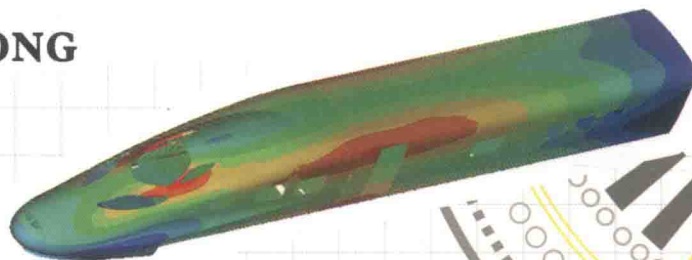


结构有限元分析基础及 ANSYS应用

黄维平 杨永春 陈常龙 编著

JIEGOU YOUXIANYUAN FENXI JICHU JI
ANSYS YINGYONG



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

结构有限元分析基础及 ANSYS 应用

黄维平 杨永春 陈常龙 编著

中国铁道出版社

2017年·北京

内 容 简 介

本书的第一篇以 9 章的篇幅比较详尽地介绍了有限元分析的理论基础与数值方法,包括微分方程的近似解法、弹性力学变分原理、弹性力学有限元方法、结构力学有限元方法和非线性问题的有限元方法,并着重介绍了单元及其位移函数的性质,以及各类单元的插值函数构造方法。第二篇则以大型通用有限元软件 ANSYS(16.0 版)为例介绍了结构有限元分析的程序实现方法,重点介绍了结构静力分析和动力分析的方法,包括模态分析方法、瞬态动力分析方法和谱分析方法,介绍了上述分析方法的软件操作步骤及参数设置方法,并给出了人机对话的算例。书的最后一章介绍了结构分析常用单元的功能、适用条件和使用方法。

本书可作为工程结构等相关学科的教材,也可供从事工程结构相关专业的设计、研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构有限元分析基础及 ANSYS 应用 / 黄维平, 杨永春,
陈常龙编著. —北京: 中国铁道出版社, 2017. 3
ISBN 978-7-113-22736-4

I. ①结… II. ①黄… ②杨… ③陈… III. ①结构
分析—有限元分析—应用软件 IV. ①O342-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 005316 号

书 名: 结构有限元分析基础及 ANSYS 应用
作 者: 黄维平 杨永春 陈常龙

策 划: 陈小刚
责任编辑: 黎 琳 陶赛赛
封面设计: 郑春鹏
责任校对: 焦桂荣
责任印制: 陆 宁 高春晓

编辑部电话: 010-51873065

出版发行: 中国铁道出版社(100054, 北京市西城区右安门西街 8 号)

网 址: <http://www.tdpress.com>

印 刷: 中国铁道出版社印刷厂

版 次: 2017 年 3 月第 1 版 2017 年 3 月第 1 次印刷

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16 印张: 23 字数: 562 千

书 号: ISBN 978-7-113-22736-4

定 价: 59.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书, 如有印制质量问题, 请与本社读者服务部联系调换。电话: (010) 51873174 (发行部)

打击盗版举报电话: 市电 (010) 51873659, 路电 (021) 73659, 传真 (010) 63549480

前 言

随着有限元理论与方法的不断完善及计算机技术的突飞猛进,通用和专业有限元软件的功能越来越强大,有限元方法已经成为结构领域不可或缺甚至赖以生存的工具,其精准程度甚至被冠以数值实验室的美誉。虽然它还不能也不可能完全取代物理模型试验,但它已在很大程度上替代了部分模型试验,被广泛应用于土木建筑、航空航天、机械制造、水利水电和海洋工程等领域,成为工程设计和科学研究不可或缺的工具。

三十多年前,人们还主要靠个人编程来完成结构的有限元分析。很多学者花费了大量时间和精力致力于计算程序的开发,以便于完成自己的科学研究。为提高程序的计算精度和计算速度,他们不仅需要掌握有限元的知识和相关的数学方法,还需要具备运用计算机语言编程的能力。

商用有限元软件的出现为用户节省了个人编程的大量时间和精力,对有限元方法的普及起到了重要的作用。除特殊问题外,一般的结构设计分析问题都已经有了相应的有限元软件。而且,软件的应用也随着视窗操作系统的出现而变得越来越方便。用户甚至可以通过人机对话的方式完成一个大型结构的有限元分析,而不需要人工划分网格并编制输入文件来完成结构分析。

