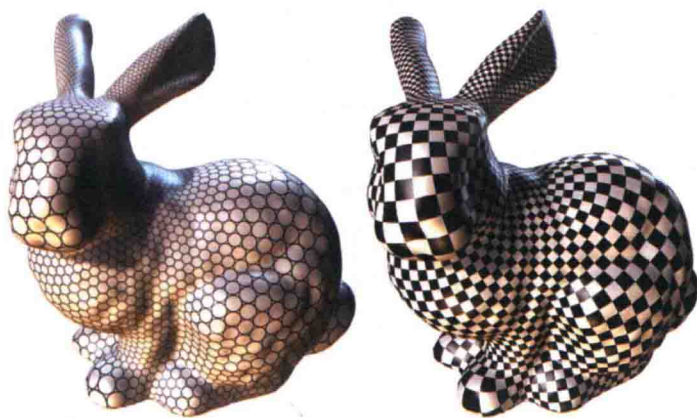


图 1 曲面的等温坐标， $g = e^{2\lambda(x,y)} (dx^2 + dy^2)$

曲面的 Laplace - Beltrami 算子定义为

$$\Delta g = \frac{1}{e^{2\lambda(x,y)}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Laplace 算子的特征根和特征函数满足：

$$\Delta_g f_k = \lambda_k f_k$$

这里特征根非负，构成曲面的谱：

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

其对应的特征函数为

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$$

这里第一个特征函数 f_0 为常数。曲面上所有平方可积函数构成了希尔伯特空间 (Hilbert Space), $H(S)$, 其内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_S f g dA$$

我们可以证明特征函数满足的性质:

$$f_k - \operatorname{argmin}_{f \perp f_i} \langle f, f \rangle, \quad 0 \leq i \leq k-1$$

我们将特征函数进行缩放变换, 使得 $\|f_k\| = 1$ 。由此特征函数构成了希尔伯特空间的一组单位正交基底:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$$

曲面上任意一个平方可积的函数 $g: S \rightarrow \mathbb{R}$, 都可以分解成基底的线性组合:

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k$$

这里 $\{\mu_k\}$ 被称为是 g 的频域系数。这种分解方式本质上是黎曼流形上的傅里叶分解 (Fourier Transform)。如果底流形是单位圆周, 那么这种分解方式就是经典的傅里叶分解。

考察曲面上的泊松方程:

$$\Delta_g h = g$$

我们假设函数 $h: S \rightarrow \mathbb{R}$ 的傅里叶分解为 $h = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k$, 对比频率域系数我们得到:

$$\Delta_g \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda_k f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k f_k$$

由此我们得到 $\alpha_k = \mu_k / \lambda_k$, 这给出了泊松方程解的公式。

更为一般的, 我们考察散度型椭圆微分算子:

$$Lu = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + \sum_j b^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u + cu$$

这里二次系数满足椭圆型条件:

$$c |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq C |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2$$

这里 c, C' 为正数。那么, 可以证明, 存在曲面的另外一个黎曼度量 $\tilde{g}$, 在 $\tilde{g}$ 下椭圆型偏微分方程被转化为经典的泊松方程, 因此可以用类似方法解出。这里黎曼度量 $\tilde{g}$ 可以由矩阵 $(a^{ij}(x))$ 构造拟共形映射来得到。

2. 等距嵌入

Weyl 问题: 曲面变形的一种途径是改变曲面的黎曼度量, 由此改变曲面在三维欧氏空间中的嵌入, 最为知名的是 Weyl 问题和 Minkowski 问题, 如图 2 所示。Weyl 在 1915 年提出了如下的问题, 在拓扑球面上给定一个黎曼度量, 使得高斯曲率处处为正, 求如何在三维欧氏空间中实现这个黎曼流形? Alexandrov 和 Pogorelov 给出了这

个问题完整答案。

在离散情形下, Weyl 问题提法如下, 给定一族平面多边形, 给定这些多边形的粘和方式, 即哪两条边应该粘在一起。如果所有顶点处的离散高斯曲率非负, 即每个顶点处所有顶角之和不大于 2π 。那么, 我们能够将这组多边形粘和成三维空间中的一个凸多面体。从物理直觉上, 我们可以手工搭建这个凸多面体, 粘贴多边形的次序应该保持多面体的稳固性并且无歧义性, 那么我们可以顺利实现凸多面体的嵌入。但是, 我们需要一个严密的计算方法。

