



2018^年 李正元·范培华

考研数学 1

数学

数学三

复习全书

- 主编 北京大学 范培华
北京大学 尤承业
北京大学 李正元

20年经典传承 百万考生推荐

名师全程亲自答疑 扫描二维码互动交流

冲刺课程 (价值199元) 免费赠送

双色印刷 重点突出



微信公众号



赠送 《全书习题全解》




2018(31)
2018年李正元·范培华考研数学①

数学

数学三

复习全书

主编 北京 大学 范培华
北京 大学 尤承业
北京 大学 李正元

 中国政法大学出版社

2017·北京

- 声 明
1. 版权所有，侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题，由出版社负责退换。

图书在版编目（C I P）数据

2018 年李正元·范培华考研数学数学复习全书. 数学三/李正元, 尤承业, 范培华主编. —北京: 中国政法大学出版社, 2017. 1

ISBN 978-7-5620-7239-3

I. ①2… II. ①李… ②尤… ③范… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 312792 号

出版者 中国政法大学出版社
地 址 北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址 北京 100088 信箱 8034 分箱 邮编 100088
网 址 <http://www.cuplpress.com> (网络实名: 中国政法大学出版社)
电 话 010-58908285(总编室) 58908433(编辑部) 58908334(邮购部)
承 印 保定市中画美凯印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 44.5
字 数 1210 千字
版 次 2017 年 1 月第 1 版
印 次 2017 年 1 月第 1 次印刷
定 价 67.80 元

数学学习方法与指导

(代前言)

本书自1998年出版以来,经过数次修订,凭借编写体例上的“有特色”,内容讲解、试题分析与解答上的详尽、透彻、易懂,获得了百万考生的青睐和喜爱,也得到专家同行的一致好评。2018版《考研数学复习全书》将在内容、形式方面做进一步的优化和调整,以期更高的质量和崭新的面貌呈现在广大考生面前。

一 内容上

在保持原有体例的基础上,根据不同学科的特点,进行了针对性的改进。

科目	分值	百分比
高等数学	84	56%
线性代数	33	22%
概率论与数理统计	33	22%

高等数学部分:高等数学知识体系庞大,内容分布广、散。为了考生能够抓住复习重点,我们在“考核知识要点讲解”栏目更加突出重难点的设置及讲解。

线性代数部分:本学科的特点是概念多,理论晦涩,考生在复习过程中的难点就是对很多概念理解不清。针对这一点,我们在概念的复习上做了精心的设计,帮助考生快速掌握各个概念及概念间的联系,形成一个概念链。

概率论与数理统计部分:本学科在考研真题中所占比重较小,往往被考生忽略,这部分的复习策略在于多做基础的典型的常考题型,就可以顺利拿到分数,所以我们针对考生的复习弱点,有针对性的对重点概念、公式和常考题型进行多角度讲解,以提高考生运用概念、公式以及综合分析问题的能力。

二 形式上

由于图书的篇幅有限,编者不可能面面俱到,所以有些题目和知识点,考生在看书过程无法做到完全的理解和领会。我们特意增加了“编者答疑”服务,另外还有“免费课程”等。在印刷上我们采用了“双色印刷”。

编者答疑——名师亲自负责全程答疑,考生可将问题以图片形式发至微信订阅号“李正元·范培华考研数学答疑”,获取名师点拨。

免费课程——关注微信订阅号“李正元·范培华考研数学答疑”,凭“李正

元·范培华考研系列图书附赠条码”免费获取价值199元的考研冲刺点睛班课程。

双色印刷——体例清晰，重点突出，备考更高效。

最后，为了便于考生用好复习参考书，下面就李正元·范培华考研系列图书的使用给出一个参考性的安排：

■ 第1阶段（现在至6月）

认真复习《数学复习全书》的每个章节，全面整理基本概念、公式及其定理，同时对书中的基础题目进行研习、总结。本书在编写时十分注重题型的划分，因此在复习过程中要对知识点框架及解题思路进行划分归纳。