但也正是商用软件的出现,使用户对有限元方法的理论和编程技巧越来越生疏。尽管大多数情况下,这并不影响软件的使用,但面对软件给出的“答案”却很难作出合理的解释,甚至不知“答案”的正确与否,即便是正确的“答案”也很难作出计算误差的判断。同时,随着商用有限元软件的普及,介绍有限元理论的书籍越来越少,介绍编程方法和技巧的书籍更是凤毛麟角。笔者在多年的教学及科研实践中,深切地感受到用好商用有限元软件对有限元知识的依赖程度之高,要想随心所欲地用好这个工具,必须对有限元方法有一个比较全面的了解,理解和掌握其中的基本理论与方法。鉴于此,将自己授课的体会和科研的经验整理成书,以为读者提供有益的参考。

为了更好地实现理论与实践的结合,书的第一篇比较详尽地介绍了有限元分析的理论基础与数值方法,第二篇则以大型有限元软件 ANSYS(16.0 版)为例介绍了结构有限元分析的程序实现方法。读者可通过第一篇的阅读更好地了解 ANSYS 的结构分析功能及单元适用条件,掌握 ANSYS 各种结构分析功能的理论基础与方法特点,为精准地使用 ANSYS 进行结构设计分析打下良好的基础。

本书具体内容如下:

第1章从微分方程的近似解法引出有限元方法所依赖的理论基础,主要包括:微分方程的近似解法、变分原理与里兹方法和弹性力学变分原理。

第2章介绍了广义变分原理,主要包括:约束变分原理、弹性力学广义变分原理和弹性力学修正变分原理。

第3章为弹性力学有限元法,介绍了单元刚度矩阵及荷载向量的构造、系统矩阵及有限元方程的形成、边界条件的引入和方程的求解以及单元应力计算。

第4章为杆系结构的有限元方法,介绍了杆和梁单元的插值函数及刚度矩阵、桁架与刚架结构的坐标变换等。

第5章为平板弯曲问题的有限元方法,介绍了薄板的基本方程,不同类型板单元的插值函数构造以及应力杂交板单元。

第6章为单元与插值函数构造,介绍了弹性力学和结构力学的各种类型单元及其插值函数构造,包括:一维的杆和梁单元、二维的三角形和四边形单元、三维的六面体和四面体单元,最后,简单介绍了等参单元的概念。

第7章介绍了轴对称壳单元,主要包括:基于薄壳理论的轴对称壳单元、平移和转角独立插值的轴对称壳单元和轴对称超参数壳体单元。

第8章介绍了一般壳体单元,主要包括:平板壳体单元和超参数壳体单元。

第9章为非线性问题的有限元方法。首先,介绍了 ANSYS 软件采用的主要非线性方程的解法,包括:迭代法、牛顿—拉夫森方法和增量法。然后,分别介绍了几何非线性问题和材料非线性问题,并重点介绍了弹塑性问题的求解方法。

第10章和第11章分别为 ANSYS 软件的结构静力和结构动力分析部分,主要介绍了软件的静力和动力分析功能和方法,并以 Windows 操作系统的 ANSYS 16.0 版本为例分别介绍了结构静力和结构动力分析的步骤,并通过算例演示了结构静力和结构动力分析(模态分析)的软件操作步骤。

第12章介绍了 ANSYS 软件结构分析的常用单元,包括一维单元中的杆和梁单元、二维单元中的平面三角形和四边形单元、三维单元中的六面体和四面体单元以及板壳单元,内容包括单元的几何形状、局部坐标系及结点参数的定义,以及单元的位移函数与功能。

由于笔者对有限元理论的理解还不够准确全面,对 ANSYS 还缺乏深入的了解,书中一定存在一些阐述不准确、不到位的内容,还请读者多提宝贵意见。

作者

2016年10月于青岛

目 录

第一篇 结构有限元分析基础

第 1 章 预备知识	1
1.1 概 述	1
1.2 基本概念	1
1.3 微分方程的近似解法	7
1.4 变分原理及里兹方法	19
1.5 弹性力学变分原理	28
第 2 章 广义变分原理	44
2.1 概 述	44
2.2 约束变分原理	44
2.3 弹性力学广义变分原理	50
2.4 弹性力学修正变分原理	52
第 3 章 弹性力学有限单元法	55
3.1 概 述	55
3.2 有限元方程的建立	55
3.3 有限元方程的求解	76
3.4 有限元解的收敛性	91
3.5 应力计算与改进	94
第 4 章 杆系结构有限单元法	102
4.1 概 述	102
4.2 桁架结构	102
4.3 刚架结构	110
第 5 章 平板结构有限单元法	125
5.1 概 述	125
5.2 薄板弯曲方程	125
5.3 非协调板单元	131
5.4 协调板单元	138

