"十二五"江苏省高等学校重点教材

"十三五"移动学习型规划教材

线性代数

（修订版）

主　编　董晓波

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

第1章 矩阵

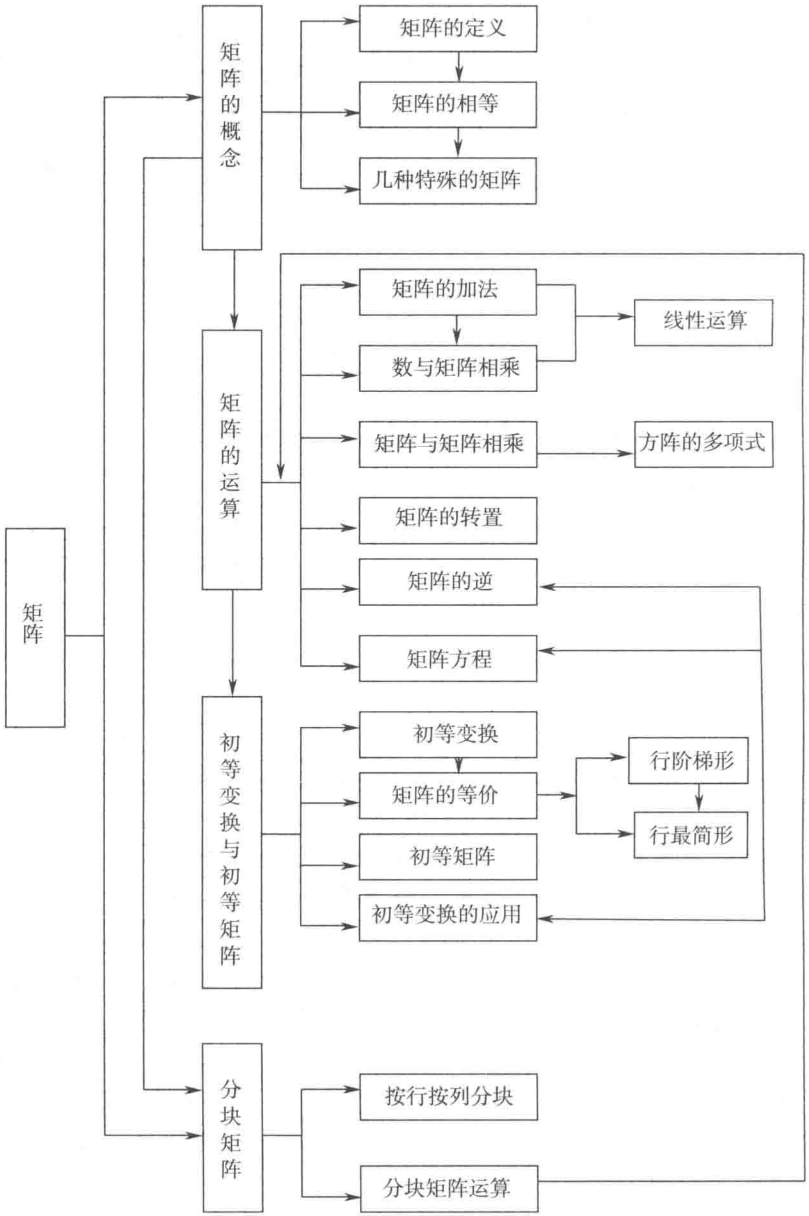
内容导引

矩阵是线性代数主要的研究对象之一，同时也是一个重要的数学工具. 很多实际问题都可以用矩阵表达，一些性质不同、表面上也没有什么联系的问题，却可以归结为矩阵问题. 这些问题常常可以转化为对矩阵的研究，可以用矩阵的有关理论得到解决，而且应用矩阵可以使得问题变得简单.

我们在考虑城市之间的交通情况时，其联结状况可以用通路矩阵来研究；电视、电影、计算机中动态仿真图形的旋转、缩放变换，都可以用矩阵表示；广泛应用于自然科学、社会科学，功能强大的MATLAB（含义是矩阵实验室，Matrix laboratory）软件，其基本元素都是矩阵；用图论解决很多复杂的实际问题时，都会用到邻接矩阵；一定时空系统内化合物的各原子数量，可以用原子矩阵表示；我们可以利用可逆矩阵对传递信息的明文进行加密、解密工作；种群数量变化模型、层次分析法中要用到矩阵；企业生产的产量、成本、利润等也可以用矩阵来表示，其关系可以借助矩阵的一些运算来讨论；赢得矩阵可以用来研究博弈论中二人有限零和对策的最优纯策略、混合策略；用匈牙利法求解人力资源管理中的指派问题也需要借助矩阵. 矩阵的应用还有很多很多.

