

中国力学学会 编

# 全国周培源

## 大学生力学竞赛赛题

## 详解及点评

### 2017版

机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



# 全国周培源大学生力学 竞赛赛题详解及点评

2017 版

中国力学学会 编



机械工业出版社

全国周培源大学生力学竞赛已经举办了十届。从竞赛风格来看,前五届力学竞赛都只有笔试环节,而从第六届力学竞赛开始,增加了团体赛的环节,强调了实验、研究和动手制作的重要性,以考查学生处理实际问题的能力。

为了更好地开展这项赛事,也为了使参赛的学生能更好地了解竞赛内容及其变化,本书汇集了历届全国周培源大学生力学竞赛的试题、答案,并从教师和出题者的角度对试卷的难易程度和特点进行了点评。同时,为了配合力学竞赛从单纯的笔试发展到动手实践的趋势,书中还介绍了大量的学生动手实践活动。这些实践活动体现了作者长期倡导的教学理念:理论联系实际,灵活运用所学知识处理实际问题。

书中所介绍的一系列的实践活动,如“纸桥过车”“弹簧秤称大象”“纸船载人”“大师挑战赛”“手机吊冰箱”“逆行风车”等,是清华大学高云峰教授与中央电视台《异想天开》栏目合作,亲自组织策划和实践的大型趣味实践活动。书中介绍了这些活动的背景、各队比赛的方案以及高云峰教授对这些活动的点评。

## 图书在版编目(CIP)数据

全国周培源大学生力学竞赛赛题详解及点评:2017版/中国力学学会编. —北京:机械工业出版社,2017.4

ISBN 978-7-111-56553-6

I. ①全… II. ①中… III. ①力学—高等学校—竞赛题—题解 IV. ①O3-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第058556号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:姜凤 责任编辑:姜凤 汤嘉

责任校对:刘岚 封面设计:马精明

责任印制:常天培

唐山三艺印务有限公司印刷

2017年4月第1版第1次印刷

184mm×260mm·17.75印张·544千字

标准书号:ISBN 978-7-111-56553-6

定价:49.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88379833

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-88379649

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网:www.golden-book.com

# 序 言

世界上最早在学生中组织文化知识竞赛，是从数学学科开始的。其中最著名的，要算是1894年匈牙利数学竞赛了，迄今已经经历了一百多年。罗马尼亚的中学生数学竞赛开始于1902年，苏联的中学生数学竞赛开始于1934年，被命名为数学奥林匹克。美国开始于1938年，保加利亚开始于1949年，我国开始于1956年。1959年开始了国际中学生数学竞赛。

著名数学家陈省身教授在《怎样把中国建为数学大国》的讲演中说：“数学竞赛大约是百年前在匈牙利开始的，匈牙利产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！”（《数学进展》20卷2期）数学奥林匹克为匈牙利造就了一大批世界著名学者，著名的力学家冯·卡门就是当年匈牙利数学竞赛的优胜者。陈省身教授在《航空航天时代的科学奇才》一书中说：“根据我所知，目前在国外的匈牙利著名科学家当中，有一半以上都是数学竞赛的优胜者，在美国的匈牙利科学家，如爱德华、泰勒、列夫·西拉得、G. 波利亚、冯·诺依曼等几乎都是数学竞赛的优胜者。我衷心希望美国和其他国家都能倡导这种数学竞赛。”这些话充分说明，举行中学生的数学竞赛，不仅能对一个国家的数学学科的发展起到巨大的推动作用，而且由于数学是许多学科的基础，它对推动这个国家的整个科学技术的发展也起着重要的作用。

在各国学者逐渐领略到数学竞赛的好处后，20世纪，在中学生以至大学生群体中进行的各种比赛犹如雨后春笋，蓬勃发展起来。1967年开始了国际中学生物理奥林匹克竞赛，1968年开始了国际中学生化学奥林匹克竞赛。在大学生中，美国数学会主持的从1938年开始的普特南（Putnam）数学竞赛，其竞赛优胜者得到的不仅是奖金，更重要的是荣誉。国际著名的物理学家、诺贝尔奖获得者费曼就获得过普特南数学竞赛第一名。美国国际大学生数学建模竞赛开始于1985年，国际大学生程序设计竞赛开始于1977年，国际大学生建筑设计竞赛开始于1976年，等等。

在各门学科中，力学和数学是最为基础和影响范围最大的两门学科，也是关系最为密切的两门学科。

在中国明末，由西方传教士邓玉函（瑞士人）口授、王徵笔录，于1627年出版的《远西奇器图说》中讲到数学和力学的关系时说：“造物主之生物，有数、有度、有重，物物皆然。数即算学，度乃测量学，重则此力艺之重学（注：中国早期将力学翻译为重学）也。重有重之性。以此重较彼重之多寡，则资算学；以此重之形体较彼重之形体之大小，则资测量学。故数学、度学、重学之必须，盖三学皆从性理而生，为兄弟内亲，不可相离者也。”这里数学是计算的意思，和现今数学的含义不同；度学是指测量学，更宽一点，指的是几何学。

我国著名力学家谈镐生先生在1977年上书中国科学院说：“按照近代观点，物理、化学、天体物理、地球物理、生物物理可以全部归纳为物理科学。力学是物理科学的基础，数学又是所有学科的共同工具，力学和数学原是科学发展史上的孪生子，因此，可以形象

地认为，物理科学是一根梁，力学和数学是它的两根支柱。”他曾更为简练地说：“数、理、化、天、地、生中的五大科学可以统一归纳为‘物理科学’。力学当然就是物理科学的共同基础。而数学则是物理科学和所有科学的共同工具。”

基于对力学在各门科学中的重要性的这种认识，要推动我国科学技术的现代化，在青少年中鼓励他们打好力学的基础和打好数学基础具有同等重要的意义。因此，中国力学学会决定从 1988 年开始在大学生中举行力学竞赛是十分重要的举措，它对于推动作为基础课的力学学科的教学，增加学生对力学学科学习的兴趣，活跃教学与学习环境，发现人才，吸引全社会对力学学科的关注与投入，都是非常重要的。

事实证明，全国周培源大学生力学竞赛开始以来，愈来愈受到各界的重视。一届比一届规模大，一届比一届受到更多的支持。1988 年，第一届比赛，称为青年力学竞赛，原定是每四年举行一次。1988 年第一届参赛者只有 62 人，而 2007 年第六届的参赛者有近万名。后来受到周培源基金会的支持，改名为周培源大学生力学竞赛，还受到教育部高教司的支持，并且从原来的每四年举行一次改为每两年举行一次。这些都说明，周培源大学生力学竞赛是一项适合我国科学技术和教育发展潮流的重要赛事。办好周培源大学生力学竞赛，不仅是中国力学学会的责任，也是我国各级教育主管行政部门、各大专院校、广大力学学科的教师乃至全社会的责任。

从第一届大学生力学竞赛以来，已经过去二十多个年头了。二十多年是一个不短的历史阶段。为了使大学生力学竞赛的赛事办得更好，我们需要认真总结一下比赛的收获和经验。尤其是对于各届比赛的命题、比赛内容和方式加以总结和检讨，是很必要的。恰巧清华大学高云峰教授和北京航空航天大学蒋持平教授合作将我国历届大学生力学竞赛的赛题和题解结集出版，并且作者对于各届的赛题进行了点评。无疑，本书的出版对推动周培源大学生力学竞赛的总结与提高是有帮助的。

本书的主要特点：一是作者并不仅是简单地把原来的赛题归纳结集（历次力学竞赛的赛题和解答都在赛后由《力学与实践》杂志刊登），而且还在第一至八届的赛题后面给出了点评。评议这些题目的难易、是否超出现行力学教学大纲。在附录中，还对赛题（理论力学）根据难易进行了分级。二是加强了动手和联系实际的内容。作为附录，作者还就中央电视台播出过的有关力学联系实际问题和动手能力的比赛进行了纪实介绍。由于这些比赛，高云峰教授都是实际指导者，所以写来更为生动、透彻深入。

我想，这本书，不仅对今后比赛的组织者、命题者有很好的参考价值，对于力学比赛的指导教师、力学竞赛的参加者，也具有很好的参考意义。一般来说，为了教好、学好力学课，对于教师和学生，这是一本难得的参考书。

北京大学退休教授

刘际可

## 前 言

中国开展周培源大学生力学竞赛已经二十多年了。让时光回溯到1986年8月，在呼和浩特市召开的《力学与实践》编委会会议上，北京大学武际可教授建议组织大学程度的力学竞赛，获一致赞同。时任中国力学学会理事长的郑哲敏院士听取了汇报，安排《力学与实践》编委会（竞赛组织委员会）筹办。1988年首届“全国青年力学竞赛”成功举办，至2013年竞赛已举办了九届。竞赛从第三届开始改名为“全国周培源大学生力学竞赛”，以纪念已故著名力学家周培源院士。

从一开始，力学竞赛的宗旨就很明确：推动作为基础课的力学教学，增加学生对力学学科的兴趣，活跃教学与学习氛围，发现人才，吸引全社会对力学学科的关注与投入。用武际可教授的话说：全国周培源大学生力学竞赛是“种子的事业”。为发现、选拔和培育优秀力学人才，力学与工程界倾注了极大的热情。在国内外享有盛誉的张维院士、郑哲敏院士、王仁院士、庄逢甘院士、黄克智院士、张涵信院士、李家春院士、程耿东院士、胡海岩院士、刘人怀院士、陈佳洱院士、杨卫院士等著名科学家，中国科协领导、多所高校校领导出席了各届颁奖典礼，并为获奖选手做了系列精彩的学术报告，有关高校、高等教育出版社等单位和个人出资赞助。在北京赛区历届竞赛中，中国力学学会当届理事长郑哲敏院士、王仁院士、庄逢甘院士、白以龙院士、崔尔杰院士、李家春院士都带队看望参赛选手。在其他各省（市）赛区，也是由有声誉的学者带队看望参赛选手，如2007年举办的第六届全国周培源大学生力学竞赛，中国力学学会副理事长程耿东院士、郑晓静教授、戴世强教授、教育部高等学校力学基础课程教学指导分委员会主任洪嘉振教授分别在当地带队看望了参赛选手。

苏东坡词云：“入淮清洛渐漫漫”。流经二十多个春秋，全国周培源大学生力学竞赛已经从涓涓细流发展成为奏鸣着大学生的青春旋律、飞溅着年轻学子知识创新浪花的河流。从第一届12个单位的62人参赛，第二届1389人报名参赛，第三届1711人报名参赛，第四届25个省（市）、自治区81所高校的2752人报名参赛，第五届30个省（市）、自治区164所高校的7617人报名参赛，第六届29个省（市）、自治区197所高校的9736人报名参赛，第七届29个省（市）、自治区214所高校的12089人报名参赛，第八届29个省（市）、自治区280所高校的17026人报名参赛，到第九届30个省（市）、自治区280余所高校共17338人报名参赛，规模不断扩大。

朱熹有诗：“问渠哪得清如许，为有源头活水来”。全国周培源大学生力学竞赛为我国高校力学教学改革注入了一股不息的清泉。她创造了高校、中国力学学会和《力学与实践》刊物合作办竞赛的新形式：既铺设了年轻学生通向高水平研究的桥梁，又为国家重大科研和工程项目的人才输送提供了通道；既为刊物相关栏目提供了生动活泼的稿源，又为竞赛和高校力学教学经验交流提供了交流的平台。《力学与实践》相关栏目刊登的竞赛成果已经大量为高校基础力学教材、教学参考书和课堂教学引用，成为教学创新的亮点。同时，全国大学生科技竞赛活动也丰富了校园文化，为年轻一代科学素质的提升做出了贡献。

2004年第五届竞赛成功举办后，根据我国高等教育形势发生的深刻变化，以及党和政

府提出建设创新型国家、把高等教育的重点放在提高教育质量上的战略决策，中国力学学会决定对竞赛进行重大改革，将全国周培源大学生力学竞赛申请成为教育部高教司主办的大学生科技竞赛活动。2006年，教育部高教司批准了这项申请，并决定由教育部高教司委托教育部力学基础课程教学指导分委员会、中国力学学会和周培源基金会共同举办。