5.5	挠度和转角独立插值的板单元	141
5.6	应力杂交板单元	145
第 6 章	单元与插值函数	153
6.1	概 述	153
6.2	一维单元	154
6.3	二维单元	159
6.4	三维单元	172
6.5	等参单元	181
第 7 章	轴对称壳结构有限单元法	189
7.1	概 述	189
7.2	基于薄壳理论的轴对称壳体单元	189
7.3	平移和转角独立插值的轴对称壳单元	193
7.4	轴对称超参数壳体单元	198
7.5	不同类型单元的连接	202
第 8 章	一般壳结构有限单元法	206
8.1	概 述	206
8.2	平板壳体单元	207
8.3	超参数壳体单元	212
第 9 章	非线性问题的有限单元法	217
9.1	概 述	217
9.2	非线性方程的求解方法	217
9.3	几何非线性问题	221
9.4	材料非线性问题	224
9.5	弹塑性问题的求解方法	228
第二篇 ANSYS 结构分析应用		
第 10 章	结构静力分析	232
10.1	概 述	232
10.2	非线性问题	233
10.3	静力分析步骤	239
10.4	算 例	250
第 11 章	结构动力分析	268
11.1	概 述	268

11.2 模态分析.....	268
11.3 瞬态动力分析.....	278
11.4 谱 分 析.....	291
11.5 算 例.....	305
第 12 章 结构分析单元库	314
12.1 杆 单 元.....	314
12.2 梁 单 元.....	316
12.3 管 单 元.....	319
12.4 平面单元.....	325
12.5 空间单元.....	328
12.6 壳 单 元.....	340
参考文献.....	358

第一篇 结构有限元分析基础

第 1 章 预备知识

1.1 概 述

随着人类社会的发展,工程结构变得越来越复杂,不仅是几何形状越来越复杂,荷载等环境条件也越来越复杂。这些工程结构的物理场通常是以微分方程表示的,这意味着,人们要获得这些结构的物理力学性质,就必须能够求解这些微分方程。由于结构形状的复杂,这些微分方程的边界条件变得十分复杂,而荷载和环境条件的复杂又使得微分方程的非齐次项变得十分复杂,从而使解析法和传统的近似解法已无力解决这些复杂的问题。有限单元法正是在这样的需求下诞生的,先驱们在微分方程近似解法的基础上创造出了有限元方法,因此,要想准确地理解有限元方法的精髓,需要对有限元方法的基础知识有一个基本的了解,这也可以为进一步用好有限元方法打下良好的基础。为此,本章将对有限元方法的基础知识作简单的介绍。

1.2 基本概念

1.2.1 有限单元法的基本思想

有限单元法是一种数学方法,是求解微分方程的数值方法。因此,有限单元法的应用非常广泛,只要是能够用微分方程来描述的场问题,理论上都可以采用有限单元法来求解。而对于弹性体的力学问题,有限单元法更是一种主要的求解方法和手段。

有限单元法的基本思想是用有限个简单的函数来拟合一个任意复杂的函数,即将函数的定义域划分为若干个小的子域(单元),在每个小子域(单元)上设定一个简单的函数来代替原函数在子域(单元)上的分布,如线性函数。只要子域(单元)足够小,则由若干个线性函数组合成的连续函数即可近似地代表满足微分方程的原函数。该思想可用计算机绘制曲线的方法来比拟,计算机绘制任何形式的曲线均是采用无数(有限)条直线来完成的,当每条直线都足够短时,我们在屏幕上看到的就是一条连续的光滑曲线。这与有限单元法有相同的性质,当子域(单元)趋于一个点时(有限单元法的极限状态),有限单元法可以任意精确地逼近精确解。

当然,有限单元法远比计算机绘图更灵活,计算机绘图只能在两点之间用直线连接,而有限单元法的子域(单元)函数可以是线性的,也可以是非线性的,如二次函数或更高阶函数。如同数值积分一样,在两个积分点内可采用常数(矩形公式)、线性插值(梯形公式)、二次以上插值(辛普森公式或 Cotes 公式),随着插值函数阶数的提高,积分区间可以增大。当然,在有

限单元法中,随着子域(单元)内函数连续性的提高,子域(单元)的尺寸也可以随之适当增大。这样,有限单元法就解决了微分方程求解的两大难题——原函数的寻找和复杂边界的处理。

因此,有限单元法的基本思想可用一句话概括——用有限个子域(单元)内的简单函数来拟合微分方程定义域内的任意复杂函数。那么,这些子域内的简单函数是如何连接起来而能够模拟原物理场的性质呢?这也是有限元方法的一个标志——单元边界上的节点,即子域通过边界上的节点实现相互的“数值”连接。而这些“节点数值”构成了有限元方程的未知量,因此,称其为微分方程的数值方法。

有限单元法基本思想的提出可追溯到 1943 年, R. Courant 第一次尝试应用定义在三角形子域上的连续函数和最小位能原理相结合求解圣维南(St. Venant)扭转问题。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因都涉足过有限单元法的概念,但是,直到 20 世纪 50 年代末,有限元方法仍不为大多数人所熟知。进入 60 年代后,随着电子计算机的广泛应用,有限单元法才得到了快速发展,直至今日,该方法已经成为科学研究和工程建设不可缺少的手段。