■ 第2阶段（7月至8月）

使用《历年试题解析》刷真题，《历年试题解析》的答案解析十分详细，对每个题目都有考点分析和易错点提醒。考生通过做真题，把握真题的命题方向和重点，做到有的放矢。

■ 第3阶段（9月至10月）

查漏补缺。对于《数学复习全书》和《历年试题解析》中做错的题目，找出错误原因，确定本身存在问题的地方，是计算错误、概念问题，还是解题方法思路问题，有针对性的改善提高。

结合历年试题的每个章节对应《数学复习全书》的每个章节复习，将书中概念、公式和解题思路都圈出来，牢固掌握考查内容和解题方法。

■ 第4阶段（10月至11月）

使用《数学预测试卷》（原经典400题）进行模拟演练。做题时间完全按照研究生招生考试的要求来安排，需要注意的是模拟题的难度一般高于真题难度，解题更讲究思路技巧，考生在模拟练习时不要纠结于得分，要找到自己的不足，对照《数学复习全书》填补不足。严格按照考试时间做题，反复做预测试卷3遍。

■ 第5阶段（12月至考前）：

使用《数学最后冲刺超越135分》进行全真考试状态模拟，使自己提前进入考试状态。这个阶段需要注意的是对照《数学复习全书》中的概念、定理和公式进行勾画标记复习。

结合自身情况按照老师的指导方法学习，考研数学一定会取得好成绩。

编者
于北京

前 言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学,达到硕士学习阶段应具备的数学能力,提高考研数学应试水平,以合格的数学成绩任国家挑选,作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神,深入研究了近年来考研命题的特点及动态,并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验,编写了这本《考研数学复习全书》(经济类)及其姊妹篇《考研数学历年试题解析》、《考研数学全真模拟经典400题》等。在编写时,作者特别注重与学生的实际相结合,注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下五个部分构成:

一、知识结构网络图——编写该部分的目的主要是让考生弄清各知识点之间的相互联系,以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、内容概要与重难点提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点,以便在复习中有的放矢,提高效率。

三、考核知识要点讲解——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述,并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析,指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误,同时给出了相应的注意事项,以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

四、常考题型及其解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类,归纳总结了各种题型的解题方法,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,并能综合、灵活地解决问题。

五、题型训练——本部分精选了适量的题型训练,并附有详解。只有适量的练习才能巩固所学知识,复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,作者特优化设计与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中,以供考生选用。

特别需要强调的是,在'98北大百年校庆之际,我们北大数学系63届校友聚会于北大燕园,畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作,并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历,对各类院校的考生有广泛的接触与了解,深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习,在大家的一致建议下,由我们执笔编写了这本《考研数学复习全书》(经济类)及其姊妹篇《考研数学历年试题解析》、《考研数学全真模拟经典400题》,期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友,也是各类院校的学生自学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促,书中疏漏之处在所难免,诚请专家和读者指正。

编 者

1999年1月于北大燕园

目 录

第一篇 微积分

第一章 函数、极限、连续 (1)

知识结构网络图 (1)

内容概要与重难点提示 (1)

考核知识要点讲解 (2)

一、极限的概念与性质 (2)

二、极限存在性的判别 (极限存在的两个准则) (4)

三、求极限的方法 (5)

四、无穷小及其比较 (12)

五、函数的连续性及其判断 (16)

六、连续函数的性质 (19)

常考题型及其解题方法与技巧 (20)

第二章 一元函数微分学 (33)

知识结构网络图 (33)

内容概要与重难点提示 (34)

考核知识要点讲解 (36)

一、一元函数的导数与微分 (36)

二、按定义求导数及其适用的情形 (40)

三、基本初等函数导数表, 导数四则运算法则与复合函数微分法则 (41)

四、初等函数的求导法 (42)

五、复合函数求导法的应用——由复合函数求导法则导出的几类函数的微分法 (43)

六、分段函数的求导法 (45)

七、高阶导数及 n 阶导数的求法 (47)

八、微分中值定理 (49)

九、利用导数研究函数的性态 (53)

十、微分学的几何应用与经济应用 (59)

十一、一元函数的最大值与最小值问题 (62)