2006年12月29日，第五、六届竞赛组委会负责人梅凤翔教授和蒋持平教授、组委会秘书长刘俊丽副编审在北京理工大学参加了由教育部高教司主办的全国6个大学生科技竞赛活动工作研讨会。经向竞赛领导小组汇报请示后，组委会研究决定：

(1) 竞赛分为个人赛与团体赛。个人赛内容限制在教学计划为中等学时的理论力学和材料力学范围之内，但不再是分科考题，而是综合与灵活应用的赛题。团体赛为团队合作的动手制作与操作的竞赛，努力打造高学术含金量的大学生科技竞赛活动。

(2) 竞赛周期由四年改为两年，让所有大学生都有机会参赛。竞赛年与“中国力学学会学术大会”年同步，并在中国力学学会学术大会上颁奖。

(3) 团体赛冠军队学校组织下届竞赛，负责赛题命题且不参赛。这不仅是为了公正，也是为了推动教学交流，促进优质教学资源的共享和融合。

清华大学主动承担了第六届全国周培源大学生力学竞赛新竞赛形式的命题工作。竞赛非常成功，中央电视台《异想天开》栏目组为团体赛录制了一小时的专题节目，播放后引起了很大的反响。

为了办好全国周培源大学生力学竞赛，教育部高教司的领导做了重要指示，教育部力学基础课程教学指导分委员会对竞赛内容做了具体规划。历届竞赛组委会负责人有武际可、贾书惠、孙学伟、梅凤翔、蒋持平、隋永康等教授。历届命题组成员有朱照宣、武际可、徐秉业、殷金生、贾书惠、张行、王敏中、梅凤翔、孙学伟、黄文彬、李万琼、吴鹤华、蒋持平、高云峰等教授。从力学科学泰斗到普通力学教师，数不清的人为竞赛做出了贡献。中国力学学会常务理事会和学会办公室人员，《力学与实践》编委会，各省（市）、自治区力学学会竞赛组委会和各高校指导教师都为竞赛的开展做了大量的工作，我们谨以本书致以深深的敬意。我们感谢所有参加和关心这项竞赛的大学生，他们将托起力学科学光辉灿烂的明天。

感谢竞赛组委会的支持，承蒙机械工业出版社的诚邀和帮助，我们有机会出版此书，将历届命题教师的劳动成果整理奉献给大家，以方便众多关心此项赛事的教师、学生和热心的读者阅读参考。

蒋持平教授从第二届参加竞赛工作，第三届至今任竞赛组委会成员，其中第四、六、七届竞赛任组委会负责人，负责本书第一至五届、第七届材料力学赛题和第八届材料力学赛题点评的编写。高云峰教授从第四届至今任竞赛组委会成员，承担了第四、八届理论力学竞赛和第六届全部赛题的命题工作，负责本书第一至五届、第七和第八届理论力学赛题、第六届全部赛题的编写。第九届的赛题及解答由四川大学负责。第十届的赛题及解答由山东科技大学负责。附录中的力学实践活动均由高云峰教授与中央电视台合作策划。

武际可教授对全书进行了仔细审阅，提出了宝贵的修改意见，谨致感谢。

对于书中的缺点和错误，恳请读者批评指正。

中国力学学会

# 目 录

序言

前言

<b>第 1 章</b>	<b>1988 年第一届全国青年力学竞赛</b>	1
1.1	理论力学试题	1
1.2	材料力学试题	3
1.3	理论力学试题参考答案及详细解答	5
1.4	材料力学试题参考答案及详细解答	18
1.5	试题点评	29
<b>第 2 章</b>	<b>1992 年第二届全国青年力学竞赛</b>	34
2.1	理论力学试题	34
2.2	材料力学试题	36
2.3	理论力学试题参考答案及详细解答	38
2.4	材料力学试题参考答案及详细解答	40
2.5	试题点评	45
<b>第 3 章</b>	<b>1996 年第三届全国周培源大学生力学竞赛</b>	51
3.1	理论力学试题	51
3.2	材料力学试题	54
3.3	理论力学试题参考答案及详细解答	56
3.4	材料力学试题参考答案及详细解答	61
3.5	试题点评	66
<b>第 4 章</b>	<b>2000 年第四届全国周培源大学生力学竞赛</b>	68
4.1	理论力学试题	68
4.2	材料力学试题	70
4.3	理论力学试题参考答案及详细解答	71
4.4	材料力学试题参考答案及详细解答	76
4.5	试题点评	81
<b>第 5 章</b>	<b>2004 年第五届全国周培源大学生力学竞赛</b>	84
5.1	理论力学试题	84
5.2	材料力学试题	86
5.3	理论力学试题参考答案及详细解答	88
5.4	材料力学试题参考答案及详细解答	91



5.5	试题点评	97
<b>第 6 章</b>	<b>2007 年第六届全国周培源大学生力学竞赛</b>	<b>101</b>
6.1	个人赛试题	101
6.2	个人赛试题参考答案及详细解答	104
6.3	个人赛试题点评及出题思路	110
6.4	团体赛试题	113
6.5	团体赛试题分析及点评	116
6.6	团体赛花絮及照片	117
<b>第 7 章</b>	<b>2009 年第七届全国周培源大学生力学竞赛</b>	<b>121</b>
7.1	个人赛试题	121
7.2	个人赛试题参考答案及详细解答	123
7.3	个人赛试题点评及出题思路	130
7.4	团体赛试题	131
7.5	团体赛试题分析及点评	136
7.6	团体赛花絮及照片	143
<b>第 8 章</b>	<b>2011 年第八届全国周培源大学生力学竞赛</b>	<b>147</b>
8.1	个人赛试题	147
8.2	个人赛试题参考答案及详细解答	149
8.3	个人赛试题点评及出题思路	157
8.4	团体赛试题	161
8.5	团体赛试题分析及点评	165
8.6	团体赛花絮及照片	167
<b>第 9 章</b>	<b>2013 年第九届全国周培源大学生力学竞赛</b>	<b>172</b>
9.1	个人赛试题	172
9.2	个人赛试题参考答案及详细解答	174
9.3	团体赛试题	190
<b>第 10 章</b>	<b>2015 年第十届全国周培源大学生力学竞赛</b>	<b>197</b>
10.1	个人赛试题	197
10.2	个人赛试题参考答案及详细解答	199
10.3	团体赛试题	214
<b>附录</b>		<b>223</b>
附录 A	竞赛（理论力学）试卷难度系数评估	223
附录 B	纸桥过车	225
附录 C	弹簧秤称大象	234

---

附录 D	纸船载人 .....	243
附录 E	大师挑战赛 .....	250
附录 F	手机吊冰箱 .....	261
附录 G	逆行风车 .....	267

# 第 1 章 1988 年第一届全国青年力学竞赛

## 1.1 理论力学试题

1. 图 1-1 所示平衡系统中, 物体 I、II、III、IV 之间分别通过光滑铰链 A、B、C 联接。O、E 为固定支座, D、F、G、H 处为杆约束。尺寸如图所示,  $b/a = 1.5$ 。物体 II 受大小为  $M$  的力偶作用。假定全部力均在图示平面内, 且不计所有构件的自重, 杆  $O_3G$  的内力不为零, 则杆  $O_4H$  与杆  $O_5H$  所受内力之比为\_\_\_\_\_。

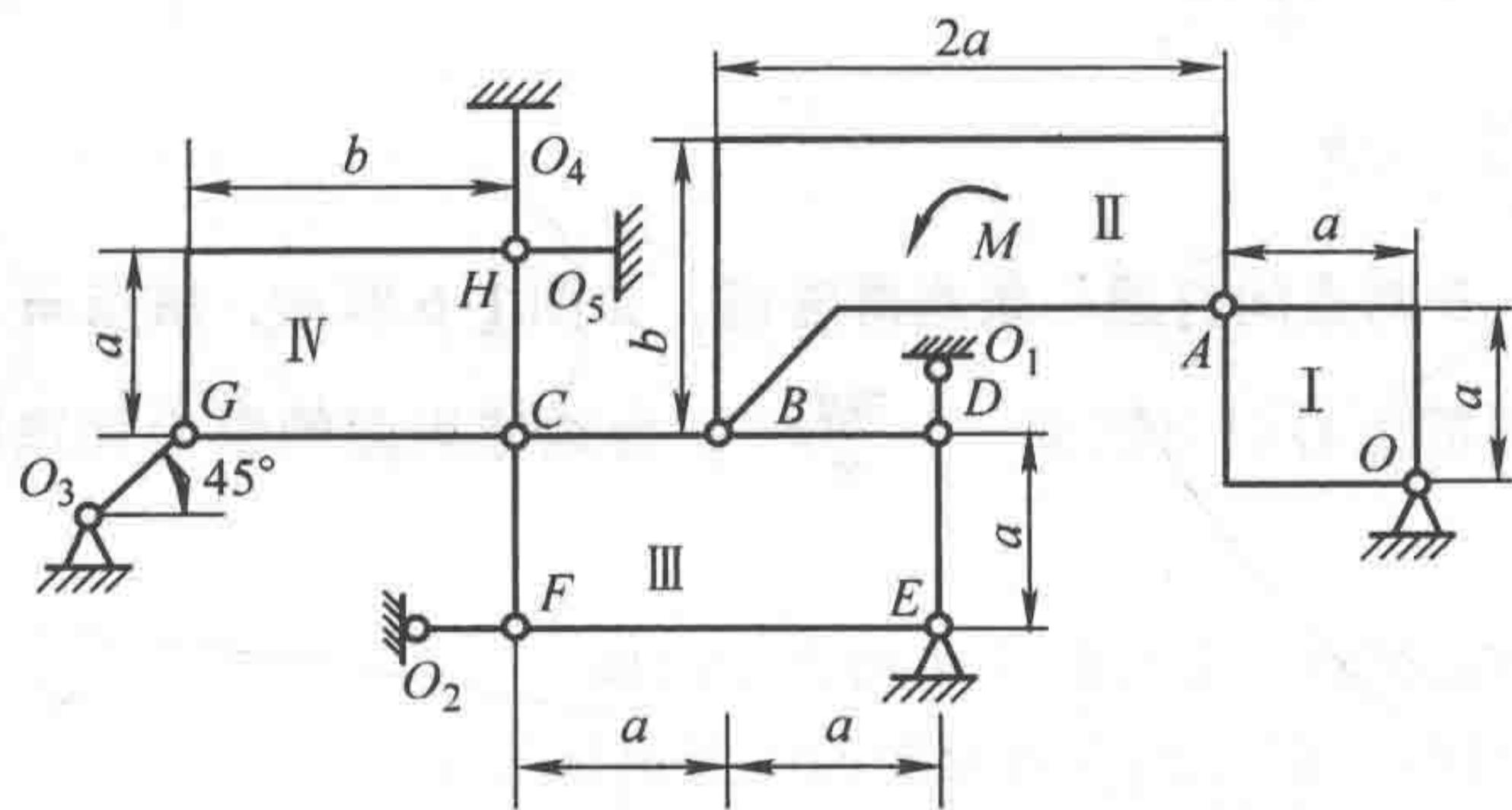


图 1-1

2. V 形槽中放置一个半径为  $r$  的匀质圆柱, 如图 1-2 所示, 槽边与水平夹角为  $\alpha$ , 接触处的摩擦因数  $\mu = \tan\varphi_m$ , 圆柱重  $G$ 。设转动圆柱所需的最小力偶矩为  $M_m$ , 则当  $\varphi_m < \alpha$  时,  $M_m =$ \_\_\_\_\_; 当  $\varphi_m \geq \alpha$  时,  $M_m =$ \_\_\_\_\_。