现代有限单元法的第一次成功尝试,是将刚架位移法推广到弹性力学平面问题。Turner 和 Clough 等人在分析飞机结构时,第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确答案,从此开创了利用电子计算机求解复杂平面弹性力学问题的先河。1960 年, Clough 进一步研究了用有限单元法求解弹性力学平面问题,并命名为“有限单元法”。

1.2.2 变分与微分

变分与微分是两个不同的概念,微分是函数自变量增量引起的函数增量的线性主部,用字母 d 来表示。如函数 $y=f(x)$ 的微分表示为 $dy=f'(x)dx$, 它与函数自变量的增量 dx 有关,它是一个函数变化率的度量,如图 1.1 所示。变分与自变量的增量无关,它是一族函数之间的函数值的差值度量,用字母 δ 表示。如一族函数 $y=f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, x)$ 的变分为:

$$\delta y = \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} \delta \alpha_0 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \delta \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} \delta \alpha_n \quad (1.2.1)$$

在虚位移原理中,虚位移也是用符号 δ 来表示的。这并不是巧合,是因为变分与虚位移具有相同的性质——任意性。虚位移是任意的,变分也是任意的。变分是对一族函数所作的一种数学运算,而微分是对一个函数所作的一种数学运算。

例如,对于函数 $y=x^2+6x+3$, 它的微分为 $dy=(2x+6)dx$, 而它的变分 $\delta y=0$ 。对于一族函数 $y=ax^2+bx+c$, a 、 b 和 c 为待定常数, 它的微分为 $dy=(2ax+b)dx$, 而它的变分为 $\delta y=x^2\delta a+x\delta b+\delta c$, $y=x^2+6x+3$ 只是这一族函数中的一个特定函数。

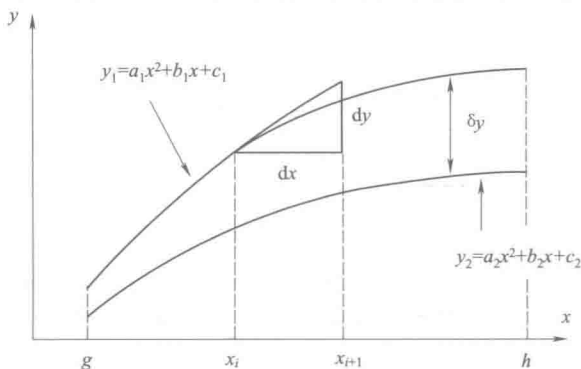


图 1.1 变分与微分示意图

从上面的例子中可以看到,变分是对函数中的系数所作的一种数学运算,而不是对函数自变量的数学运算,这是变分与微分不同之处,但变分与微分的运算方法相同。例如,对于函数 $y=\sin(x^2+a^2)$, 它的微分为 $dy=2x\cos(x^2+a^2)dx$, 而它的变分为 $\delta y=2a \cdot \cos(x^2+a^2)\delta a$ 。

1.2.3 微分方程的等效积分

工程中很多问题都是以微分方程及其边界条件的形式提出来的,如热传导问题:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q = 0 \quad (\text{在域 } \Omega \text{ 内}) \quad (1.2.2)$$

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad (\text{在边界 } \Gamma_{\phi} \text{ 上}) \quad (1.2.3a)$$

$$k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} = 0 \quad (\text{在边界 } \Gamma_q \text{ 上}) \quad (1.2.3b)$$

式中 ϕ —— 温度场函数;

k —— 热传导系数;

Q —— 热源;

n —— 边界的外法线;

Γ_{ϕ} —— 给定温度的边界;

Γ_q —— 给定热流的边界。

对于弹性力学问题,其平衡方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{在域 } \Omega \text{ 内}) \quad (1.2.4)$$

其边界条件也分为两类,一类是位移边界条件:

$$\begin{aligned} u - \bar{u} &= 0 \\ v - \bar{v} &= 0 \\ w - \bar{w} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{在边界 } \Gamma_u \text{ 上}) \quad (1.2.5a)$$

另一类是应力边界条件:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= \bar{T}_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z &= \bar{T}_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= \bar{T}_z \end{aligned} \quad (\text{在边界 } \Gamma_{\sigma} \text{ 上}) \quad (1.2.5b)$$

为了便于说明问题,将式(1.2.2)~式(1.2.5)统一表示为:

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{在域 } \Omega \text{ 内}) \quad (1.2.6)$$

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{在边界 } \Gamma \text{ 上}) \quad (1.2.7)$$