十二、一元函数的泰勒公式 (63)

十三、泰勒公式的求法 (65)

十四、泰勒公式的若干应用 (67)

常考题型及其解题方法与技巧 (70)

第三章 一元函数积分学 (101)

知识结构网络图 (101)

内容概要与重难点提示 (101)

考核知识要点讲解 (102)

一、原函数与不定积分的概念及基本性质 (102)

二、不定积分的计算 (103)

三、定积分的概念与基本性质、基本定理 (114)

四、定积分的计算 (121)

五、积分计算技巧 (126)

六、反常积分	(128)
七、定积分的几何应用	(133)
八、定积分的简单经济应用	(137)
常考题型及其解题方法与技巧	(137)
第四章 多元函数微积分学	(159)
知识结构网络图	(159)
内容概要与重难点提示	(159)
考核知识要点讲解	(160)
一、多元函数的极限与连续性	(160)
二、多元函数的偏导数与全微分	(162)
三、多元函数的微分法则	(167)
四、多元函数的极值问题	(172)
五、多元函数的最大值与最小值 问题	(173)
六、二重积分的概念与性质	(176)
七、二重积分的计算方法	(177)
常考题型及其解题方法与技巧	(183)
第五章 无穷级数	(211)
知识结构网络图	(211)
内容概要与重难点提示	(211)
考核知识要点讲解	(212)
一、常数项级数的概念与基本性质	(212)
二、常数项级数敛散性的判定	(215)
三、幂级数	(219)
常考题型及其解题方法与技巧	(225)
第六章 常微分方程与差分方程	(241)
知识结构网络图	(241)
内容概要与重难点提示	(241)
考核知识要点讲解	(242)
一、基本概念	(242)
二、一阶微分方程	(242)
三、含变限积分的方程	(245)
四、线性微分方程解的性质与 结构	(245)

五、二阶常系数齐次线性微分方程	(247)
六、二阶常系数非齐次线性微分方 程	(247)
七、微分方程的简单应用	(248)
八、差分的概念及其性质	(250)
九、一阶常系数线性差分方程	(250)
常考题型及其解题方法与技巧	(251)

第二篇 线性代数

第一章 行列式	(265)
知识结构网络图	(265)
内容概要与重难点提示	(265)
考核知识要点讲解	(265)
一、定义(完全展开式)	(266)
二、行列式的性质	(266)
三、克拉默法则	(267)
常考题型及其解题方法与技巧	(267)
第二章 矩阵	(278)
知识结构网络图	(278)
内容概要与重难点提示	(278)
考核知识要点讲解	(279)
一、矩阵乘法的定义和规律	(279)
二、 n 阶矩阵的方幂和多项式	(280)
三、乘积矩阵的列向量组和行向 量组	(280)
四、两类特殊矩阵的乘法	(281)
五、矩阵乘法的分块法则	(281)
六、两种基本矩阵方程	(281)
七、可逆矩阵	(282)
八、伴随矩阵	(283)
常考题型及其解题方法与技巧	(283)
第三章 向量组的线性关系与秩	(300)

知识结构网络图	(300)
内容概要与重难点提示	(301)
考核知识要点讲解	(301)
一、线性表示	(301)
二、向量组的线性相关性	(302)
三、向量组的秩和最大无关组	(303)
四、矩阵的秩	(305)
五、实向量的内积和正交矩阵	(305)
常考题型及其解题方法与技巧	(306)

第四章 线性方程组

知识结构网络图	(324)
内容概要与重难点提示	(324)
考核知识要点讲解	(325)
一、线性方程组的形式	(325)
二、线性方程组解的情况的判别	(325)
三、线性方程组的通解	(325)
常考题型及其解题方法与技巧	(326)

第五章 特征向量与特征值, 相似, 对角化

知识结构网络图	(349)
内容概要与重难点提示	(350)
考核知识要点讲解	(350)
一、特征向量和特征值	(350)
二、 n 阶矩阵的相似关系	(351)
三、相似对角化问题	(352)
四、实对称矩阵的相似对角化	(352)
常考题型及其解题方法与技巧	(353)