正因为矩阵的应用广泛，因而它成为线性代数的一个极其重要的研究对象.

本章主要介绍矩阵的概念，一些常见的矩阵运算、初等矩阵和矩阵的初等变换，最后介绍矩阵的分块. 主要内容可以用以下框图表示.


矩阵
矩阵的概念
矩阵的定义
矩阵的相等
几种特殊的矩阵
矩阵的运算
矩阵的加法
数与矩阵相乘
线性运算
矩阵与矩阵相乘
方阵的多项式
矩阵的转置
矩阵的逆
矩阵方程
初等变换与初等矩阵
初等变换
矩阵的等价
行阶梯形
行最简形
初等矩阵
初等变换的应用
分块矩阵
按行按列分块
分块矩阵运算

引例

某公司准备在三个地区开设 A_1，A_2，A_3 三个工厂，它们分别生产 B_1，B_2，B_3，B_4 四种产品，为达到公司的经营目标，其每月的产量应该满足表 1. 1. 1 的要求：

表 1. 1. 1 单位：件

工厂 产量 产品	A_1	A_2	A_3
B_1	3000	4000	5000
B_2	1500	2500	3500
B_3	6000	7000	4000
B_4	5000	3600	5400

如果经公司先期测算，生产四种产品 B_1，B_2，B_3，B_4，每种产品的材料、劳动力及管理费的单位成本见表 1. 1. 2.

表 1. 1. 2 单位：元

产品 成本 费用	B_1	B_2	B_3	B_4
材料	1	2	3	4
劳动力	3	8	9	5
管理费	3	4	2	6

如果需要测算该公司半年各工厂、各产品的产量，可以分项计算得出；同样要算出该公司一个月材料、劳动力及管理费的总成本，那可以分个逐项计算，最终可以算出各自的总成本．若要简洁快速地算出，该怎么来计算呢？这需要矩阵的知识及性质．我们留待在本章的最后解决.

1.1 矩阵的概念

本节主要介绍矩阵的定义、矩阵的相等以及几种特殊的矩阵.

1.1.1 矩阵的定义

例 1 考虑从产地往销地调运产品的问题，设某产品有三个产地 A_1，A_2，A_3，四个销地 B_1，B_2，B_3，B_4，从产地 A_i 到销地 B_j 调运此产品的数量为 a_{ij}（$i=1,2,3$；$j=1,2,3,4$），则此产品的调运方案可以用 3 行 4 列的矩形数表表示，记为 $\boldsymbol{A}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix};$$

若从产地 A_i 到销地 B_j 调运此产品的单价为 b_{ij}（$i=1,2,3$；$j=1,2,3,4$），则此产品的调运单价情况也可以用 3 行 4 列的矩形数表表示，记为 $\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}.$$

以上此类的矩形数表十分常见．数表可以简洁地反映实际问题的有用信息，与所研究的问题密切相关，因此对实际问题的研究，常常可以转化为对这些矩形数表的处理及某些性质的研究．这样的矩形数表，我们称为矩阵，下面给出严格的数学定义．

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m **行** n **列矩阵**，简称 $m\times n$ **矩阵**．

为了表示它是一个整体，在外面加上括弧，并用大写的英文字母表示，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

构成矩阵的数称为矩阵的**元素**，位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行第 j 列的数 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **(i,j) 元**，a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，第二个下标 j 称为**列标**. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记作 (a_{ij})，$(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 以后如果没有特殊说明，均指实矩阵.

例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ 是 3×4 矩阵，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 是 2×3 矩阵，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ 是 3×2 矩阵.

矩阵不仅表现为可以将一些数据排成有规律的矩形数表，它还表现出其动词性的一面，即它可以代表描述对象具体的线性变换.

注：线性变换将在第 4 章讨论.

例如，三维空间图像的线性缩放中，这样的矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 将使“标准”的圆环在三维空间中做非均匀的缩放：在 x,y,z 轴方向分别将图像缩放 $\frac{1}{3},1,3$ 倍，如图 1.1.1 所示.