对于标量场问题,式(1.2.6)是一个方程, u 为标量场函数,如热传导问题[式(1.2.2)]的温度场函数 ϕ 。而对于矢量场问题,式(1.2.6)是一个方程组, u 为矢量场函数,如弹性力学问题[式(1.2.4)]的应力函数 $\{\sigma\}$ 。

微分方程的求解过程是一个构造原函数的过程,这个原函数在域内要满足微分方程式(1.2.6),在边界上要满足边界条件式(1.2.7)。一般而言,要构造一个严格满足微分方程及其边界条件的连续函数是十分困难的,有时甚至是不可能的。当精确求解不可能时,人们不得不求助于近似解法,即构造一个函数使其在域内近似满足微分方程、在边界上满足边界条件。

微分方程的边界条件包括强制边界和自然边界。所谓强制边界条件,是指那些场函数及其导数在边界上为给定值的边界条件,如力学问题中给定位移或变形的边界条件[式(1.2.5a)],热传导问题中给定温度的边界条件[式(1.2.3a)]。而自然边界条件则是指那些通过某种物理条件建立起来的场函数的导数与物理现象的关系构成的边界条件,如力学问题中的力边界条件[式(1.2.5b)],热传导问题中的热流边界条件[式(1.2.3b)]。对于强制边界条件,构造的场函数必须严格满足,而对于自然边界条件则可以不严格满足。那么,这个近似的程度如何控制呢?人们自然联想到了统计学中的平均概念,即令构造的连续函数在积分的意义上使微分方程和边界条件得到满足:

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad \int_{\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{u}) d\Gamma = 0 \quad (1.2.8)$$

当式(1.2.6)和式(1.2.7)成立时,式(1.2.8)必成立,即:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0 &\Rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega = 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{u}) = 0 &\Rightarrow \int_{\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{u}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

但是,式(1.2.8)成立并不能保证式(1.2.6)和式(1.2.7)一定成立。也就是说,满足式(1.2.8)的函数 $\mathbf{u}$ 并不一定满足式(1.2.6)和式(1.2.7)。为此,对式(1.2.8)作适当的改进,将原被积函数乘一个任意的权函数 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$,即:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{B}(\mathbf{u}) d\Gamma = 0 \quad (1.2.10)$$

由于权函数 $\mathbf{v} \neq 0, \mathbf{w} \neq 0$, 因此,满足式(1.2.10)与满足微分方程式(1.2.6)及其边界条件式(1.2.7)等效,即:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0 &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega = 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{u}) = 0 &\Leftrightarrow \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{B}(\mathbf{u}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

上式成立的条件除 $\mathbf{v} \neq 0, \mathbf{w} \neq 0$ 外, $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 也不等于常数,否则,式(1.2.10)与式(1.2.8)是相同的。

将式(1.2.10)的两式相加得:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{B}(\mathbf{u}) d\Gamma = 0 \quad (1.2.12)$$

式(1.2.12)即为微分方程及其边界条件的等效积分。由于强制边界条件在构造场函数时已满足,即 $\mathbf{B}_f(\mathbf{u}) = 0$ [$\mathbf{B}_f(\mathbf{u})$ 表示强制表界条件]。因此,式(1.2.12)的第二个积分为自然边界条件的积分。

对于等效积分而言,权函数的任意性是式(1.2.11)即式(1.2.12)成立的必要条件。同时,权函数的形式也决定了解的近似程度。

1.2.4 等效积分的“弱”形式

等效积分式(1.2.12)中,若微分方程是 $2m$ 阶的,则函数 u 是 $2m-1$ 阶连续的,而对权函数的连续性要求则只要是可积的,即可以是具有有限个第一类间断点的不连续函数。因此,在建立微分方程的等效积分时,构造原函数的困难要远远大于权函数的构造。为了降低构造原函数的难度,我们可以对式(1.2.12)第一个积分进行 m 次分部积分,而对第二个积分进行 $m-1$ 次分部积分,即:

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}^T(\mathbf{v})\mathbf{D}(\mathbf{u})d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{E}^T(\mathbf{w})\mathbf{F}(\mathbf{u})d\Gamma + \text{b. t.}(\mathbf{u}, \mathbf{g}) = 0 \quad (1.2.13)$$

式中: $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 为 m 阶微分算子, $\text{b. t.}(\mathbf{u}, \mathbf{g})$ 是分部积分产生的边界积分项,其中, $\mathbf{g}$ 为边界条件中的给定函数。后面我们将证明,通过选择适当的权函数,这 $2m-1$ 项之和为零,即 $\text{b. t.}(\mathbf{u}, \mathbf{g}) = 0$ 。因此,式(1.2.13)可简化为:

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}^T(\mathbf{v})\mathbf{D}(\mathbf{u})d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{E}^T(\mathbf{w})\mathbf{F}(\mathbf{u})d\Gamma = 0 \quad (1.2.14)$$