第六章 二次型

知识结构网络图	(375)
内容概要与重难点提示	(375)
考核知识要点讲解	(376)
一、二次型及其矩阵	(376)
二、可逆线性变量替换和矩阵的合同关系	(376)
三、二次型的标准化	(377)

四、惯性定理和惯性指数, 实对称矩阵合同的判断	(379)
五、正定二次型和正定矩阵	(379)
常考题型及其解题方法与技巧	(379)

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

知识结构网络图	(392)
内容概要与重难点提示	(392)
考核知识要点讲解	(393)
一、随机事件的关系与运算	(393)
二、随机事件的概率	(395)
三、事件的独立性与独立重复试验	(399)
常考题型及其解题方法与技巧	(401)

第二章 随机变量及其分布

知识结构网络图	(408)
内容概要与重难点提示	(408)
考核知识要点讲解	(409)
一、随机变量及其分布函数	(409)
二、离散型随机变量与连续型随机变量	(410)
三、常见的离散型、连续型随机变量及其概率分布	(413)
四、随机变量函数的分布	(417)
常考题型及其解题方法与技巧	(420)

第三章 多维随机变量的分布

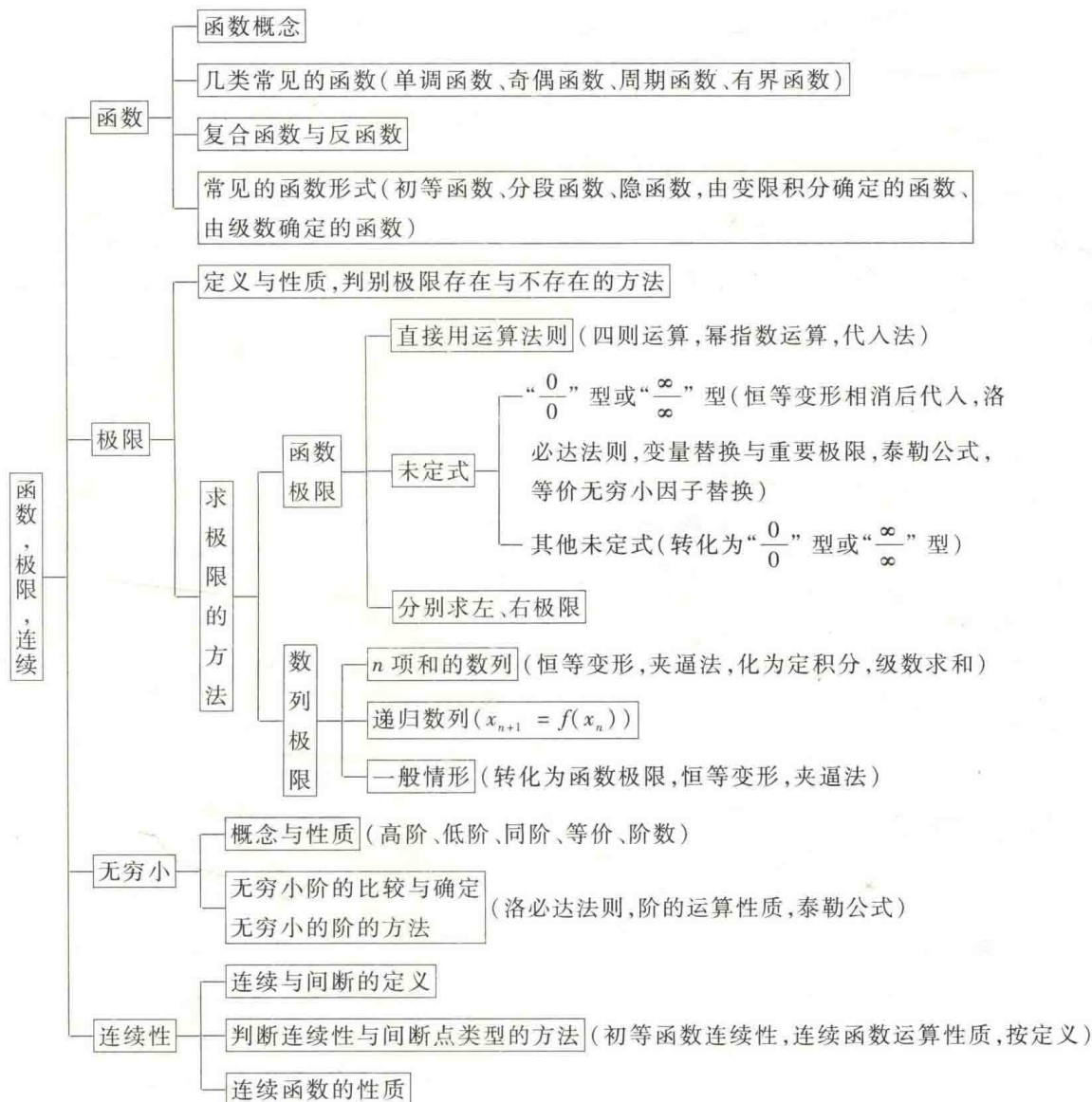
知识结构网络图	(430)
内容概要与重难点提示	(430)
考核知识要点讲解	(431)
一、二维随机变量的联合分布函数与边缘分布函数	(431)
二、二维离散型随机变量	(432)