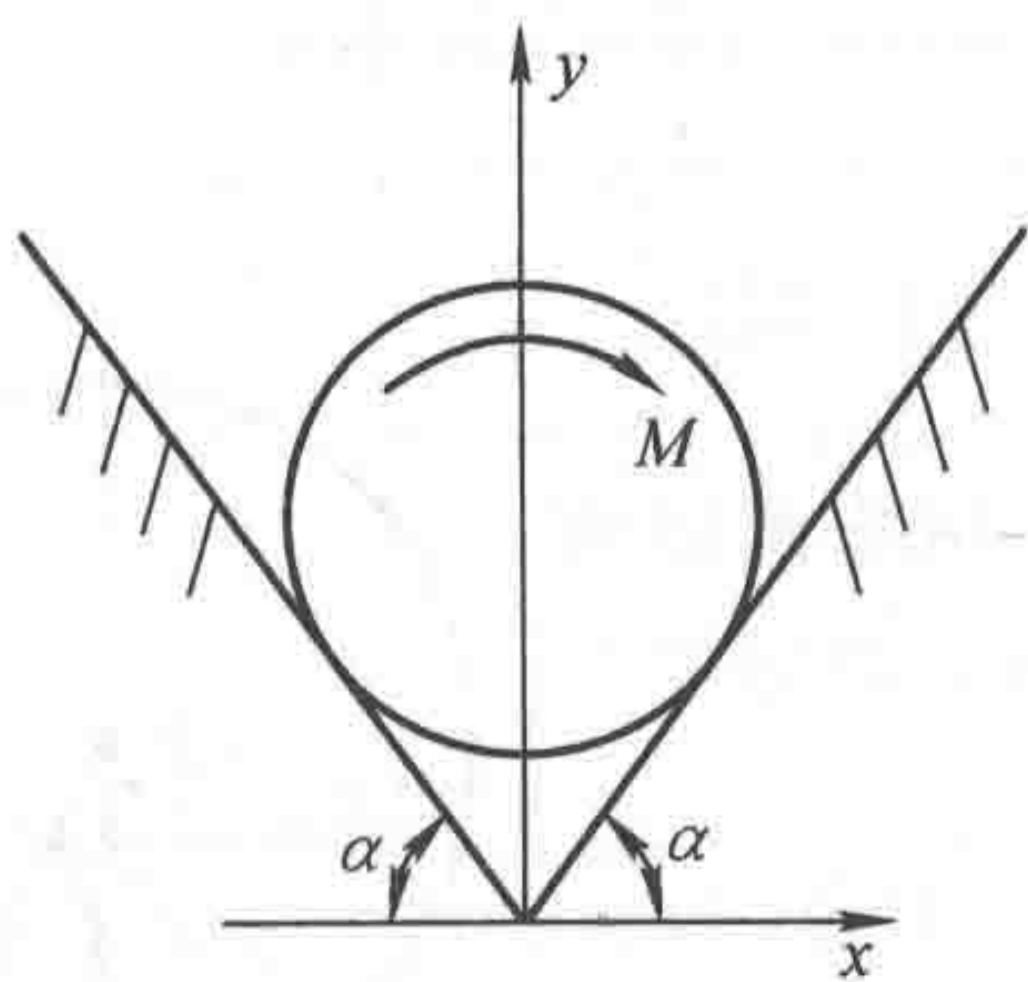


图 1-2

3. 如图 1-3 所示, 曲柄摇杆机构中, 曲柄  $OA$  长 5cm, 以匀角速度  $\omega = 10\text{rad/s}$  转动, 带动连杆  $AD$  及摇杆  $O_1C$  运动,  $\overline{AD} = 20\text{cm}$ ,  $B$  为  $AD$  的中点。在图示位置时,  $OA$  与水平线垂直,  $O_1C$  与水平线成  $60^\circ$  角。则在此瞬时摇杆  $O_1C$  的角速度为\_\_\_\_\_, 角加速度为\_\_\_\_\_; 滑块  $D$  的速度大小为\_\_\_\_\_, 加速度大小为\_\_\_\_\_。

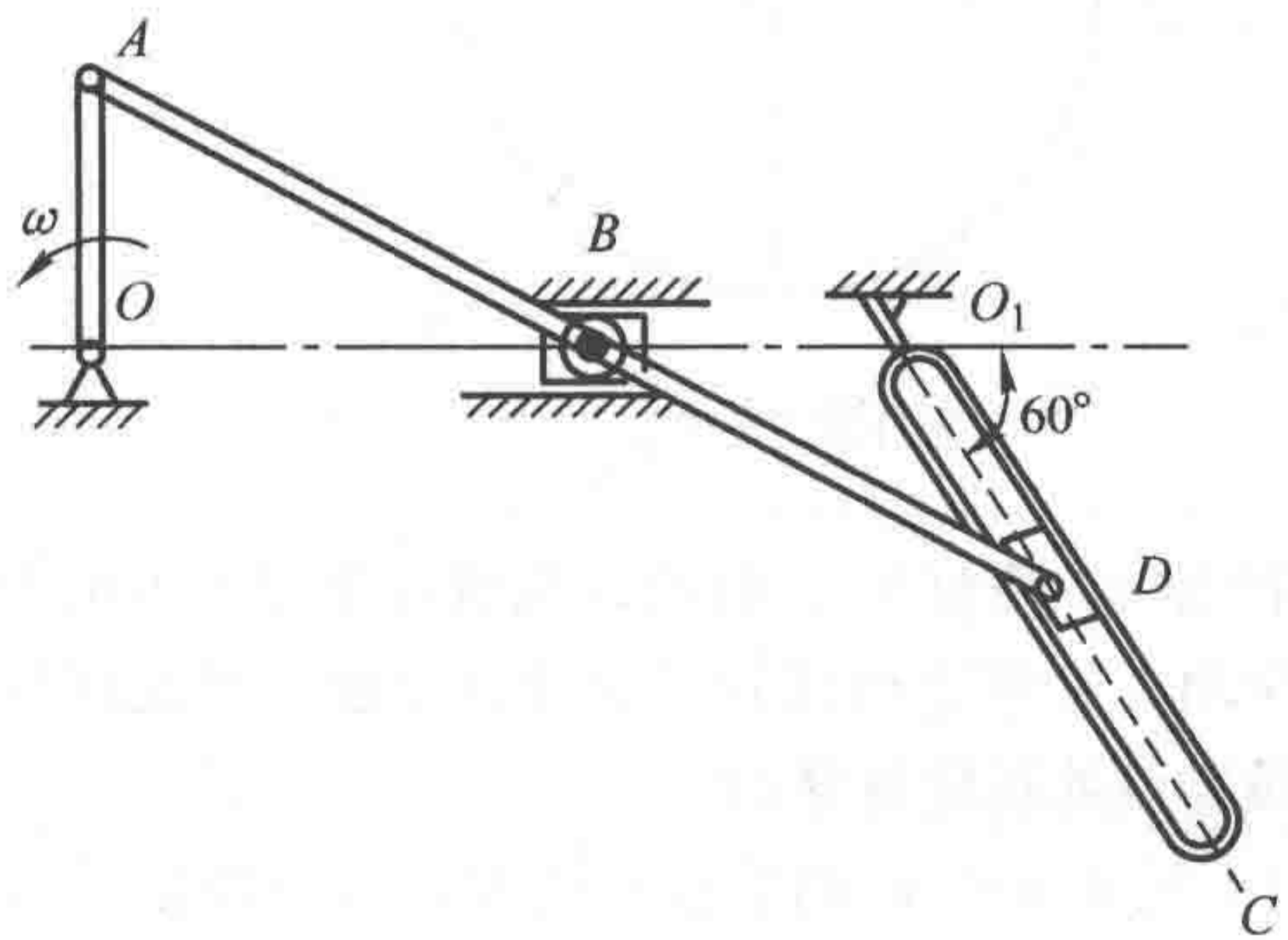


图 1-3

4. 设一动点在平面内运动, 其切向和法向加速度都是非零的常量, 求动点的运动轨迹。

5. 如图 1-4 所示, 质量为  $m$  的杆  $AB$  斜靠在铅垂墙上,  $A$  端有一小虫, 其质量也为  $m$ 。墙和地面都是光滑的。原系统静止, 今小虫突然以相对速度  $u$  (常量) 沿杆向  $B$  爬动。试写出杆与地面夹角  $\alpha$  所满足的微分方程及初始条件。

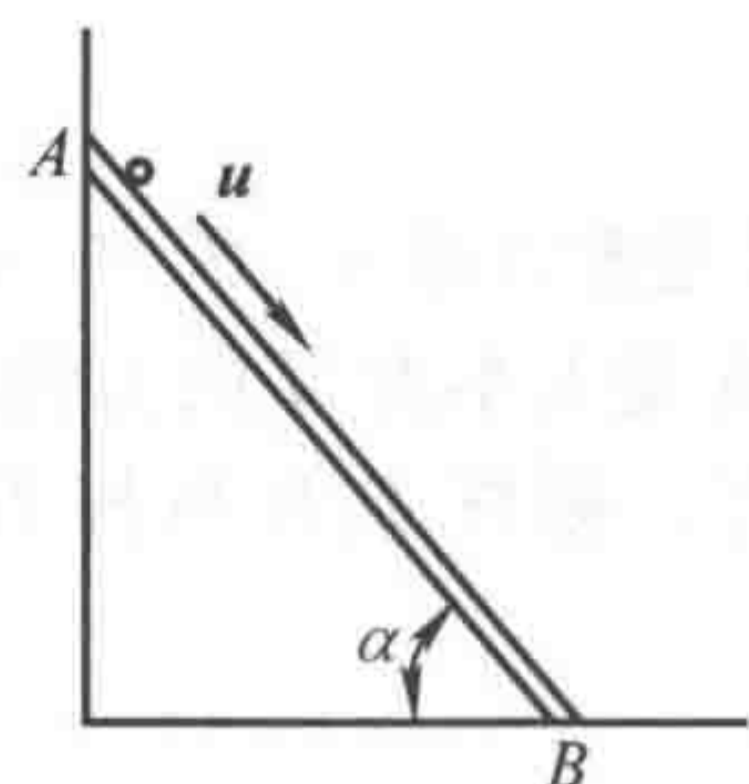


图 1-4

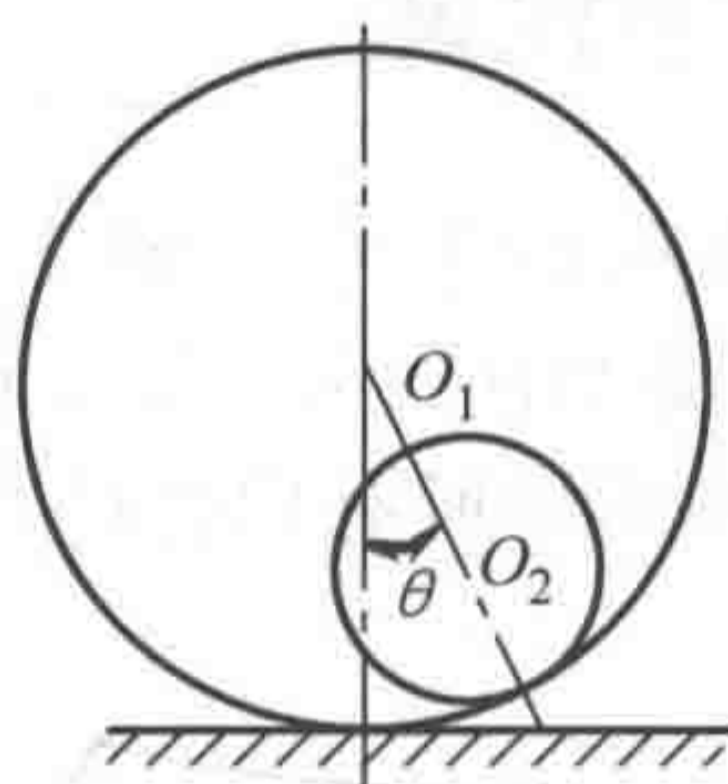


图 1-5

7. 若在地球表面上  $A$ 、 $B$  两点间打通一条光滑隧道, 如图 1-6 所示, 质点  $m$  从  $A$  点由静止开始, 借地心引力落入隧道。在地球内部地心引力取  $F = -\frac{mg}{R}r$ ,  $g$  为地球表面的重力加速度,  $R$  为地球半径, 不计地球自转的影响。