式(1.2.14)称为微分方程及其边界条件等效积分的“弱”形式,微分方程 $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ 的求导次数由 $2m$ 降低为 m ,从而降低了对原函数 u 的连续性要求。当然,在降低对函数 u 的连续性要求同时,权函数 v 由 0 阶导数提高至 m 阶导数,因此,对权函数 v 的连续性要求提高了 $m-1$ 。这意味着,经过分部积分,对原函数的连续性要求与对权函数的连续性要求是相同的。因此,对权函数连续性要求的提高并没有增加问题的难度,因为,构造原函数和构造权函数具有相同的难度,但降低了对原函数的连续性要求却可以大大降低原问题求解的难度。

下面以 Euler-Bernoulli 梁的弯曲问题为例来证明 $\text{b. t.}(\mathbf{u}, \mathbf{g})=0$ 。由 Euler-Bernoulli 梁的弯曲微分方程:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^2} = q \quad (1.2.15)$$

和边界条件:

$$y = \bar{y}, \theta = \frac{dy}{dx} = \bar{\theta}, M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \bar{M}, N = EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \bar{N} \quad (1.2.16)$$

可得梁弯曲问题的等效积分:

$$\begin{aligned} & \int_l v \left(EI \frac{d^4 y}{dx^4} - q \right) dx + w_1 \left(EI \frac{d^3 y}{dx^3} - \bar{N} \right) \Big|_0^l + \\ & w_2 \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} - \bar{M} \right) \Big|_0^l + w_3 \left(\frac{dy}{dx} - \bar{\theta} \right) \Big|_0^l + w_4 (y - \bar{y}) \Big|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

式中: $y - \bar{y}$ 和 $\frac{dy}{dx} - \bar{\theta}$ 两项分别为挠度和转角边界条件,在梁弯曲问题中属于强制边界条件,在构造场函数时必须严格满足,即: $y - \bar{y} = 0$ 和 $\frac{dy}{dx} - \bar{\theta} = 0$ 。因此,式(1.2.17)可简化为:

$$\int_l v \left(EI \frac{d^4 y}{dx^4} - q \right) dx + w_1 \left(EI \frac{d^3 y}{dx^3} - \bar{N} \right) \Big|_0^l + w_2 \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} - \bar{M} \right) \Big|_0^l = 0 \quad (1.2.18)$$

式中: $EI \frac{d^2 y}{dx^2} - \bar{M}$ 和 $EI \frac{d^3 y}{dx^3} - \bar{N}$ 为梁弯曲问题的自然边界条件,是建立在弯矩和剪力平衡条

件基础上的。

对上式的第一项进行两次分部积分得：

$$\int_l v \frac{d^4 y}{dx^4} dx = \int_l \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 y}{dx^2} dx + v \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_0^l - \frac{dv}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_0^l \quad (1.2.19)$$

由此可得：b. t. $(u, v) = v \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_0^l - \frac{dv}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_0^l$ 。

将式(1.2.19)代入式(1.2.18)得：

$$\begin{aligned} & \int_l \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - q \right) dx + EI v \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_0^l - \\ & EI \frac{dv}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_0^l + w_1 \left(EI \frac{d^3 y}{dx^3} - \bar{N} \right) \Big|_0^l + w_2 \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} - \bar{M} \right) \Big|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

由式(1.2.20)可知，如果权函数 w_1 和 w_2 满足：

$$w_1 = -v, \quad w_2 = \frac{dv}{dx} \quad (1.2.21)$$

则式(1.2.20)可简化为：

$$\int_l \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - q \right) dx + v \bar{N} \Big|_0^l - \frac{dv}{dx} \bar{M} \Big|_0^l = 0 \quad (1.2.22)$$

至此，我们证明了：选择适当的权函数可以消除微分方程的等效积分在分部积分过程中产生的边界项，从而得到式(1.2.14)的“弱”形式。

同时，上述推导过程也给出了边界条件的等效积分形式和权函数的构造方法。由式(1.2.18)可知，边界条件的积分仅包括自然边界条件的积分。对于一个 $2m$ 阶的微分方程， $0 \sim (m-1)$ 阶导数的边界条件为强制边界条件， $m \sim (2m-1)$ 阶导数的边界条件为自然边界条件。如上述的梁弯曲问题中， $m=2$ ，因此， 0 阶导数项(梁的挠度)和 1 阶导数项(梁的转角)的边界条件为强制边界条件，而 2 阶导数项(弯矩边界条件)和 3 阶导数项(剪力边界条件)的边界条件为自然边界条件。

对于边界条件等效积分的权函数的选择方法则可表示为，按照导数阶数由低至高的排列顺序：

$$w_1 = -v, \quad w_2 = \frac{dv}{dx}, \quad \dots, \quad w_i = (-1)^i \frac{d^{i-1}v}{dx^{i-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, 2m) \quad (1.2.23)$$