三、二维连续型随机变量	(434)	一、大数定律	(475)
四、二维随机变量的独立性	(437)	二、中心极限定理	(476)
五、两个常见的二维连续型随机变 量的分布	(438)	常考题型及其解题方法与技巧	(477)
六、两个随机变量函数的分布	(440)	第六章 数理统计的基本概念	(481)
常考题型及其解题方法与技巧	(446)	知识结构网络图	(481)
第四章 随机变量的数字特征	(456)	内容概要与重难点提示	(481)
知识结构网络图	(456)	考核知识要点讲解	(481)
内容概要与重难点提示	(456)	一、总体与样本	(481)
考核知识要点讲解	(456)	二、统计量	(483)
一、随机变量的数学期望和方差	(456)	三、抽样分布	(484)
二、协方差与相关系数	(461)	常考题型及其解题方法与技巧	(488)
三、随机变量的矩	(463)	第七章 参数估计	(492)
常考题型及其解题方法与技巧	(464)	知识结构网络图	(492)
第五章 大数定律和中心极限定理	(475)	内容概要与重难点提示	(492)
知识结构网络图	(475)	考核知识要点讲解	(492)
内容概要与重难点提示	(475)	一、估计量的概念	(492)
考核知识要点讲解	(475)	二、求估计量的两种常用方法	(492)
		常考题型及其解题方法与技巧	(496)

第一篇 微积分

第一章 函数、极限、连续

知识结构网络图



内容概要与重难点提示

(一) 微积分中研究的对象是函数 函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系, 就看是否存在一种对应规则, 使得按照这个对应规则, 当其中一个变量或几个变量(称为自变量)的取值确定后, 余下的另一个变量(称为因变量)的取值也就被唯一确定. 只有一个自变量的函数称为一元函数, 不止一个自变量的函数称为多元函数.

函数这部分的重点是:复合函数、反函数、分段函数、函数记号的运算、基本初等函数与其图象以及初等函数的概念等.

(二) 极限是微积分的理论基础 微积分中的重要概念,如连续、导数、定积分、级数等都是用不同类型的极限来定义的,由此可见极限的重要性.本章的重点内容是极限.既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件,又要能准确地求出各种极限.求极限的方法很多,综合起来主要有:

- ① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则;
- ② 利用函数的连续性;
- ③ 利用洛必达法则;
- ④ 分别求左、右极限;
- ⑤ 利用变量替换与两个重要极限;
- ⑥ 数列极限转化为函数极限;
- ⑦ 利用夹逼定理;
- ⑧ 利用导数的定义求极限;
- ⑨ 利用泰勒公式.

(三) 无穷小量就是极限为零的变量 极限问题可归结为无穷小量问题.要理解无穷小量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会确定无穷小量的阶数,并会用重要的等价无穷小替换求极限.