首先, 我们可以从组合上对多面体进行四面体三角剖分, 得到四面体网格 M 。 M 的边界度量已知, 所有内边边长为自由变量。我们为所有内边赋予一个初始边长, 从而得到一个初始欧氏度量。每条内边 $|v_i, v_j|$, 我们定义离散曲率:

$$K_{ij} = 2\pi - \sum_{k,l} \theta_{ij}^{kl}$$

这里 θ_{ij}^{kl} 为在四面体 $|v_i, v_j, v_k, v_l|$ 内, 边 $|v_i, v_j|$ 上的二面角。我们定义离散希尔伯特 - 爱因斯坦能量:

$$HE(I) := \sum_{i,j} K_{ij} l_{ij}$$

通过优化这个能量, 我们得到一组内边边长, 使得内边曲率处处为 0。这样, 所有四面体就可以严丝合缝地堆砌在三维欧氏空间中, 从而得到凸多面体的等距嵌入。

Minkowski 问题: 假设 S 是三维欧氏空间中的一张封闭凸曲面, 给定任意一点 $p \in S$ 处的法向量 $\mathbf{n}(p)$ 和高斯曲率 $K(p)$, 这样就给出了一个定义在单位球面上的正值函数 $K: S^2 \rightarrow R$, 满足:

$$\int_{S^2} \frac{1}{K(\mathbf{n})} \mathbf{n} dA_{\mathbf{n}} = 0$$

那么, 曲面 S 可以被重建出来, 所有的解彼此相差一个平移。

在离散情形, 如图 2 所示, 给定一个凸多面体每个面的法向量 $\mathbf{n}_i$, 和面积 A_i , 满足条件:

$$\sum_i A_i \mathbf{n}_i = 0$$

那么存在一个凸多面体 M , 其各个面的法向量和面积等于给定值, 并且这种凸多面体彼此相差一个平移。

其计算方法如下: 对于每个面, 我们构造平面方程 $\pi_i(p) = \langle p, \mathbf{n}_i \rangle - h_i$, 这些平面构成凸多面体 $M(h)$ 。我们极大化多面体 $M(h)$ 的体积, 满足约束条件 $\sum_i h_i A_i = 1$, 极值点存在并且唯一, 给出了 Minkowski 问题的解。

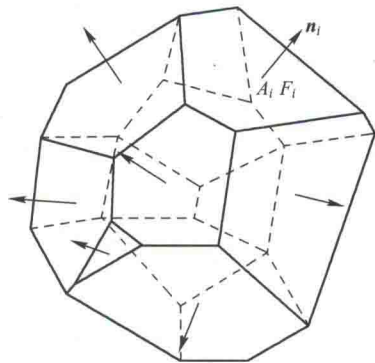


图 2 Weyl 问题和 Minkowski 问题

Alexandrov 问题: Alexandrov 问题和 Minkowski 问题非常类似, 给定一个开放的凸多面体 M 和平面的一个凸区域 Ω , 每个面的法向量 $\mathbf{n}_i$ 给定, 每个面的投影和 Ω 的交集面积是 A_i , 满足条件 $\sum_i A_i = \text{Area}(\Omega)$, 则凸多面体存在, 并且这样的凸多面体彼此相差一个垂直平移, 如图 3 所示。

Alexandrov 问题的解法如下: 每一个面对应一个平面方程 $\pi_i(p) = \langle p, \mathbf{n}_i \rangle + h_i$, 这些平面构成上包络 (Upper Envelope) $U(h)$, $U(h)$ 每个面的投影面积记为 $w_i(h)$, 则我们在约束条件 $\sum_i h_i = 0$ 下优化下面的体积能量:

$$V(h) := \int \sum_i (A_i - w_i(\eta)) d\eta_i$$

则体积能量全局为凸, 最优解存在并唯一, 所得即为 Alexandrov 问题的解。

3. 共形形变

对应非凸的封闭曲面, 单单黎曼度量无法唯一决定曲面在三维欧氏空间中的嵌入, 我们需要给出更多的信息。例如, 曲面的平均曲率。

一种方法是将曲面嵌入在四元数空间 H 中。一个四元数 (quaternion) 表示为

$$\mathbf{q} = a + bi + cj + dk$$

其乘法规则由图 4 给出。四元数的共轭定义为

$$\overline{\mathbf{q}} = a - bi - cj - dk$$

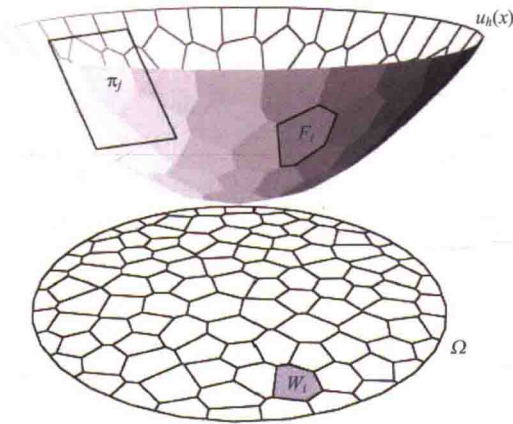


图 3 Alexandrov 问题

q	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

图 4 四元数的乘法规则

四元数的模定义为 $|\mathbf{q}|^2 = \mathbf{q} \overline{\mathbf{q}}$, 由此, 我们得到四元数的逆为 $\mathbf{q}^{-1} = \overline{\mathbf{q}} / |\mathbf{q}|^2$ 。由此, 所有的四元数构成一个域 (Field)。

我们考虑三维空间中的一个旋转, 旋转轴为单位向量 (x, y, z) , 旋转角为 θ , 这个旋转可以被表示成一个四元数 (quaternion)

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} + (xi + yj + zk) \sin \frac{\theta}{2}$$

我们将三维欧氏空间 E^3 嵌入在虚四元数 $\text{Im}gH$ 集合中。给定一个向量 $\mathbf{v} \in \text{Im}gH$,

旋转之后的向量表示为:

$$\tilde{v} = q^{-1} v q$$

因此, 旋转加上放缩变换应该是 $\tilde{v} = \bar{q} v q$ 。

Spin 变换如图 5 所示。



图 5 Spin 变换 (Crane, Pinkall and Schroder, Spin Transformations of Discrete Surfaces, ACM TOG 2011)

假设 S 是一个拓扑球面, 在三维欧氏空间中 有两个浸入 (immersions), $f, \bar{f}: S \rightarrow \text{Img}H$, 彼此之间相差一个共形变换, 那么固定曲面上任意一点 $p \in S$, 导映射 $df, d\bar{f}: T_p S \rightarrow \text{Img}H$ 相差一个相似变换, 即相差一个 $\text{Img}H$ 中的旋转加放缩, 由此我们得到基本方程: 存在一个以四元数为值域的函数 $\lambda: S \rightarrow \text{Img}H$, 满足如下方程:

$$d\bar{f} = \lambda df$$

对上式两边同时求外微分, 我们得到

$$0 - d(\bar{\lambda} df) - d\bar{\lambda} \wedge df - \bar{\lambda} df \wedge d\lambda = -2\text{Im}(\bar{\lambda} df \wedge d\lambda)$$

这意味着 $\bar{\lambda} df \wedge d\lambda$ 是一个实的 2-形式。进一步计算表明:

$$\lambda df \wedge d\lambda = \rho |df|^2$$

这里 ρ 和平均曲率的变化有内在联系:

$$\dot{H} |df| = H |df| + \rho |df|$$

由此, 我们得到偏微分方程:

$$D\lambda = \rho\lambda$$

这里微分算子 D 被称为四元数狄拉克算子:

$$D\lambda = - \frac{df \wedge d\lambda}{|df|^2}$$

在实际应用中, 给定嵌入在欧氏三维空间中一个初始曲面 $f: S \rightarrow E^3$, 用户定义平均曲率的变化 $\rho: S \rightarrow R$, 然后求解特征问题:

$$(D - \rho)\lambda = \gamma\lambda$$

这样, 所得以四元数为值域的一对函数 $(\lambda, \rho + \gamma)$ 满足可积性条件, 我们可以得到新的曲面 $\bar{f}: S \rightarrow E^3$ 和初始曲面共形等价。