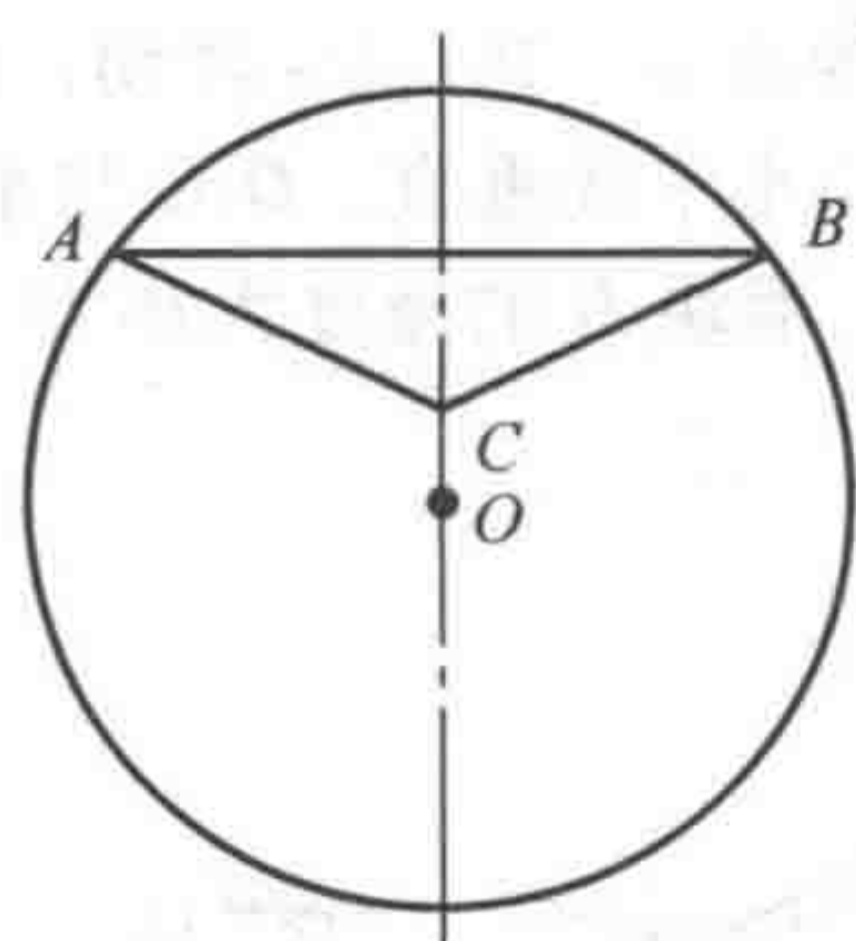


图 1-6

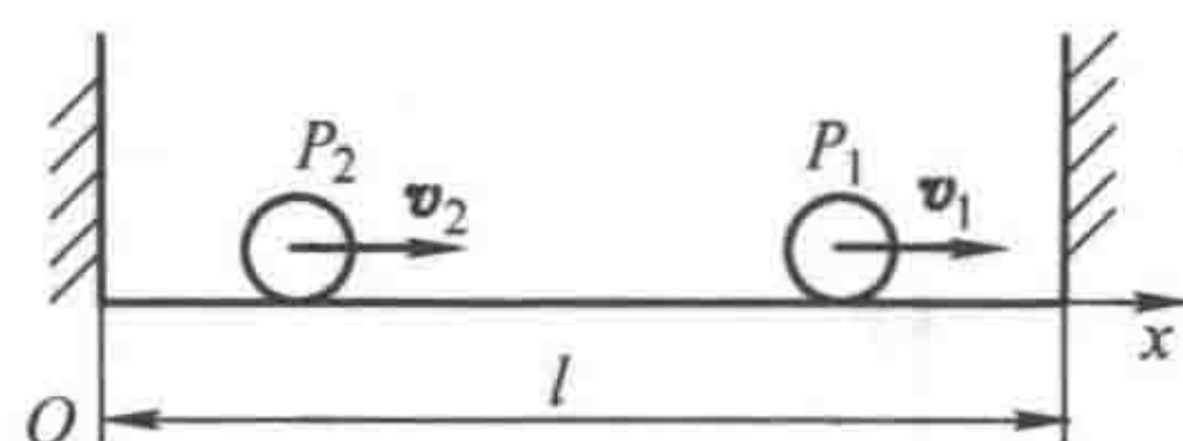


图 1-7

- (1) 当  $A$ 、 $B$  间隧道为直线时, 求质点从  $A$  到  $B$  的时间。
- (2) 当隧道为  $ACB$  折线时, 求  $A$  到  $B$  的最短时间及最优折线。
- (3) 求  $A$  到  $B$  的最短时间及最优隧道的形状。

8. 质量均为  $m$  的两质点  $P_1$ 、 $P_2$ , 沿一光滑直线  $Ox$  运动, 其位置在距离为  $l$  的两壁之间, 如图 1-7 所示, 设质点之间、质点和墙壁之间的碰撞都是完全弹性的。问在什么条件下, 经过一段时间后, 两质点的位置和速度同时回到初始状态? 若发生两质点同时与一侧壁碰撞的三体碰撞时, 则视为无限短时间内相继发生的两体碰撞。

9. 半径为  $a$ 、质量为  $m$  的均匀圆球在半径为  $b$  的完全粗糙的另一固定圆球的外表面上滚动, 试建立动球的运动微分方程。当动球转速超过多少时, 动球可以在定球的最高点处稳定地转动?

10. 内半径  $R = 30\text{cm}$  的空心圆柱  $O$ , 水平固定放置。质量为  $m'$ , 半径为  $r = 10\text{cm}$  的均匀圆环  $O_1$ , 可以在圆柱内作纯滚动。质量为  $m$  的质点  $A$  固连在圆环  $O_1$  的边缘上。当圆环  $O_1$  处于圆柱  $O$  的最低位置时, 质点  $A$  处于圆环的最高位置。设  $OO_1$  与向下铅垂线的夹角为  $\theta$  (图 1-8)。则: 当  $m' = 2m$  时, 圆环的稳定的平

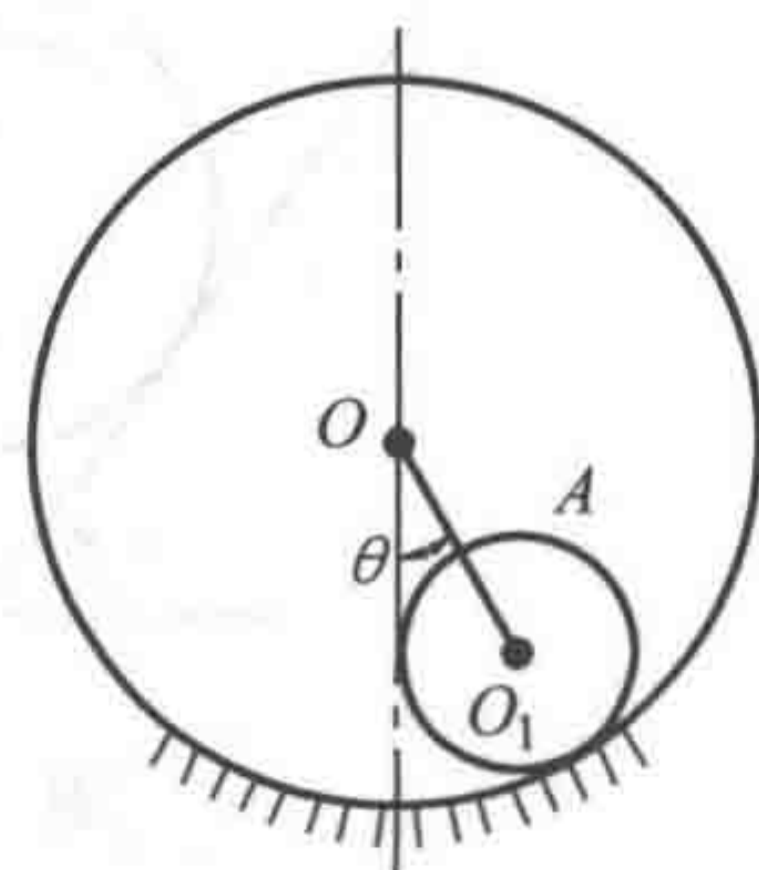


图 1-8

衡位置为  $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$  rad, 圆环在此平衡位置附近微振动的周期为  $\underline{\hspace{2cm}}$  s; 当  $m = 2m'$  时, 圆环的稳定的平衡位置为  $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$  rad, 圆环在此平衡位置附近微振动的周期为  $\underline{\hspace{2cm}}$  s。(取重力加速度  $g = 980\text{cm/s}^2$ )

## 1.2 材料力学试题

1. 试证明图 1-9a 所示等截面均质薄圆环在其平面内承受任意自相平衡力系时, 其弯矩图的总面积必为零。此结论对于图 1-9b 所示的带铰圆环是否正确?
2. 如图 1-10 所示, 直径为  $d$  的均质圆盘, 沿直径两端承受一对大小相等方向相反的集中力  $F$  作用, 材料的弹性模量为  $E$ , 泊松比为  $\nu$ , 试求圆盘变形后的面积改变率  $\Delta A/A$ 。