(四) 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数 由于函数的连续性是通过极限定义的,所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限.要掌握判断函数连续性(特别是分段函数在分界点处的连续性)以及求间断点的方法,还要会判别函数间断点的类型.

(五) 有界闭区间上连续函数的基本性质 函数的许多重要性质都与函数的连续性有关.因此,我们要了解有界闭区间上连续函数的重要性质,包括:有界性定理,最大值、最小值定理和介值(中间值)定理,并掌握这些定理的简单应用.

考核知识要点讲解

一、极限的概念与性质

(一) 极限的定义

【定义 1.1】(数列的极限) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow$ 对于任给的常数 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时就有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

若数列 $\{x_n\}$ 存在极限(有限数), 又称数列 $\{x_n\}$ 收敛, 否则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

【定义 1.2】(函数的极限) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任给的常数 $\varepsilon > 0$, 存在正数 X , 使得当 $|x| > X$ 时就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义单侧极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 与 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

【注】 在函数极限情形下 $x \rightarrow \infty$ 与数列极限中 $n \rightarrow \infty$ 的意义不同, 前者是指 $x \rightarrow \pm \infty$, 而后者是指 $n \rightarrow +\infty$.

【定义 1.3】(函数的极限) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任给的常数 $\varepsilon > 0$, 存在正数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限 $f(x_0 - 0)$ 与右极限 $f(x_0 + 0)$:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

(二) 极限的基本性质

►1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】(极限的不等式性质) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

(1) 若 $a > b$, 则存在 N , 当 $n > N$ 时有 $x_n > y_n$; (2) 若 $n > N$ 时 $x_n \geq y_n$, 则 $a \geq b$.

【定理 1.2】(收敛数列的有界性) 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 有界 (即存在常数 $M > 0$, 使 $|x_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$).

►2. 函数极限的基本性质

【定理 1.3】(极限的不等式性质) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$.

若 $A > B$, 则存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$;

若存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geq g(x)$, 则 $A \geq B$.

【推论】(极限的保号性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

(1) 若 $A > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$;

(2) 若存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geq 0$, 则 $A \geq 0$.

【注】 若(2)中的条件“ $f(x) \geq 0$ ”改为“ $f(x) > 0$ ”, 其他条件保持不变, 则结论仍是“ $A \geq 0$ ”.

【定理 1.4】(存在极限的函数局部有界性) 设存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界, 即存在 $\delta > 0$ 与 $M > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leq M$.

【注】 其他的极限过程如 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 等也有类似的结论.

(三) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (1.1)$$

【例 1.1】 判断下列结论是否正确, 并证明你的判断.

(I) 设当 $n > N$ 时 $x_n < y_n$, 已知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ 均存在, 则 $A < B$;

(II) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 有定义, 又存在 $c \in (a, b)$ 使得极限 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 有界;

(III) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\frac{1}{f(x)}$ 有界.

【解】 (I) 不正确. 令 $a_n = x_n - y_n$, 则有 $a_n < 0 (n > N)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = A - B \leq 0$, 即在题设下只能保证 $A \leq B$, 不能保证 $A < B$. 例如, $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{2}{n}$, 则 $x_n < y_n$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

评注 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 都存在, 则对不等式 $x_n < y_n (n > N)$ 两边当 $n \rightarrow \infty$ 时取极限, 除保持不等号外还应加上等号, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

(II) 不正确. 这时只能保证: 存在点 c 的一个空心邻域 $U_0(c, \delta) = \{x \mid 0 < |x - c| < \delta\}$, 使 $f(x)$ 在 $U_0(c, \delta)$ 中有界, 一般不能保证 $f(x)$ 在 (a, b) 有界. 例如: $f(x) = \frac{1}{x}$, $(a, b) = (0, 1)$, 取定 $c \in (0,$

1), 则 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{1}{c}$, 但 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 无界.

(III) 正确. 因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$, 由存在极限的函数的局部有界性即知: 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\frac{1}{f(x)}$ 有界.