对于高亏格曲面，这种方法无法保证是嵌入，目前依然在探索阶段。

4. 背景空间形变

另外一种曲面变形的方法是将曲面所在的背景空间整体形变，从而使得曲面跟随背景空间发生形变。如图 6 所示，我们将图片贴在一个样条曲面上，然后通过改变样条的控制点，使背景曲面形变，从而使得图像变形。



图 6 Free - form deformation

最优传输映射：一种通用的空间变形的方法是基于最优传输理论。给定三维空间中的一个凸区域 $\Omega \subset E^3$ ，我们在上面定义两个概率测度 μ, ν ，满足 $\int_{\Omega} d\mu = \int_{\Omega} d\nu$ ，那么存在一个凸函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ，其梯度映射 $T(p) := \nabla u(p)$ 满足以下两个条件。

(1) 将概率测度 μ 映成概率测度 ν ，这意味着对于一切可测集合 $E \subset \Omega$ ， $\mu(T^{-1}(E)) = \nu(E)$ ；

(2) 映射极小化传输代价：

$$E(T) := \int_{\Omega} |p - T(p)|^2 d\mu(p)$$

这种映射被称为最优传输映射。

最优传输映射可以通过解蒙日 - 安培方程 (Monge - Ampere) 求得，凸函数 u 满足：

$$\det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) (p) = \frac{\mu(p)}{\nu \circ \nabla u(p)}$$

这种类型的 Monge - Ampere 方程的几何解法和 Alexandrov 问题的解法是类似的，都可以通过变分法求得。如图 7 所示，我们将膝盖骨骼模型嵌入在标准立方体，然后用最优传输映射将立方体变形，从而诱导膝盖骨骼的变形（绿色圆圈内区域）。

流体力学：另外一种常用方法是基于流体力学。我们在区域 Ω 内设计矢量场 ν ，定义了流场的速度场。每一个粒子的流动速度由 ν 给出，所有的流线都和速度场处处相切。这样，我们得到了单参数微分同胚群， $\varphi_t: \Omega \rightarrow \Omega$ ，满足常微分方程：

$$\frac{d\varphi_t(p)}{dt} = v(\varphi_t(p))$$

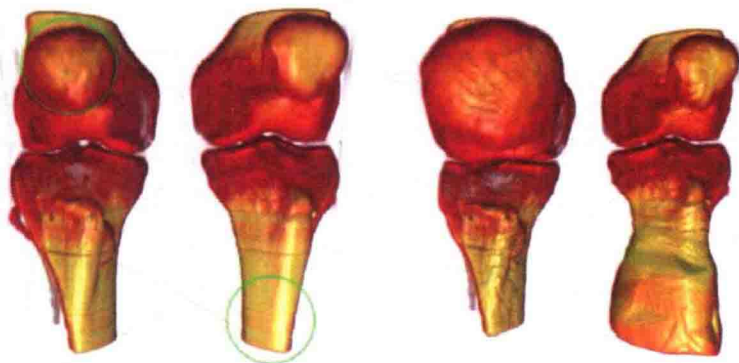


图7 背景空间的形变诱导曲面形变 (苏科华作)

给定 Ω 的任意微分形式 ω ，其关于 v 的李导数满足嘉当公式 (Cartan's magic formula)：

$$L_v \omega = \frac{d\varphi_t^* \omega}{dt} - i_v d\omega + di_v \omega$$

由此，我们可以通过设计矢量场，控制体积元的变化，进一步得到背景空间的微分同胚。

拟共形映射方法 (quasi-conformal mapping) 也经常采用。如图8所示，这种方法将无穷小圆映成无穷小椭圆。在每一点 p ，无穷小椭圆的离心率和长轴方向可以用一个复数 $\mu(p)$ 来表示，映射满足 Beltrami 方程：

$$\frac{\partial \varphi(p)}{\partial \bar{z}} = \mu(p) \frac{\partial \varphi(p)}{\partial z}$$