由式(1.2.23)可知，微分方程及其边界条件的等效积分只需构造微分方程等效积分的权函数，即可求得全部权函数。

例 1.2.1 试求二维热传导问题的等效积分“弱”形式。

解：由式(1.2.2)和式(1.2.3b)可得二维热传导问题的等效积分：

$$\int_{\Omega} v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q \right] dx dy + \int_{\Gamma_q} w \left(k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma = 0 \quad (a)$$

对式(a)的第一个积分的前两项进行一次分部积分得：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \oint_F v \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) n_x d\Gamma \\ \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \oint_F v \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) n_y d\Gamma \end{aligned} \quad (b)$$

式中: n_x, n_y 为边界外法线的方向余弦。

将式(b)代入式(a)得:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(k \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - vQ \right) dx dy - \\ & \oint_{\Gamma} v k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_q} w \left(k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

上式中, $\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ 为场函数在边界上的法向导数。

由于权函数的任意性, 可令 $w = -v$, 则式(c)可进一步表示为:

$$\int_{\Omega} k \nabla^T v \nabla \phi dx dy - \int_{\Omega} v Q dx dy - \int_{\Gamma_q} v \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_p} v k \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (d)$$

式中:

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (e)$$

1.3 微分方程的近似解法

微分方程的求解方法是构造一个满足强制边界条件的近似解 $\tilde{u}$, 然后代入微分方程 $A(\tilde{u})$ 检验近似解是否使微分方程和边界条件得到满足。如果:

$$A(\tilde{u}) = 0 \quad (\text{在域 } \Omega \text{ 内}) \quad (1.3.1)$$

$$B(\tilde{u}) = 0 \quad (\text{在边界 } \Gamma \text{ 上}) \quad (1.3.2)$$

则 $\tilde{u} = u$ 就是微分方程的解。但一般情况下, 我们很难找到微分方程的精确解 u , 近似解 $\tilde{u}$ 仅是精确解 u 的一个近似函数, 即 $\tilde{u} \approx u$, 从而使微分方程在域内或边界条件在边界上不处处为零(可能仅仅在某些点上等于零):

$$A(\tilde{u}) = R \neq 0 \quad (\text{在域 } \Omega \text{ 内}) \quad (1.3.3)$$

$$B(\tilde{u}) = R' \neq 0 \quad (\text{在边界 } \Gamma \text{ 上}) \quad (1.3.4)$$

式中: R 和 R' 称为“残差”或“余量”, 它们分别是域内 Ω 和边界 Γ 上的函数。

为了提高解的精度, 就解的精度而言, 我们希望“残差” R 和 R' 是均值为零而方差尽可能小的连续函数, 即:

$$\bar{R} = \int_{\Omega} R d\Omega = \int_{\Omega} A(\tilde{u}) d\Omega = 0 \quad (1.3.5)$$

$$\bar{R}' = \int_{\Gamma} R' d\Gamma = \int_{\Gamma} B(\tilde{u}) d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Omega} R^T R d\Omega = \int_{\Omega} A(\tilde{u})^T A(\tilde{u}) d\Omega = 0 \quad (1.3.6)$$

$$\int_{\Gamma} R'^T R' d\Gamma = \int_{\Gamma} B(\tilde{u})^T B(\tilde{u}) d\Gamma = 0$$

与式(1.2.9)和式(1.2.10)比较可知, 上述对“残差”的要求与微分方程的等效积分是等价的。式(1.3.6)与式(1.2.10)不同的仅仅是权函数的形式, 即式(1.3.6)给定了权函数——微

分方程及其边界条件,而式(1.2.10)则为一般的表达式。因此,可以利用微分方程和边界条件的等效积分概念来求解微分方程的近似解 $\tilde{u}$ 。由于等效积分的被积函数是由权函数和微分方程或边界条件的“余量”构成的,即:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{R} d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\tilde{u}) d\Omega = 0 \\ \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{R}' d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{B}(\tilde{u}) d\Gamma = 0\end{aligned}\quad (1.3.7)$$

因此,也称其为“加权余量法”。

加权余量法首先要构造近似解,由式(1.3.7)可知,近似解在满足强制边界条件的基础上,应使微分方程的余量尽可能小。由于任何形式的函数都可以用级数来模拟,所以,通常用级数来构造近似解,即:

$$\tilde{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a} \quad (1.3.8)$$

式中: $\mathbf{N}$ 为场函数自变量的确定函数,称为试探函数矩阵, $\mathbf{a}$ 为待定参数向量。

将式(1.3.8)代入式(1.3.7)得:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{R} d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{N}\mathbf{a}) d\Omega = 0 \\ \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{R}' d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{B}(\mathbf{N}\mathbf{a}) d\Gamma = 0\end{aligned}\quad (1.3.9)$$