二、极限存在性的判别(极限存在的两个准则)

(一) 夹逼定理

【定理 1.5】 (数列情形) 若存在 N , 使得当 $n > N$ 时有 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

【定理 1.6】 (函数情形) 若存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 又

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

【注】 其他的极限过程也有类似的结论.

(二) 单调有界数列必收敛定理

【定理 1.7】 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界, 即 $x_{n+1} \geq x_n (n = 1, 2, \dots)$, 并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n \leq M$, 则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且有 $x_n \leq a (n = 1, 2, \dots)$.

若数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界, 即 $x_{n+1} \leq x_n (n = 1, 2, \dots)$, 并存在一个数 m 使得对一切的 n 有 $x_n \geq m$, 则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且有 $x_n \geq a (n = 1, 2, \dots)$.

(三) 极限存在的充要条件

【定理 1.8】 (函数极限存在的充要条件) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

对于分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$ 考察 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在就需要分别求

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) \quad \text{与} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x), \text{ 并确定二者是否相等.}$$

【定理 1.9】 (数列极限存在的充要条件) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = A$.

【例 1.2】 设 $f(x) = \begin{cases} 2(x+1) \arctan \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{\ln(1+ax^2)}{x \sin x}, & x < 0, \end{cases}$ 又 $a \neq 0$, 问 a 为何值时 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

【分析】 分别求右、左极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$, 由 $f(0+0) = f(0-0)$ 定出 a 值.

【解】 $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2(x+1) \arctan \frac{1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \pi$,

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2} \cdot \frac{ax^2}{x \sin x} \right] = 1 \cdot a \cdot 1 = a (a \neq 0),$$

由 $f(0+0) = f(0-0)$, 得 $a = \pi$. 因此, 当且仅当 $a = \pi$ 时, 存在 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pi$.

评注 注意在本题中当 $a = \pi$ 时极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pi$, 即当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的极限存在, 但此极限值与函数值 $f(0) = 1$ 并不相等, 其原因在于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 描述的是当 $x \rightarrow 0$ 但 $x \neq 0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势, 它与函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处的函数值 $f(0)$ 是多少没有关系.

【例 1.3】 设 $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

- (A) 0. (B) $+\infty$. (C) $-\infty$. (D) 不存在, 但也不是 ∞ .

【分析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, 故应分左右极限来讨论. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{令 } \frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{令 } \frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t} = 0,$$

因此应选 (D).

评注 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 对含有 $a^x (a > 0, a \neq 1)$ 或 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ 的函数极限, 一定要对 $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 分别求极限, 若两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ 时极限存在, 否则不存在.

三、求极限的方法

(一) 利用极限的四则运算法则与幂指数运算法则求极限

► 1. 极限的四则运算法则及其推广

【定理 1.10】 (四则运算法则) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

四则运算法则的推广:

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, 且当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $g(x)$ 有界, 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0$.

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (+\infty, -\infty)$, 且当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $g(x)$ 有界或 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty (+\infty, -\infty)$.

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (+\infty)$, 且当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $|g(x)| \geq A > 0 (g(x) \geq A > 0)$, 或 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \neq 0 (A > 0)$, 或 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty (+\infty)$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \infty (+\infty)$.

(4) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, 又当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $f(x)g(x) > 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$.

【注】 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在也不为 ∞ , 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)]$ 不存在也不为 ∞ ; 若又有

$A \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$ 均不存在也不为 ∞ . 但是, 当 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 都不存在且不为 ∞

时, 求 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{g(x)}{f(x)}$ 的极限则必须作具体分析.

►2. 幂指数函数的极限运算法则及其推广

【定理 1.11】(幂指数运算法则) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = A^B (A >$

0).

幂指数运算法则的推广:

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A (A > 0, \text{且 } A \neq 1), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < A < 1, \\ +\infty, & A > 1. \end{cases}$

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, f(x) > 0 (0 < |x - a| < \delta), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & B > 0, \\ +\infty, & B < 0. \end{cases}$$

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} +\infty, & A > 0, \\ 0, & A < 0. \end{cases}$

►3. 对 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 等各类未定式不能直接用上述运算法则.