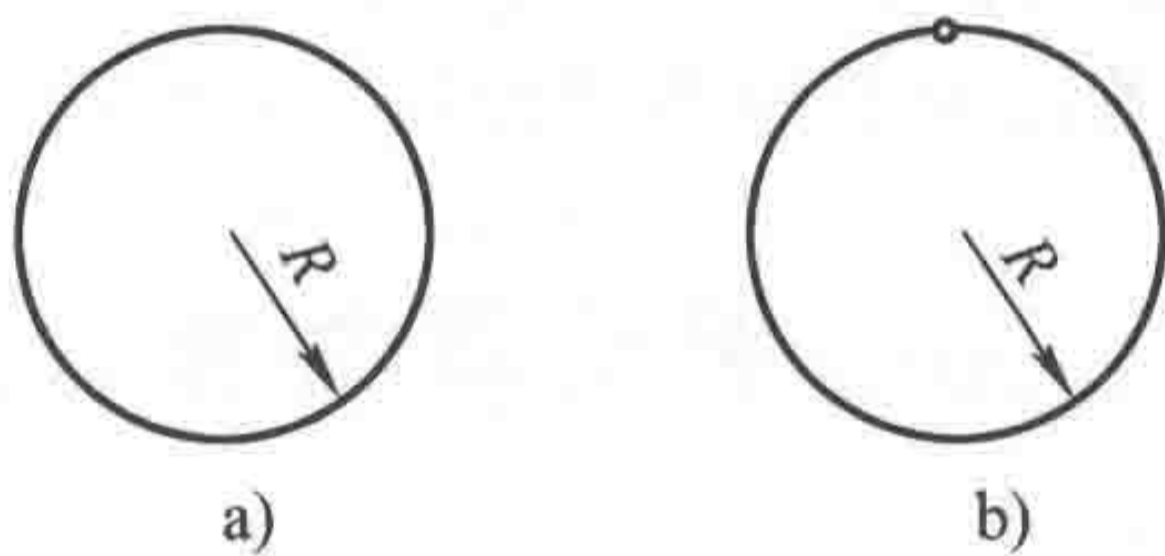


图 1-9

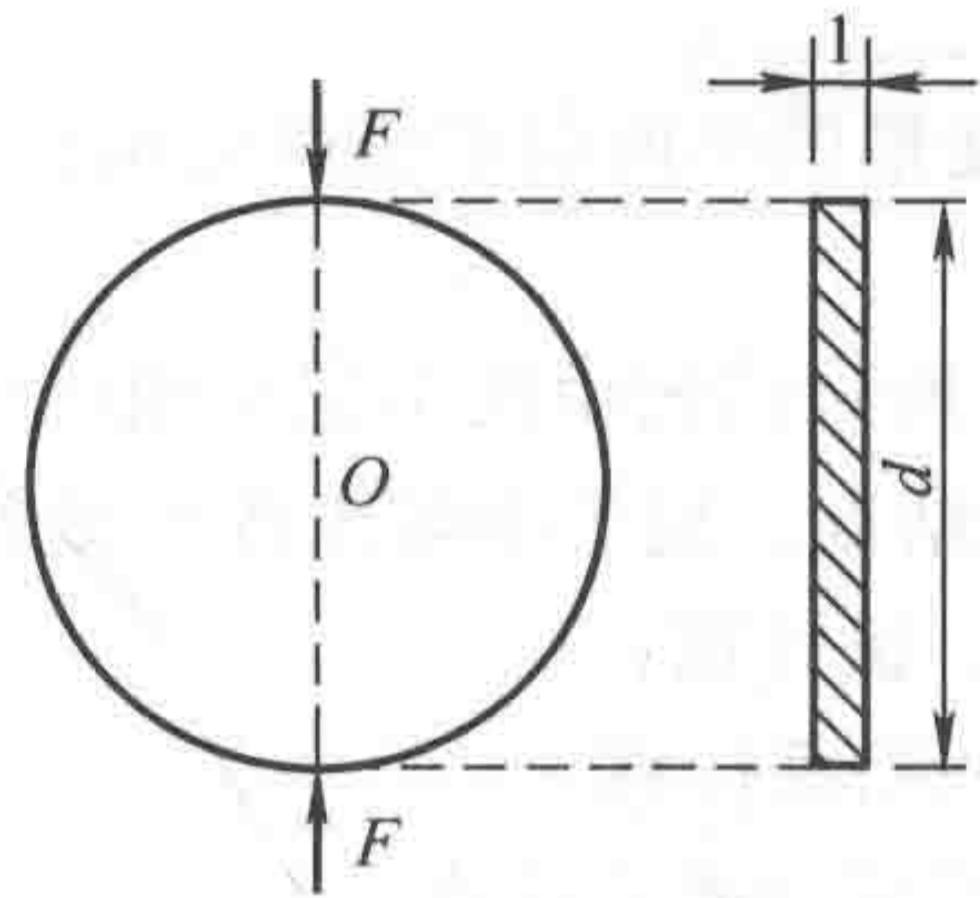


图 1-10

3. 相互平行的 I 及 II 两轴长度均为  $l$ , B 端固定, A 端刚性固结于刚性平板上, 今在刚性平板上施加一力偶, 其力偶矩为  $M_0$ , 投影图如图 1-11 所示, 已知两轴的抗扭刚度分别为  $GI_{P1}$  及  $GI_{P2}$ , 抗弯刚度分别为  $EI_1$  及  $EI_2$ , 在小变形条件下刚性板位移保持在铅垂面内, 自重可以略去, 试求刚性板的扭转角  $\varphi$  的表达式。

4. 已知某位移传感器其测量原理如图 1-12 所示, 试绘出应变片全桥接线图, 并建立输出应变与位移的关系 (即  $\varepsilon_{\text{仪}} - \delta$  关系) 式。已知线性受拉弹簧 AB 的端点 A 处位移为待测位移, 弹簧刚度系数为  $k$ ; 悬臂梁 BC (弹性元件) 长度为  $l$ , 宽度为  $b$ , 厚度为  $t$ , 材料的弹性模量为  $E$ , 泊松比为  $\nu$ ; 应变片标距距中心距固定端 C 端的距离为  $l_1$ 。(应变片标距与  $l$ 、 $l_1$  比较很小, 可忽略不计)

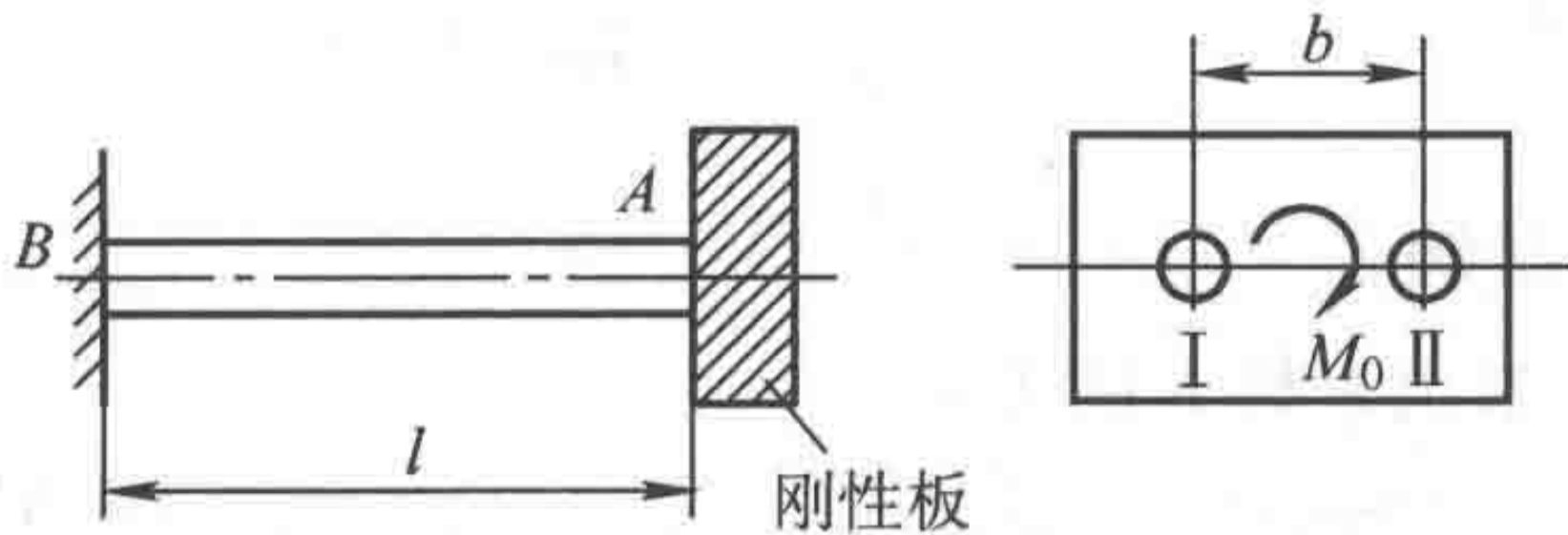


图 1-11

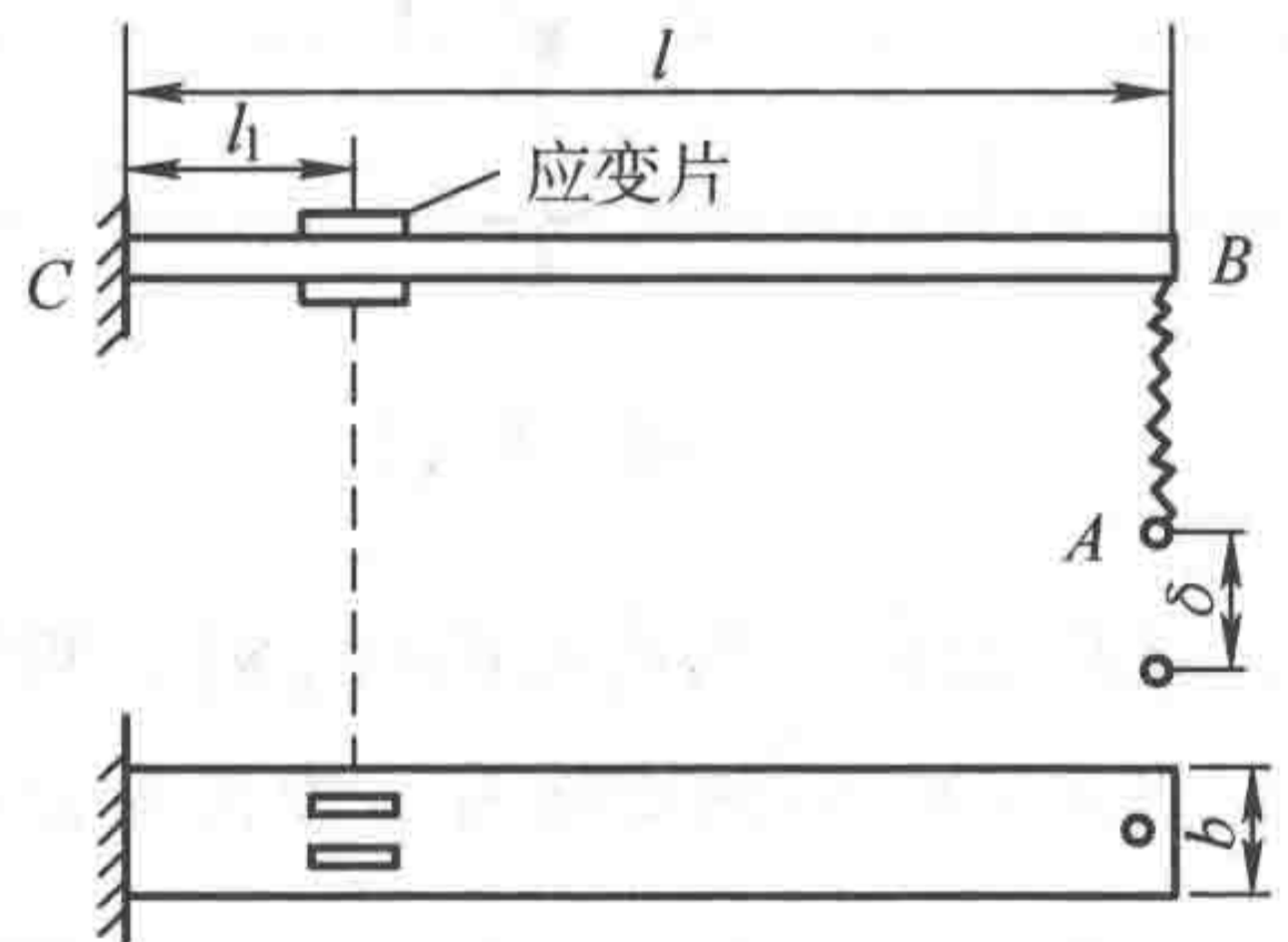


图 1-12

5. 矩形截面混凝土简支梁 (不加钢筋) 如图 1-13a 所示, 截面高为  $h$ , 宽为  $1$ 。设材料的简化拉伸曲线如图 1-13b 所示, 已知  $\alpha = \varepsilon_u / \varepsilon_f = 3.5$ 。试求:

(1) 当此梁最大弯矩截面的最大拉应变  $\varepsilon_t$  超过  $\varepsilon_f$  时, 弯矩的表达式 (即求  $M = f(\sigma_t, \eta, \theta)$ )。其中

$$\eta = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_f}, \quad \theta = \frac{1 - \sqrt{\beta}}{1 - \beta}, \quad \beta = \frac{1 + \lambda}{\eta} - \frac{\lambda}{\eta^2}, \quad \lambda = \frac{\alpha - \eta}{\alpha - 1}$$

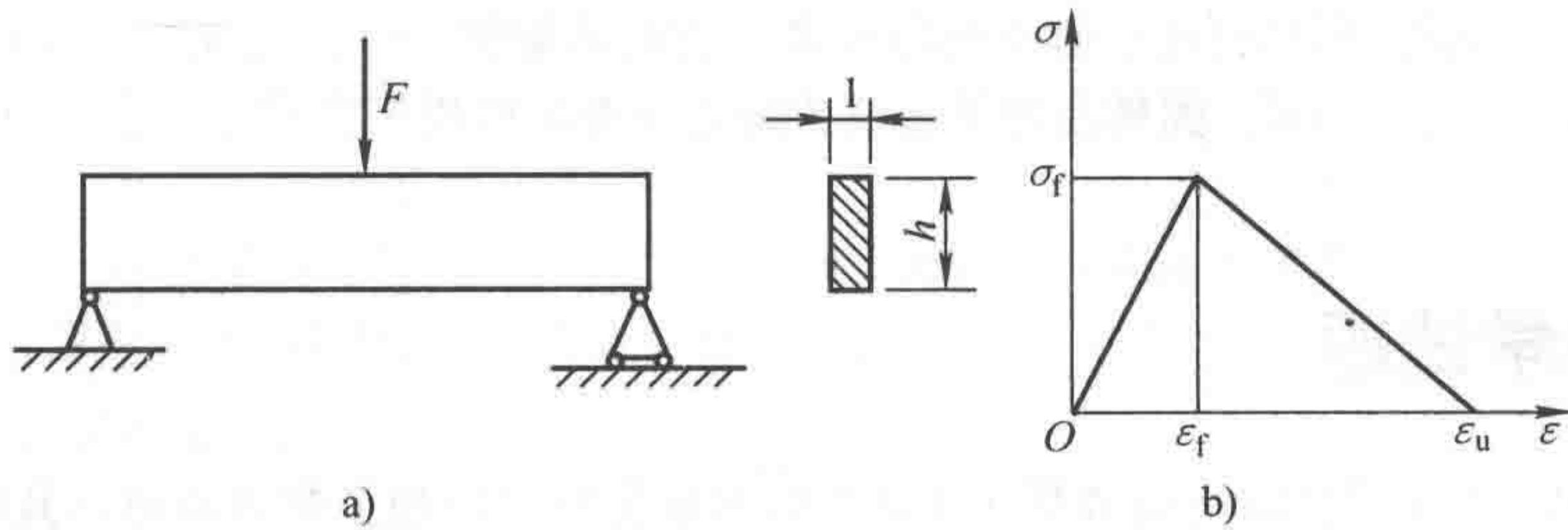


图 1-13

(2) 当  $\eta$  为多大时, 截面弯矩将达到极限值? 此时极限弯矩比按材料力学线弹性公式所得数值增大多少倍?