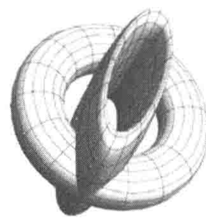


图 1.1.1　图像的线性缩放

1.1.2　矩阵的相等

下面给出同型矩阵及矩阵相等的概念.

定义 2　若两个矩阵的行数相同，列数也相同，则称它们互为**同型矩阵**. 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，且它们对应位置的元素都相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注：在同型矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中，若 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 2　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a+b \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & c+d \\ c-d & 3 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，试求 a,b,c,d 的值.

解　由矩阵相等的定义得

$$\begin{cases} a = \_\_\_\_ \\ c + d = \_\_\_\_ \\ c - d = \_\_\_\_ \\ a + b = \_\_\_\_ \end{cases},$$

解得 $a = \_\_\_\_, b = \_\_\_\_, c = \_\_\_\_, d = \_\_\_\_.$

1.1.3 几种特殊的矩阵

下面介绍几种常见的特殊矩阵.

(1) 行矩阵和列矩阵

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一行，即形如

$$\boldsymbol{A} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$$

的矩阵称为**行矩阵**，又称为**行向量**.

为清楚地表示出各元素，行矩阵也可记作 $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 只有一列，即形如

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

的矩阵称为**列矩阵**，又称为**列向量**.

(2) n 阶方阵

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数相同，都等于 n ，即形如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶矩阵**，又称为 n **阶方阵**，可记作 $\boldsymbol{A}_n$. n 阶矩阵从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，主对角线上的元素称为**主对角元**；另一条对角线称为**副对角线**，副对角线上的元素称为**副对角元**.

(3) 对角矩阵

若 n 阶矩阵中除主对角元外，其余元素均为 0 ，即形如

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶对角矩阵**，又称为 n **阶对角阵**，常记为 $\boldsymbol{\Lambda}$. 对角阵可以简记为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

若 n 阶对角阵中的元素 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$，则称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 n **阶数量矩阵**.

(4) 单位阵

若 n 阶对角阵中的元素 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，即形如

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶单位阵**，记为 $\boldsymbol{E}_n$. 在不混淆的情况下，常省略下标 n，记作 $\boldsymbol{E}$.

例如，$\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$是 3 阶单位阵.

(5) 三角矩阵

若 n 阶方阵中元素满足 $a_{ij}=0\ (i>j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，即形如

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶上三角矩阵**.

若 n 阶方阵中元素满足 $a_{ij}=0\ (i<j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，即形如

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶下三角矩阵**.

（6）零矩阵

所有元素均为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$.

例如，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 均为零矩阵.

练　　习

- **选择题**

1. 以下结论正确的是（　　）.

（A）所有的零矩阵相等

（B）零矩阵必定是方阵

（C）所有的 3 阶方阵必是同型矩阵

（D）不是同型矩阵也可能相等

- **填空题**

2. 某企业生产 3 种产品，每种产品在 2014 年和 2015 年各季度的产值（单位：万元）见表 1.1.3.

表 1.1.3

季度 / 产值 / 产品	2014 年				2015 年			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	18	12	15	19	16	18	17	15
2	27	30	26	35	25	30	28	37
3	15	18	14	13	13	20	18	15

试作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别表示三种产品在 2014 年和 2015 年各季度的产量.

3. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4-y \\ x-2 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，则 $x =$ ________，$y =$ ________.

- **问答题**

4. 下列矩阵哪些是方阵？哪些是三角矩阵？若是方阵，其主对角元素是什么？

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2　矩阵的运算

本节主要介绍矩阵的加法、数与矩阵相乘、矩阵与矩阵相乘、矩阵的转置以及矩阵的逆等运算.

1.2.1　矩阵的加法

定义 3　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$、$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 均为 $m \times n$ 矩阵，将它们的对应

位置元素相加得到的 $m\times n$ 矩阵，称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和**，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注：只有同型矩阵之间才能进行加法运算.

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，不难验证，矩阵的加法运算满足：

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

定义 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，将 $\boldsymbol{A}$ 的各元素变号得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$，即 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$.

定义 5 矩阵的减法为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$，亦即两个矩阵对应的元素相减.