最基本的是 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 其他类型应经恒等变形转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法有多种(参看题型一), 其中一种重要技巧是设法消去分子、分母中的极限为零或 ∞ 因子, 于是转化为可以直接用四则运算法则的情形(后面还要介绍其他方法, 如洛必达法则).

【例 1.4】 设常数 $x > 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n^2 + n)(x^{\frac{1}{n-1}} - x^{\frac{1}{n}})]$.

【解】
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [(n^2 + n)(x^{\frac{1}{n-1}} - x^{\frac{1}{n}})] &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(n^2 + n) \cdot x^{\frac{1}{n}} (x^{\frac{1}{n(n-1)}} - 1)] \\ &= (\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} [(n^2 + n)(e^{\frac{\ln x}{n(n-1)}} - 1)] \\ &= 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n) \ln x}{n(n-1)} = \ln x. \end{aligned}$$

评注 ① 本题用到了当 $n \rightarrow \infty$ 时的等价无穷小替换 $e^{\frac{\ln x}{n(n-1)}} - 1 \sim \frac{\ln x}{n(n-1)}$.

② 下列做法是错误的:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [(n^2 + n)(x^{\frac{1}{n-1}} - x^{\frac{1}{n}})] &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(n^2 + n)(e^{\frac{\ln x}{n-1}} - 1 - e^{\frac{\ln x}{n}} + 1)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(n^2 + n)(e^{\frac{\ln x}{n-1}} - 1)] - \lim_{n \rightarrow \infty} [(n^2 + n)(e^{\frac{\ln x}{n}} - 1)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n) \ln x}{n-1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n) \ln x}{n} \\ &= \ln x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n(n-1)} = \ln x. \end{aligned}$$

错误的原因在于上述第二个等号后的两个极限均不存在, 不能运用极限的加法或减法运算法则.

③ 运用极限的四则运算法则时必须满足其前提条件, 在对两个函数的乘积求极限时, 应视具体情况用极限的四则运算法则分别求极限, 但需要注意对 $\infty \cdot 0$ 型未定式不能用.

【例 1.5】 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$ 都存在, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [4f(x) + 6]$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析】 由题设可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x f(x)$ 存在

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3xf(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} [4f(x) + 6] = \frac{6}{3} = 2.$$

(二) 利用函数的连续性求极限

1. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 连续, 按定义就有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. 因此对连续函数求极限就是用代入法求函数值.

2. 一切初等函数在它的定义域上连续. 因此, 若 $f(x)$ 是初等函数, 且 a 属于它的定义域, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

3. 设 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, 若补充定义 $g(a) = A$, 则 $g(x)$ 在 $x = a$ 连续. 若又有 $y = f(u)$ 在 $u = A$ 连续,

则由复合函数的连续性得

$$\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow a} g(x)] = f(A).$$

【注】 可用此结论证明幂指数函数的极限运算法则.

(三) 利用变量替换法和两个重要极限求极限

通过变量替换, 把求某个极限转化为求另一个极限, 若后者能算得出来, 问题就解决了.

1. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ 且 $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f[\varphi(x)] \stackrel{u = \varphi(x)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = A.$$

(若把 $x \rightarrow +\infty$ 改为 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow x_0$ 上述结论仍成立.)

2. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$ 且 $f(u)$ 在 u_0 连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] \stackrel{\substack{u = \varphi(x) \\ x \rightarrow x_0 \text{ 时} \\ u \rightarrow u_0}}{=} \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0).$$

重要极限与变量替换法相结合可求下列极限:

(1) 诸如:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1 + \varphi(x)]}{\varphi(x)} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + \varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left([1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} \right)^{\psi(x)} = e^A,$$

其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$.

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则求 1^∞ 型极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ [1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x) - 1}} \right\}^{g(x)[f(x) - 1]} = e^A,$$

转化为求 $0 \cdot \infty$ 型极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)[f(x) - 1] = A$.

【注】 上述极限过程 $x \rightarrow x_0$ 改为其他情形也有类似结论.