说明: ①变形的平面假定仍然适用; ②材料受压区为线弹性, 不考虑可能出现的塑性状态; ③不考虑剪力的影响。

6. 图 1-14 所示结构由两个完全相同的等边直角刚架所组成,  $A$ 、 $C$ 、 $E$  为位于同一水平线上的三个铰链,  $B$ 、 $D$  为刚结点。现于中间铰链  $C$  处作用一铅垂力  $F$ , 若已知材料为线弹性, 各杆抗弯刚度均相同, 其值  $EI = \text{常数}$ 。试计算:

- (1)  $C$  点的铅垂位移。
- (2) 结构的应变能表达式。

说明: 计算刚架的应变能时, 略去轴力及剪切的影响。

7. 图 1-15 所示的两根悬臂梁, 长均为  $l$ , 初始间隙为  $\delta = dl$ 。上梁的抗弯刚度为  $E_1 I_1$ , 下梁的抗弯刚度为  $E_2 I_2 = k E_1 I_1$ 。在离上梁固定端  $b = tl$  处作用一集中力  $F$ , 当  $F$  从零开始增加后, 开始两梁只在一点接触, 随后两梁将在一段区域内接触。设将  $F$  表成无量纲形式  $F = \bar{F} \frac{E_1 I_1}{l^2}$ , 试求下列问题 (以上  $d$ 、 $k$ 、 $t$  均为比例因子):

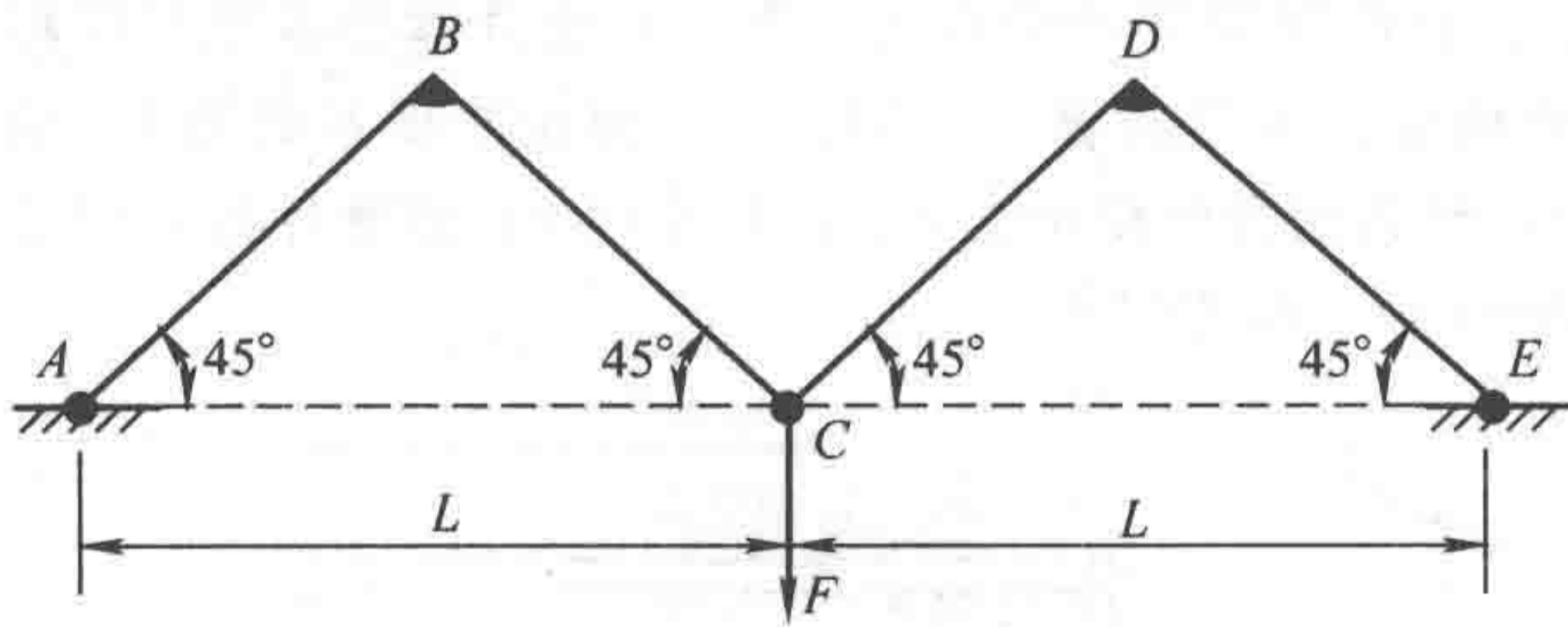


图 1-14

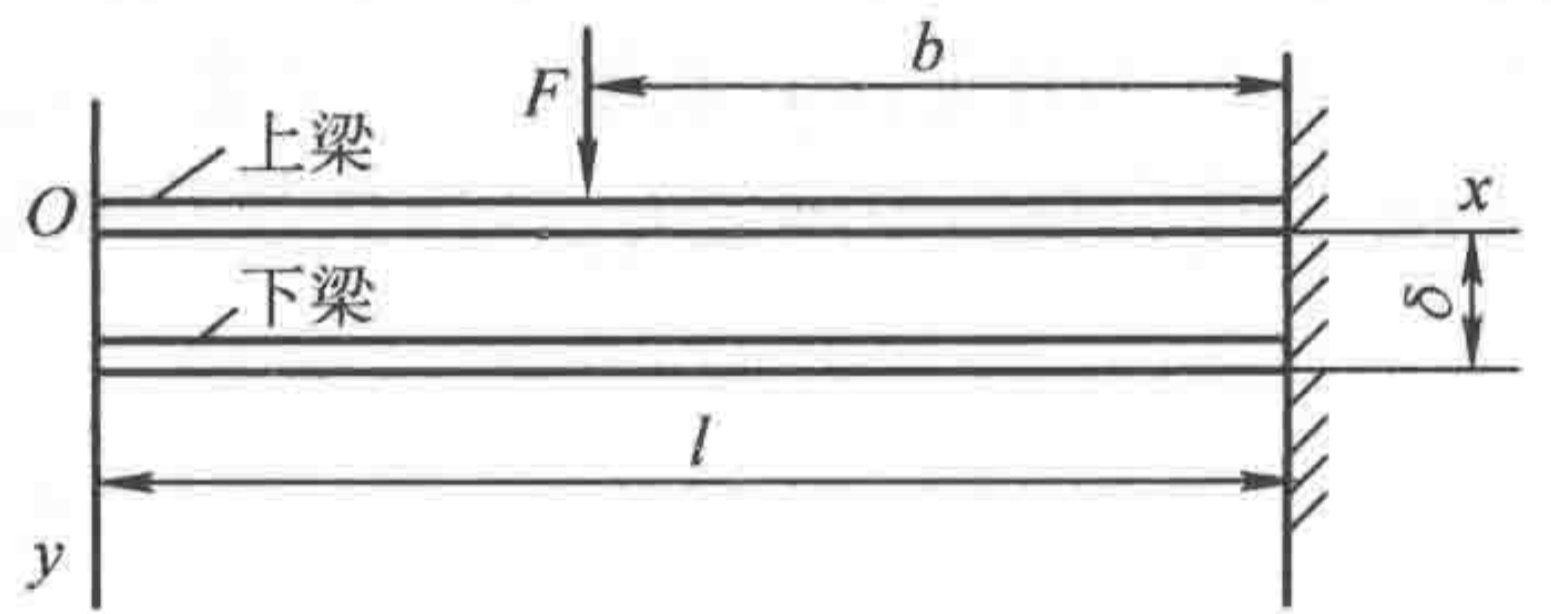


图 1-15

- (1) 求  $\bar{F}_1$  及  $\bar{F}_2$ , 当  $\bar{F}_1 \leq F \leq \bar{F}_2$  时, 两梁只在一点接触。
- (2) 当  $\bar{F} > \bar{F}_2$  后两梁将有一段长为  $\xi l$  的接触区, 求出  $\xi$  与  $\bar{F}$  的关系。

(3) 证明接触区内无分布约束力, 而只在接触区与非接触区交界处有一集中约束力  $F_N = \bar{F}_N \frac{E_1 I_1}{l^2}$ , 试给出  $\bar{F}_N$  的表达式。

8. 等截面直杆  $AB$ , 长为  $l$ , 两端自由, 截面为开口 8 字形薄壁截面, 其截面中心线如图 1-16b 中  $ND-CD'N'$  所示, 缺口处  $F$  与  $F'$  相距为无限小, 因而截面中线可视为由两个开口整圆周 (半径为  $R$ ) 在  $C$  处相接而成, 壁厚为  $t$  ( $t \ll R \ll l$ )。在杆的两端截面上  $C$  点处各作用有轴向集中力  $F$ , 试求杆中间截面  $M$  ( $x = \frac{l}{2}$ ) 上  $C$  点处的应力表达式。

9. 已知图 1-17a 所示的平面刚架, A 端固定, B 端为辊轴支座, C 为刚结点, 当 C 点受铅垂力  $F$  作用时,
- (1) 试求失稳时特征方程的形式及临界载荷值。
- (2) 若 B 端改为固定铰支座时, 如图 1-17b 所示, 其失稳模式与图 1-17a 有何不同? 其临界载荷值可增加多少?