由式(1.3.9)可以看出,等效积分得到的是一组关于待定参数的代数方程组,解此方程组即可得到微分方程的近似解。同时,式(1.3.9)还表明,对于同样的近似解,微分方程的等效积分将取决于权函数的形式。因此,基于不同的权函数就会产生不同的加权余量法。下面介绍几种常用的加权余量法。

1.3.1 配点法

配点法的基本思想是强制微分方程和边界条件的“余量”在域内和边界的若干点上等于零,其权函数可表示为:

$$\begin{aligned}v &= \delta(x - x_i) & x_i &\in \Omega \\ w &= \delta(x - x_j) & x_j &\in \Gamma\end{aligned}\quad (1.3.10)$$

式中: $x_i, x_j (i, j=1, 2, 3)$ 分别为域内和边界上的配点,这里采用了坐标的张量表达形式。将式(1.3.10)代入式(1.3.9)并注意到 $\delta(x)$ 函数的性质

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta(x - x_i) dx = 1 \quad (1.3.11)$$

得:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} [\delta(x - x_i)]^T \mathbf{A}(\mathbf{N}\mathbf{a}) d\Omega &= \mathbf{A}[\mathbf{N}(x_i)\mathbf{a}] = 0 \\ \int_{\Gamma} [\delta(x - x_j)]^T \mathbf{B}(\mathbf{N}\mathbf{a}) d\Gamma &= \mathbf{B}[\mathbf{N}(x_j)\mathbf{a}] = 0\end{aligned}\quad (1.3.12)$$

由式(1.3.12)可知,配点法的实质就是在选定点 x_i, x_j 处令微分方程和边界条件等于零,使得“余量”的绝对值不会偏离零点太远。同时,式(1.3.12)也表明,权函数和微分方程是同阶的向量函数,而配点的数量则取决于待定参数的数量或近似解的项数。因为方程的数量应与待定参数(方程的未知量)的数量相等。

例 1.3.1 试用配点法求解微分方程:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \quad (a)$$

其边界条件为:

$$\begin{aligned} x=0, \quad u &= 0 \\ x=1, \quad u &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

解:该微分方程只有强制边界条件,因此,式(1.3.12)的第二式是自动满足的,只需计算微分方程的等效积分。根据边界条件式(b),构造如下的近似解:

$$\tilde{u} = x(1-x)(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}) \quad (c)$$

取一项近似解:

$$\tilde{u} = a_1x(1-x) \quad (d)$$

代入式(a)得一项近似解的微分方程“余量”:

$$R_{(1)} = -2a_1 + a_1x(1-x) + x \quad (e)$$

取 $x=1/2$ 为配点,代入式(1.3.12)的第一式得:

$$R_{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}\hat{a}_1 + \frac{1}{2} = 0 \quad (f)$$

由式(f)解得:

$$a_1 = 0.2857 \quad (g)$$

由此可得一项近似解:

$$\tilde{u} = 0.2857x(1-x) \quad (h)$$

例 1.3.2 取两项近似解重做例 1.3.1。

解:由例 1.3.1 的式(c)可得两项近似解:

$$\tilde{u} = a_1x(1-x) + a_2x^2(1-x) \quad (a)$$

代入例 1.3.1 的式(a)得两项近似解的“余量”:

$$R_{(2)} = a_1(x-x^2-2) + a_2(2-6x+x^2-x^3) + x \quad (b)$$

由于两项解有两个待定参数,因此,取 $x=1/3$ 和 $x=2/3$ 两个配点。将两个配点分别代入式(1.3.12)的第一式得:

$$\begin{aligned} R_{(2)}\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{16}{9}a_1 + \frac{2}{27}a_2 + \frac{1}{3} = 0 \\ R_{(2)}\left(\frac{2}{3}\right) &= -\frac{16}{9}a_1 - \frac{50}{27}a_2 + \frac{2}{3} = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

由式(c)解得:

$$a_1 = 0.1948, \quad a_2 = 0.1731 \quad (d)$$

由此可得两项近似解:

$$\tilde{u} = x(1-x)(0.1948 + 0.1731x) \quad (e)$$

1.3.2 子域法

子域法的基本思想是将求解域分为若干个子域(子域的数量等于近似解的待定参数个数),每个子域上的权函数为 1,即:

$$v_i = w_i = 1 \quad (\text{在 } \Omega_i \text{ 或 } \Gamma_i \text{ 内}) \quad (1.3.13)$$

$$v_i = w_i = 0 \quad (\text{在 } \Omega_i \text{ 或 } \Gamma_i \text{ 外}) \quad (1.3.14)$$