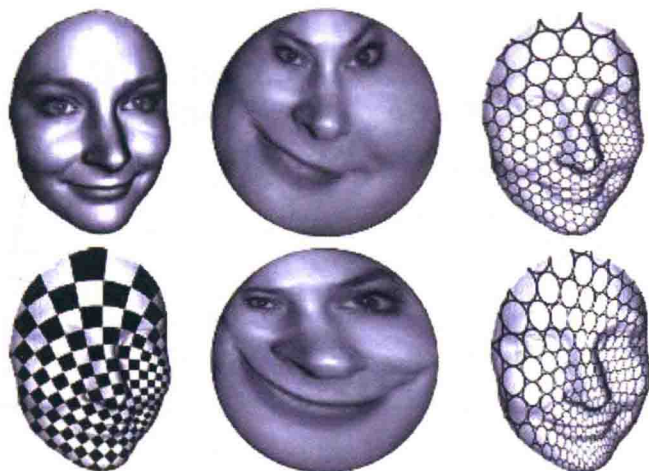


图8 拟共形映射

图 9 显示了用拟共形映射的方法求得的平面区域的微分自同胚，将给定的特征点对齐。这个微分同胚具有高度的扭曲，充分显示了这种方法的普适性和数值稳定性。拟共形映射可以向高维推广，如图 10 所示。

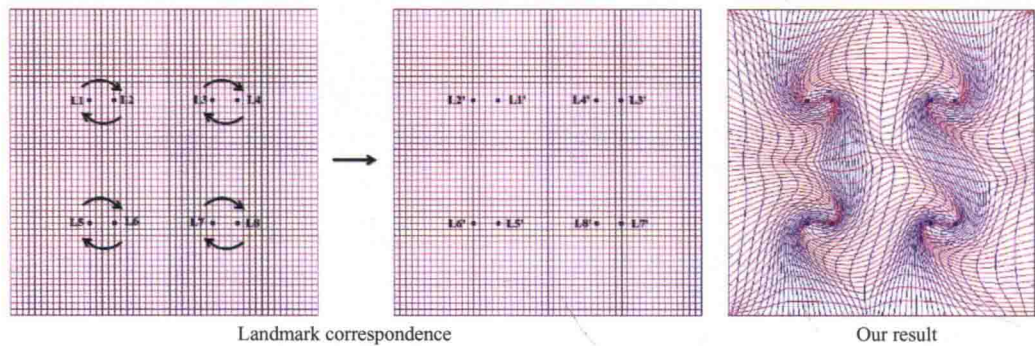


图 9 平面区域的拟共形映射 (Ronald Lui 教授作)

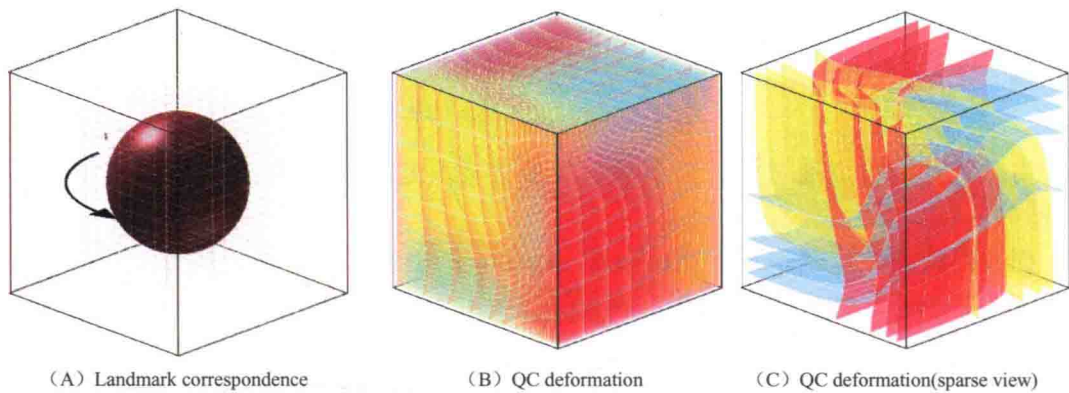


图 10 体区域的拟共形映射 (Ronald Lui 教授作。)

5. 小结

除了几何方法之外，还有基于物理模拟的曲面形变方法。在计算力学和计算机辅助制造（CAE）等领域，有基于物理模型的严密方法。自然也有基于数据驱动的方法，如动作捕捉、表情捕捉等。