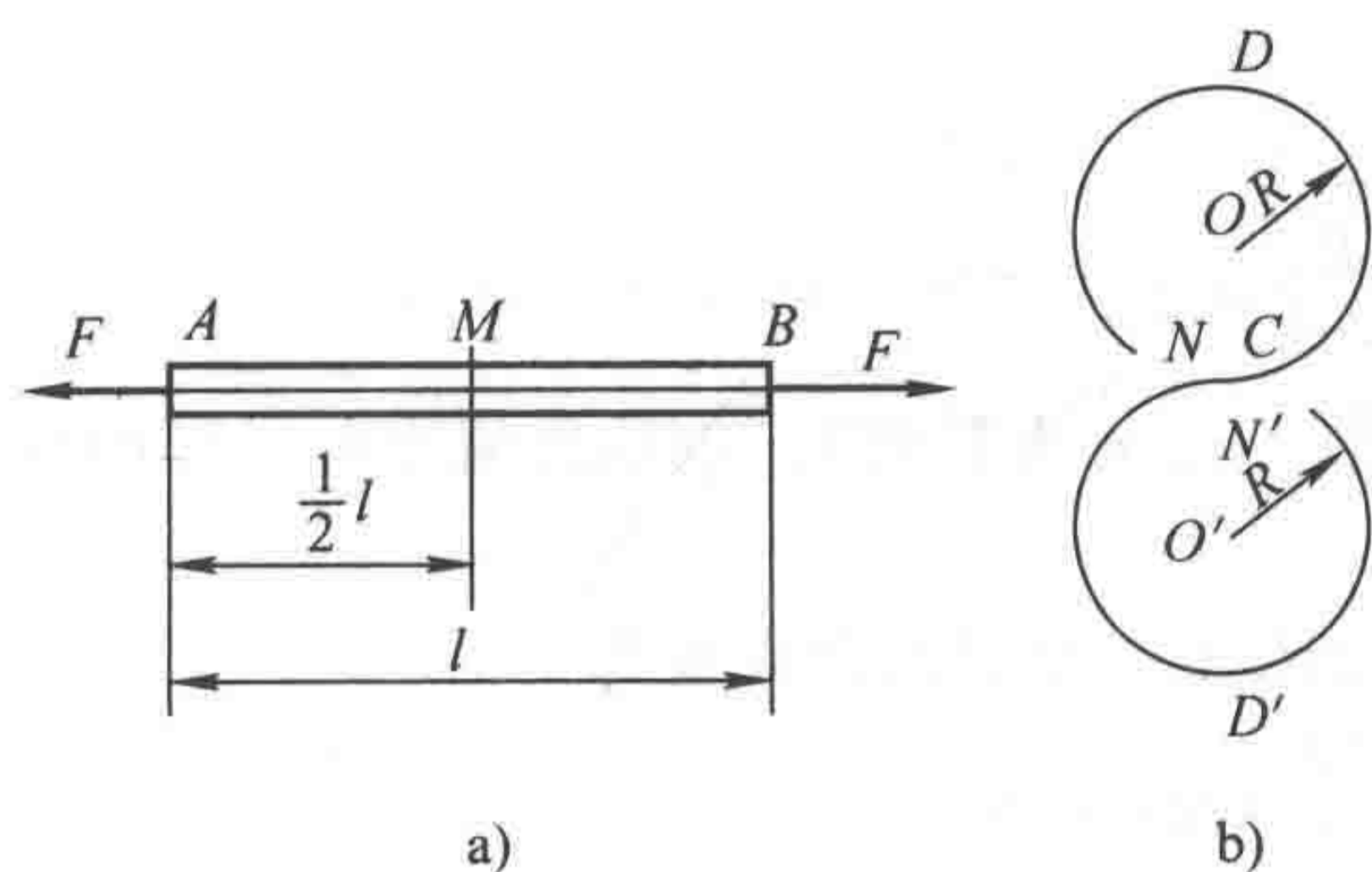


图 1-16

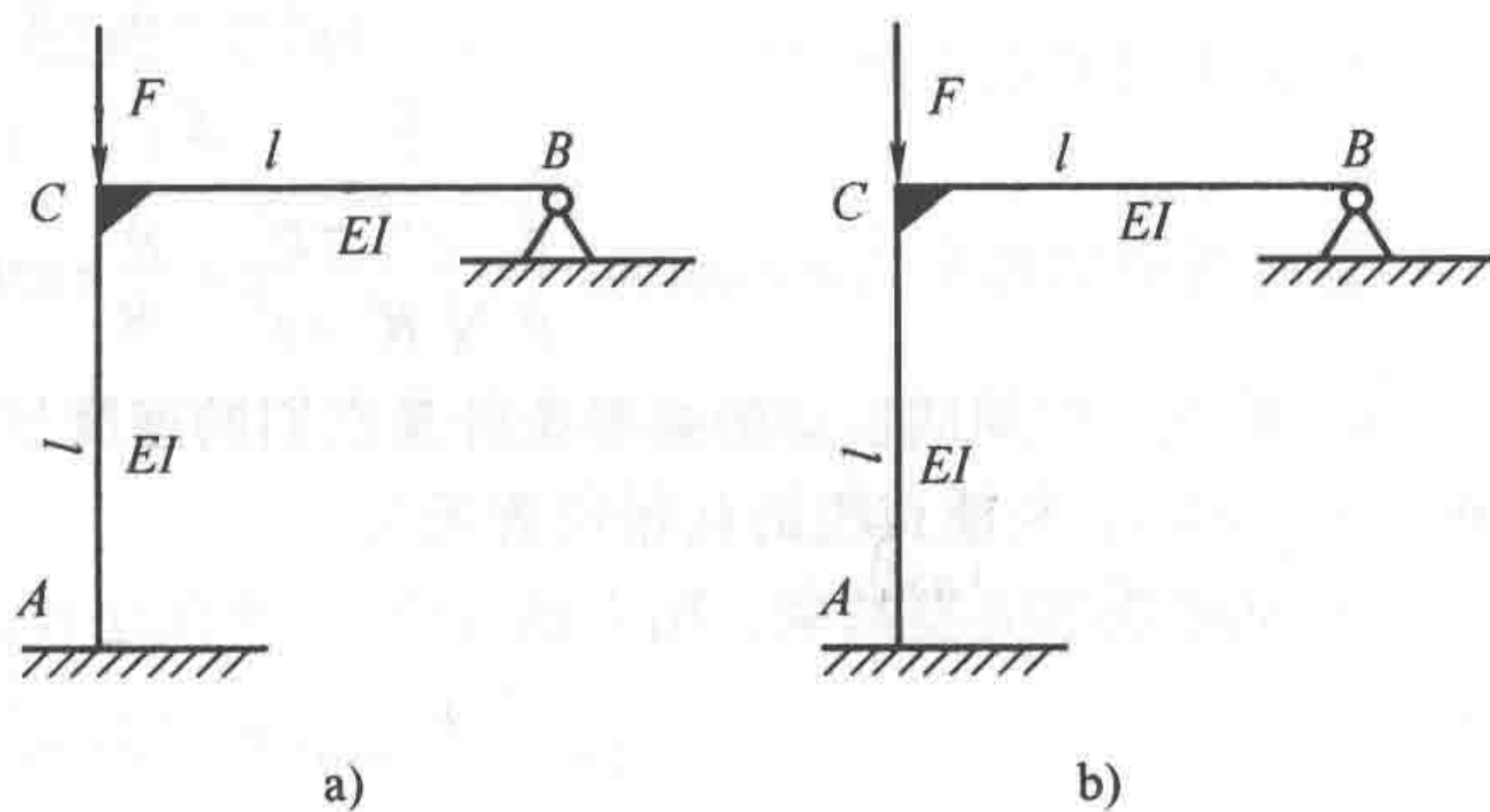


图 1-17

### 1.3 理论力学试题参考答案及详细解答

#### 1.3.1 参考答案

1. 杆  $O_4H$  与杆  $O_5H$  所受内力之比为 0.5。

$$2. M_m = \begin{cases} \frac{Gr \sin 2\varphi_m}{2 \cos \alpha}, & \varphi_m < \alpha \\ Gr \sin \alpha, & \varphi_m \geq \alpha \end{cases}$$

3. 此瞬时摇杆  $O_1C$  的角速度为  $\omega_2 = 7.50 \text{ rad/s}$ , 角加速度为  $\varepsilon_2 = 65.0 \text{ rad/s}^2$ ; 滑块  $D$  的速度大小为  $v_D = 50 \text{ cm/s}$ , 加速度大小为  $a_D = 764 \text{ cm/s}^2$ 。

4. 动点的轨迹为对数螺线:  $r = Ae^{2k\varphi}$ , 其中  $A, k$  为与初始条件有关的常数。

5. 若初始时  $\alpha \leq \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ , 运动微分方程为

$$\left[ u^2 t^2 - 2utl \cos^2 \alpha + \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \alpha \right) l^2 \right] \ddot{\alpha} + (2ut - l) l \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha + 2(ut - l \cos^2 \alpha) u \dot{\alpha} + \left( ut - \frac{3}{2}l \right) g \cos \alpha = 0$$

- 若初始时  $\alpha \geq \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ , 则运动微分方程为

$$\left[ u^2 t^2 (1 + \sin^2 \alpha) - utl \cos^2 \alpha + \frac{l^2}{12} (5 + 3 \sin^2 \alpha) \right] \ddot{\alpha} + \frac{1}{4} (2ut + l)^2 \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha + [2ut(1 + \sin^2 \alpha) - l \cos^2 \alpha] u \dot{\alpha} = 0$$

6. 运动过程中  $\dot{\theta}$  与  $\theta$  的关系式为  $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{b-a} \frac{2(m+m')}{2m'+m \sin^2 \theta} (\cos \theta - \cos \beta)$ 。

7. (1) 当 A、B 间隧道为直线时, 质点从 A 到 B 的时间约为 42.2 min。

(2) 当隧道为  $ACB$  折线时,  $A$  到  $B$  的最短时间为  $t_{\min} = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \arccos \frac{1 - \sin\theta_A}{1 + \sin\theta_A}$ , 最优折线的夹角  $\angle BAC$  为  $\theta_m = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_A}{2}$ 。

(3)  $A$  到  $B$  的最短时间为  $t_{\min} = 2\sqrt{\frac{\theta_B(\pi - \theta_B)R}{g}}$ 。

最优隧道的形状为  $\theta = \arctan \frac{R}{\rho} \sqrt{\frac{r^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}} - \frac{\rho}{R} \arctan \sqrt{\frac{r^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}}$ 。

8. 质点组作周期运动的必要条件是它们的速度比为有理数 ( $m, n$  为整数), 包括比值为  $\infty$  ( $v_1 = 0$ ) 和  $0$  ( $v_2 = 0$ ), 与质点组的初始位置无关。

9. 动球受非完整约束, 用卡尔丹角  $\alpha, \beta$  描述动球质心  $C$  的位置。运动微分方程为

$$7(a+b)(\ddot{\alpha}\cos\beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta) + 2a\omega_3\dot{\beta} - 5g\sin\alpha = 0$$

$$7(a+b)(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta) - 2a\omega_3\dot{\alpha}\cos\beta - 5g\cos\alpha\sin\beta = 0$$

其中,  $\omega_3$  是动球角速度沿动系  $z$  方向的分量, 经分析为常量。动球在最高点自转运动的稳定条件为  $\omega_3^2 \geq 35g(a+b)/a^2$ 。

10. (1) 当  $m' = 2m > m$  时, 圆环的稳定的平衡位置为  $\theta = 0\text{rad}$ 。微振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{16r}{g}} = 2.54\text{s}$$

(2) 当  $m = 2m' > m'$  时, 圆环的稳定的平衡位置为  $\theta = \arccos \frac{3}{4}\text{rad} = 0.723\text{rad}$ 。微振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{16\left(1 + 4\cos^2\frac{3}{2}\theta\right)r}{7g}} = 1.32\text{s}$$

### 1.3.2 详细解答

1. 解: 如图 1-18 所示, 从物体 I 着手, 由二力平衡条件, I 受力在  $OA$  方向上。

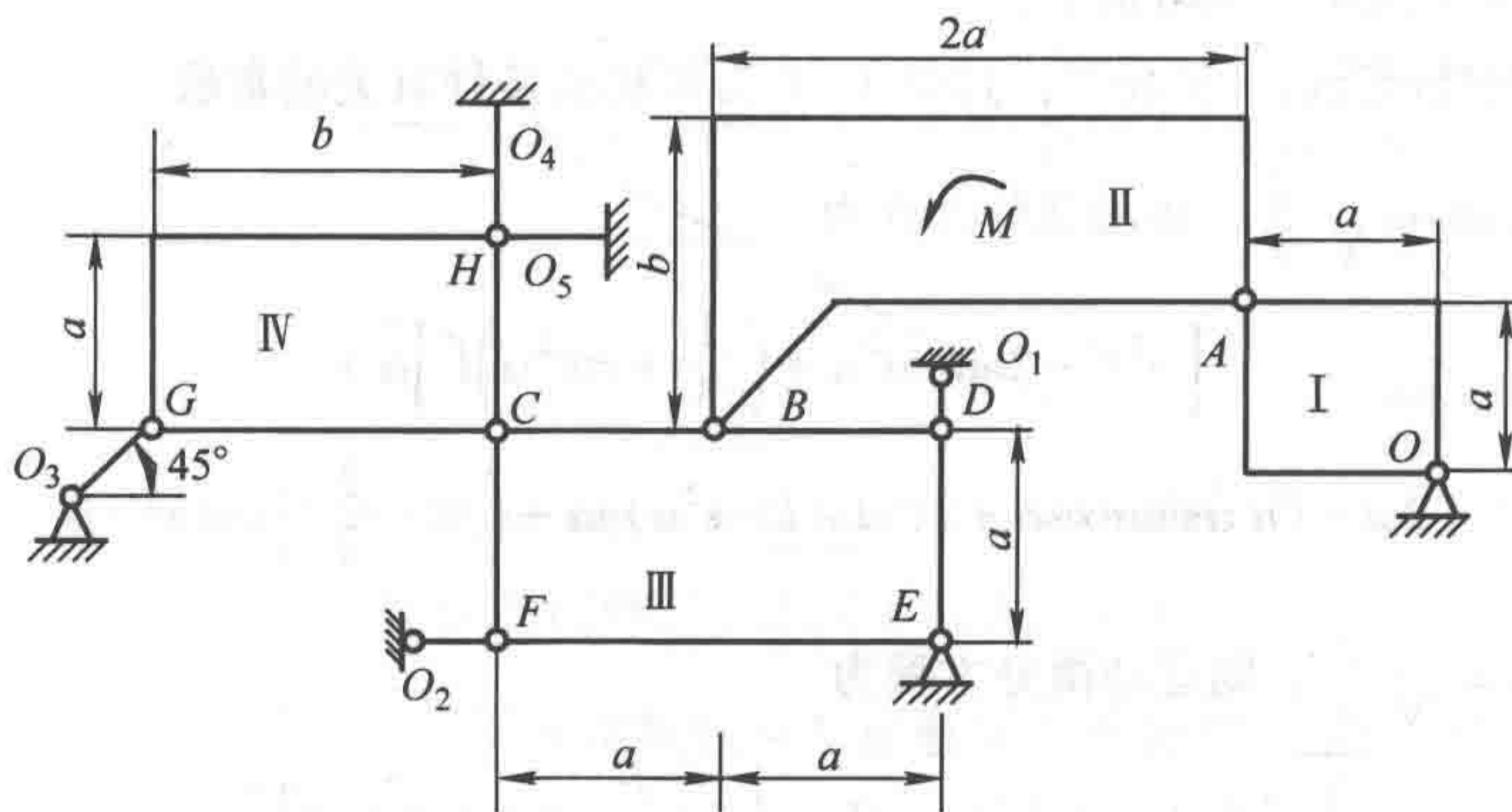


图 1-18

以 II 为研究对象, 在  $A$  点受力  $F_A$ , 方向沿  $AO$  方向。II 受两个力和一个力偶的作用, 平衡时  $B$  点受力  $F_B = F_A$ , 方向沿  $EB$ 。