易见，矩阵加法和减法有下面恒等式成立：

(1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，

其中 $\boldsymbol{O}$ 为与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵.

1.2.2 数与矩阵相乘

定义 6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各元素相乘所得到的矩阵，称为**数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积**，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$. 数与矩阵相乘简称为**数乘**，即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

规定 $\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda$.

由定义 6 可以直接得到 $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，λ，μ 为数，不难验证，数乘运算满足：

(1) 结合律 $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

（2）分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

$$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}.$$

矩阵的加法与数乘运算合起来，统称为矩阵的**线性运算**.

例 3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 5 & -2\\ 5 & 1 & 9\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解　由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，可知 $2\boldsymbol{X}=$ ________，

从而有　$\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & \underline{\quad} & -4\\ 4 & -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \underline{\quad} & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

1.2.3　矩阵与矩阵相乘

前面提到的矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}10 & 15 & 20\\ 8 & 7 & 9\end{pmatrix}$ 中，若行表示甲、乙超市，列表示三种商品的日销售量；矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ 中，若行表示上述的三种商品，列分别表示两个超市三种商品的单价和利润，要求两超市分别销售三种商品的总收入与总利润，则有：

表 1.2.1　超市收入计算表

	总收入	总利润
甲	$10\times3+15\times2+20\times4=140$	$10\times2+15\times2+20\times1=70$
乙	$8\times3+7\times2+9\times4=74$	$8\times2+7\times2+9\times1=39$

将上面的结果写成矩阵的形式，则为 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}140 & 70\\ 74 & 39\end{pmatrix}$. 它有现实的意义，同时它与矩阵 $\boldsymbol{C}$、矩阵 $\boldsymbol{D}$ 都有关，且有规律，下面我们定义 $\boldsymbol{E}$ 为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 与矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的乘积.

（1）矩阵乘法的定义

定义 7　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$ 的行数相等，则由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

构成的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积**，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注：两个矩阵相乘的前提是左矩阵的列数等于右矩阵的行数.

例 4 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\begin{matrix}2\times1+0\times4+\\(-1)\times2\end{matrix}&\underline{\qquad\qquad}&\begin{matrix}2\times(-1)+\\0\times3+(-1)\times1\end{matrix}\\\underline{\qquad\qquad}&\begin{matrix}1\times7+\\3\times2+2\times0\end{matrix}&\begin{matrix}1\times(-1)+\\3\times3+2\times1\end{matrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&\underline{\qquad}&-3\\\underline{\qquad}&13&10\end{pmatrix}.$$

注：矩阵的乘法也可以这样来计算，例 4 中的 $\boldsymbol{AB}$ 可以写成下列形式，反而容易计算，

$$\begin{array}{c|c}&\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}\\\hline\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix}\end{array}.$$

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times1+1\times(-1) & 1\times(-1)+1\times1 \\ -1\times1+(-1)\times(-1) & -1\times(-1)+(-1)\times1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times1+(-1)\times(-1) & 1\times1+(-1)\times(-1) \\ -1\times1+1\times(-1) & -1\times1+1\times(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times(-1)+1\times1 & 1\times1+1\times(-1) \\ -1\times(-1)+(-1)\times1 & -1\times1+(-1)\times(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（2）矩阵乘法的运算律

一般地，称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ **左乘** B（或 $\boldsymbol{B}$ **被** $\boldsymbol{A}$ **左乘**），称 $\boldsymbol{BA}$ 为 $\boldsymbol{A}$ **右乘** $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{B}$ **被** $\boldsymbol{A}$ **右乘**）.

由例 5 可见，矩阵的乘法一般不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$．有时虽然 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，但 $\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义，有时即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 也不一定相等.

当然，并不是所有矩阵相乘都不可以交换，例如，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 8 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**相乘可换**的.

仍由例 5 可见，矩阵 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$，但可能有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，即由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 不能得出 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$；依据上述结论，显然若 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，不能得出 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ 的结论，即若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$，不能推出 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$，因此，矩阵乘法消去律不成立.

设 λ 为数，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为矩阵，且它们可运算，可验证矩阵乘法

满足以下运算律：

1）结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

2）数乘结合律 $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$；

3）左分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；

右分配律 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

有兴趣的读者可以尝试具体的证明过程，或查阅高等代数等相关书籍.