单就几何方法而言，曲面的等距嵌入、共形形变，拟共形变换等领域，依然有大量的未解决问题，亟待年轻人去探索开发。

目 录

第1章 Blender 软件中的变形	1
1.1 变形介绍	1
1.2 外包框变形	2
1.2.1 外包框变形步骤	2
1.2.2 外包框变形效果和分析	6
1.2.3 外包框变形实验	7
1.3 网格变形	9
1.3.1 网格变形步骤	9
1.3.2 网格变形方法效果和分析	12
1.3.3 网格变形效果	13
1.4 拉普拉斯变形	14
1.4.1 拉普拉斯变形步骤	14
1.4.2 拉普拉斯变形效果和分析	18
1.4.3 拉普拉斯变形实验	19
第2章 FFD 变形算法	21
2.1 FFD 介绍	21
2.2 FFD 算法数学推导	22
2.3 FFD 算法步骤	24
2.4 实现代码	24
第3章 均值坐标变形算法	27
3.1 均值坐标介绍	27
3.2 重心坐标	28
3.3 数学推导	30
3.4 变形步骤	32
3.5 效果分析	35
第4章 格林坐标变形算法	37
4.1 格林变形介绍	37
4.2 算法步骤和代码	38
4.3 其他外包框变形坐标	42
第5章 三维模型上的矩阵	44
5.1 邻接矩阵	44
5.2 组合拉普拉斯矩阵	50
5.2.1 拉普拉斯矩阵介绍	50

5.2.2 拉普拉斯矩阵构建	51
5.3 余切拉普拉斯矩阵	54
第6章 拉普拉斯变形算法	60
6.1 微分坐标	60
6.2 变形算法基础	63
6.2.1 变形介绍	63
6.2.2 数学模型构建	65
6.2.3 拉普拉斯变形算法代码	66
6.3 拉普拉斯变形迭代算法	69
6.3.1 迭代法介绍	69
6.3.2 数学模型构建	71
6.3.3 迭代法核心代码	72
6.4 ARAP 变形算法	75
6.4.1 算法思想	75
6.4.2 数学模型构建	76
6.4.3 ARAP 核心代码	78
第7章 拉普拉斯模型处理算法	81
7.1 三维模型近似算法	81
7.1.1 三维模型近似概述	81
7.1.2 数学系统构建和代码	82
7.1.3 近似模型算法效果图	83
7.2 拉普拉斯模型优化算法	87
7.2.1 三维模型优化介绍	87
7.2.2 数学模型构建	88
7.2.3 优化算法核心代码	90
7.2.4 优化算法效果	92
7.3 拉普拉斯光滑算法	93
7.3.1 光滑算法介绍	93
7.3.2 能量函数和数学系统	94
7.3.3 光滑算法核心代码	96
7.3.4 光滑算法效果展示	98
7.4 非奇异平均曲率流光滑算法	100
7.4.1 光滑算法分析	100
7.4.2 数学推导和核心代码	102
7.4.3 CMCF 光滑算法效果展示	104
7.5 骨骼抽取	109
7.5.1 骨骼抽取概述	109
7.5.2 数学模型构建和核心代码	109
7.5.3 骨骼抽取效果	113

第8章 三维模型频谱分析	116
8.1 矩阵的频谱	116
8.2 菲德尔向量	118
8.3 节点域	120
8.4 连通体和特征符	123
8.5 特征向量近似	125
8.5.1 数学原理	125
8.5.2 近似算法步骤	127
8.5.3 效果分析	129
第9章 顶点间最短距离算法	132
9.1 最短距离概念	132
9.2 Diffusion 距离算法	134
9.3 Commute Time 距离算法	137
9.4 双和谐距离	138
第10章 Blender 中的蒙皮技术	142
10.1 两个关节的简单蒙皮	142
10.2 仙人掌蒙皮	150
10.3 马匹蒙皮	155
第11章 骨骼动画算法	167
11.1 动作捕捉	167
11.2 BVH 文件格式	168
11.2.1 BVH 格式定义	168
11.2.2 文件实例	169
11.2.3 加载 BVH 文件代码	172
11.3 骨骼结构算法	176
11.3.1 骨骼结构	176
11.3.2 算法原理	177
第12章 蒙皮算法	187
12.1 概述	187
12.2 SMD 蒙皮文件	189
12.2.1 文件格式定义	189
12.2.2 文件加载	191
12.3 线性混合算法	201
12.4 对偶四元素数算法	205
12.4.1 数学概念	205
12.4.2 算法原理	206
12.5 DQS 和 LBS 对比	210
12.5.1 优劣性	210
12.5.2 测试模型生成	213