以 III 为研究对象, 受五个力作用, 但由于  $B, D, E, F$  四点受力均汇交于  $E$ , 故  $C$  点的力  $F_C$  沿  $CE$  方向。



以IV为研究对象,受三个力作用。因杆 $O_3G$ 的内力 $F_G$ 不为零,由三力平衡条件, $F_G$ 和 $F_C$ 交于K点。过K点作 $KT \perp GC$ (图1-19)。由几何关系,有

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}} = 1/2$$

$$\overline{KT} + \overline{KT}/\tan \alpha = \overline{GC} = b, \quad \overline{KT} = b/3$$

所以

$$F_4/F_5 = \tan \varphi = (\overline{CH} - \overline{KT})/\overline{CT} = \frac{(a - b/3)}{2b/3} = 0.5$$

即杆 $O_4H$ 与杆 $O_5H$ 所受内力之比为0.5。

2. 解:如图1-20所示,临界状态时平衡方程为

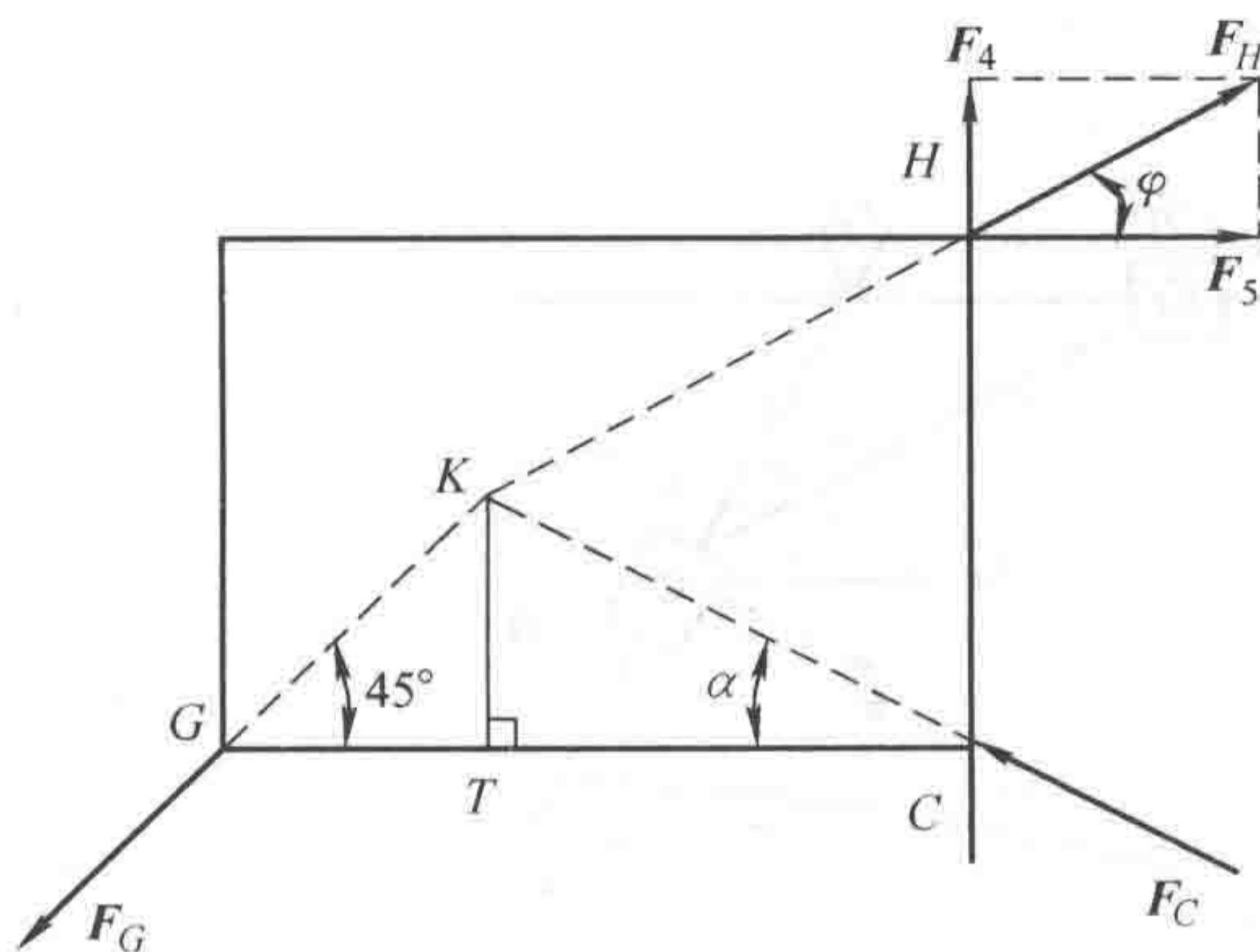


图 1-19

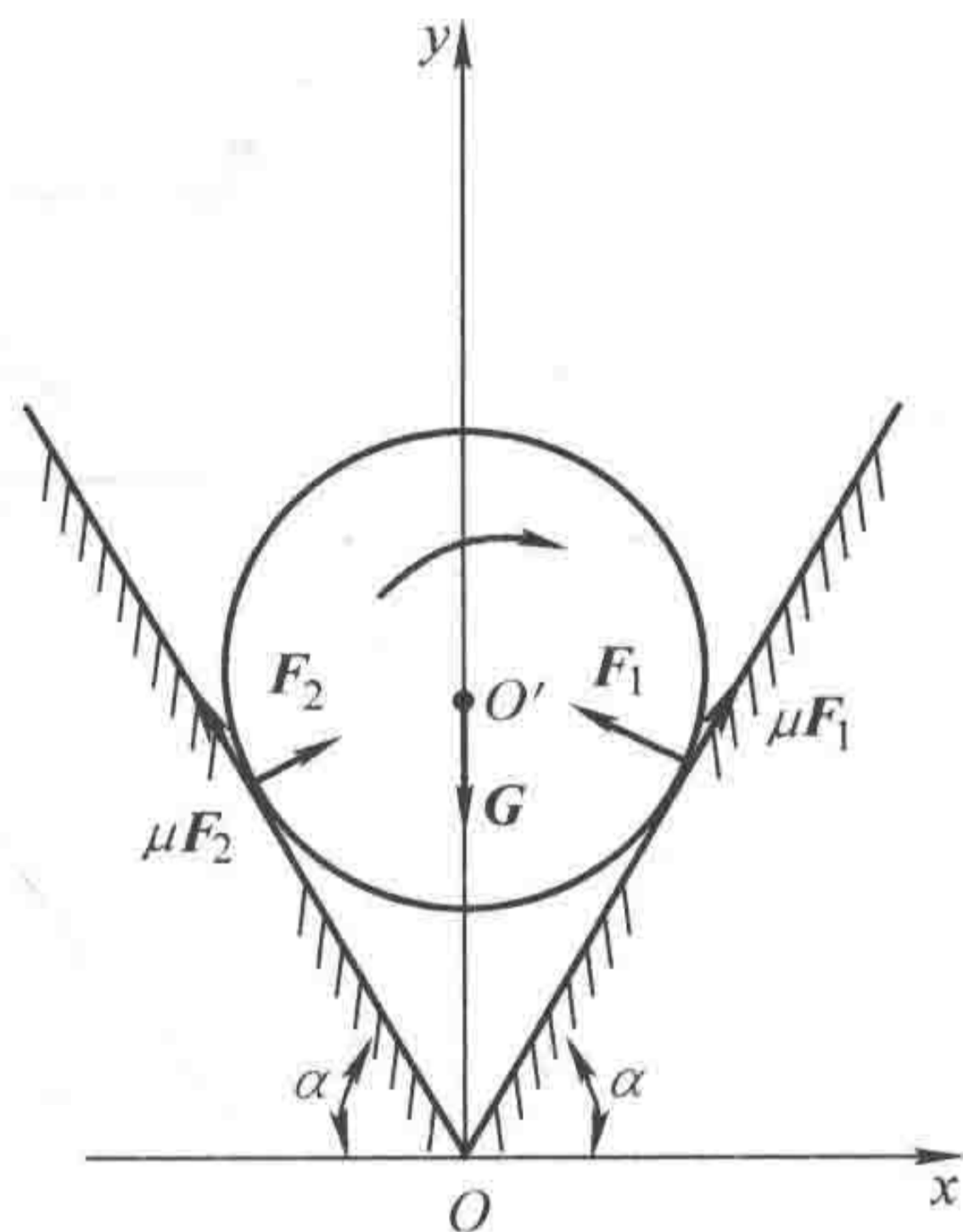


图 1-20

$$\sum F_x = 0, \mu(F_{N_1} + F_{N_2}) \cos \alpha - (F_{N_1} - F_{N_2}) \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \mu(F_{N_1} - F_{N_2}) \sin \alpha + (F_{N_1} + F_{N_2}) \cos \alpha - G = 0$$

$$\sum M_{O'x} = 0, \mu(F_{N_1} + F_{N_2})r - M_m = 0$$

由此可得

$$F_{N_1} = \frac{G}{2(1+\mu^2)} \left( \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\mu}{\sin \alpha} \right)$$

$$F_{N_2} = \frac{G}{2(1+\mu^2)} \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\mu}{\sin \alpha} \right)$$

$$M_m = \frac{\mu Gr}{(1+\mu^2) \cos \alpha} = \frac{Gr \sin 2\varphi_m}{2 \cos \alpha}$$

由上面可知,当 $\tan \alpha > \mu$ ,即 $\alpha > \varphi_m$ 时, $F_{N_2} > 0$ ;而当 $\alpha \leq \varphi_m$ 时, $F_{N_2} = 0$ ,此时 $M_m = Gr \sin \alpha$ 。所以有

$$M_m = \begin{cases} \frac{Gr \sin 2\varphi_m}{2 \cos \alpha}, & \varphi_m < \alpha \\ Gr \sin \alpha, & \varphi_m \geq \alpha \end{cases}$$

注:并非摩擦因数 $\mu$ 越大( $\varphi_m$ 越大), $M_m$ 就越大。当摩擦角 $\varphi_m$ 小于 $\alpha$ 时, $M_m$ 保持常值。 $M_m$ 与 $\varphi_m$ 的关系如图1-21所示。

3. 解:设 $AD$ 、 $O_1C$ 杆的角速度分别为 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ ,角加速度分别为 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ ,方向如图1-22所示。由几何关系,此时

$$\overline{AB} = \overline{AD}/2 = 10\text{cm}, \quad \angle ABO = 30^\circ, \quad \overline{O_1D} = 10/\sqrt{3}\text{cm}$$