对任意一个实数 x，有 $1\times x=x\times 1=x$，一般称1是单位元. 这一概念可以推广到矩阵上.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，由于 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n$，则称 $\boldsymbol{E}_m$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**左单位元**，称 $\boldsymbol{E}_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**右单位元**. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 方阵，则 $\boldsymbol{E}_m=\boldsymbol{E}_n$，即左、右单位元相等，$\boldsymbol{E}_n$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**单位元**.

（3）方阵的幂运算

由于矩阵乘法满足结合律，故可以定义方阵的幂运算.

定义9 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k个}$ 称为**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的** k（$k\in\mathbb{Z}^+$）**次幂**.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k，l 为正整数，方阵的幂运算满足以下运算律：

1）$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

2）$(\boldsymbol{A}^k)^l=(\boldsymbol{A}^l)^k=\boldsymbol{A}^{kl}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘可换，则 $(\boldsymbol{AB})^2=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}$（矩阵乘法满足结合律）$=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘可换）$=(\boldsymbol{AA})(\boldsymbol{BB})$（矩阵乘法满足结合律）$=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$（幂运算定义）.

由归纳法证明有 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$（$k\in\mathbb{Z}^+$）.

类似地，当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$，$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 等公式也成立.

（4）方阵的多项式

与 x 的代数多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 类似，由方阵幂的定义，可以定义出方阵的多项式.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$a_i(i=0,1,\cdots,m,m\in\mathbb{Z}^+)$ 是常数，称 $f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$ 为**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式**. 一般方阵多项式记为 $f(\boldsymbol{A})$，$g(\boldsymbol{A})$，$h(\boldsymbol{A})$ 等.

由方阵幂的运算律知，方阵多项式也有类似的因式分解运算，

例如，

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E});$$

$$g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^5-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}).$$

关于方阵的多项式的一些重要性质，会在第2章中有进一步的讨论.

（5）线性方程组的矩阵表示

设含有 n 个未知数、m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为线性方程组（1.1）的**系数矩阵**，$\boldsymbol{x}$ 称为线性方程组（1.1）的**未知数向量**，$\boldsymbol{b}$ 称为线性方程组（1.1）的**常数项向量**，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 称为线性方程组（1.1）的**增广矩阵**.

根据矩阵的乘法，有

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}_{m\times 1}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1},$$

由矩阵相等的定义，线性方程组（1.1）也可表示为矩阵形式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \tag{1.2}$$

将式（1.2）称为**矩阵方程**，则 $\boldsymbol{x}$ 也称为矩阵方程（1.2）的**解向量**.

如例3就是求解矩阵方程的问题. 又如 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为元素已知的矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为元素未知的矩阵），这些都是**矩阵方程**.

1.2.4 矩阵的转置

定义10 将矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$ 的行与列互换，得到矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$，称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即若

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

例如，若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$.

矩阵的转置也是一种矩阵运算，它满足下列运算规律：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

其中（1）～（3）容易验证. 现仅证（4）成立.

（4）的证明. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times n}$，由于 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元为 $\boldsymbol{AB}$ 的 (j,i) 元，等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行左乘 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列，等于 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行左乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列，即为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元，故 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 6 已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\end{pmatrix}$，求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法 1 先乘积再转置

$$AB=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-7&8\\4&-5&2\end{pmatrix},$$

所以

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}6&4\\-7&-5\\8&2\end{pmatrix}.$$

解法 2 先转置再乘积

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-1&-3\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\qquad}&\underline{\qquad}\\\underline{\qquad}&\underline{\qquad}\\\underline{\qquad}&\underline{\qquad}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4\\-7&-5\\8&2\end{pmatrix}.$$

例 7 设 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，求 $x^{\mathrm{T}}y$，xy^{T}.

解 $x^{\mathrm{T}}y=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$，

$$xy^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}(\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad})=\begin{pmatrix}x_1y_1&x_1y_2&\cdots&x_1y_n\\x_2y_1&x_2y_2&\cdots&x_2y_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_ny_1&x_ny_2&\cdots&x_ny_n\end{pmatrix}.$$

以下给出对称矩阵、反对称矩阵的概念.

定义 11 设 A 为 n 阶方阵，若 $A^{\mathrm{T}}=A$，即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为 n **阶对称矩阵**.

若 $A^{\mathrm{T}}=-A$，即 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为**反对称**