

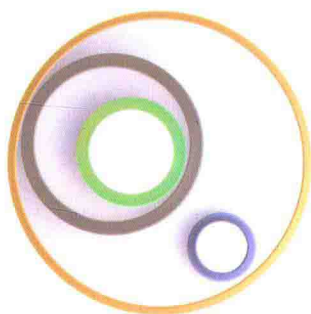


普通高等教育“十二五”规划教材

实用数学教程

SHIYONG SHUXUE JIAOCHENG

主 编 邹建国 狄国汉
副主编 施泽慧 余英娟 姜祯祯
主 审 孔 芸



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

实用数学教程

主 编 邹建国 狄国汉

副主编 施泽慧 余英娟 姜祯祯

主 审 孔 芸



北京邮电大学出版社
[www. buptpress. com](http://www.buptpress.com)

内 容 简 介

本书是作者在多年的教学实践基础上,依据教育部“中等职业学校数学教学大纲”、江苏省教育厅“江苏省五年制高等职业教育数学课程标准”以及相关高考复习考试大纲编写的一本实用数学教程.本书遵守“宽基础、活模块”的原则,内容的选择注重了基础性、实用性和拓展性,面向专业需求设计选学模块.全书分准备知识、基础教程和专业实用三部分,其中基础教程部分供各专业使用,可满足各工科专业和现代服务业职业岗位对高素质劳动者共同的对数学基础的需求,也可满足学生参加对口单独招生高考、成人高考等升学考试的需求;专业实用部分供相关专业选用,可满足物流、电子商务、金融、管理等现代服务业职业岗位对数学方面的特殊需求.各部分内容有相对的系统性和独立性.本书配有电子教案方便教和学.本书既可作为职业技术教育各专业的数学教材,也可以作为备考复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

实用数学教程 / 邹建国, 狄国汉主编. -- 北京: 北京邮电大学出版社, 2016.9

ISBN 978-7-5635-4932-0

I. ①实… II. ①邹… ②狄… III. ①数学—教材 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 217787 号

书 名: 实用数学教程

著作责任者: 邹建国 狄国汉 主编

责任编辑: 付兆华 张珊珊

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编: 100876)

发行部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京通州皇家印刷厂

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 23

字 数: 597 千字

版 次: 2016 年 9 月第 1 版 2016 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4932-0

定 价: 48.00 元

· 如有印装质量问题, 请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前 言

数学是科学的大门和钥匙.一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.数学和生活紧密相连,数学可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活.“数学”是职业技术教育各专业知识学习相关专业理论课的基础课程,也是学生参加对口单独招生高考、成人高考等升学考试的必考科目.

为了帮助学生学好数学课程,提高数学水平,应对对口单独招生高考、成人高考等升学考试,我们组织了长期从事数学教学且有丰富教学经验的教师,依据教育部“中等职业学校数学教学大纲”、江苏省教育厅“江苏省五年制高等职业教育数学课程标准”以及相关高考复习考试大纲编写了这本《实用数学教程》.

教材的编写遵循“深入浅出,精简实用;加强基础,注重能力;渗透实践,强化应用”的原则,教材紧密结合现代服务业专业特色,遵守“宽基础、活模块”的原则,内容的选择注重了基础性、实用性和拓展性,面向专业需求,设计选学模块.内容的处理方法主要体现在以下几个方面:

1. 注意数学自身的系统性、逻辑性,不拘泥于对某些基础理论的严格论证和推导,而尽量采用从实例、现实问题背景或案例引入新知识.

2. 例题的编排由易到难,注重层次性,并通过解题前的“分析”和解题后的“注意”帮助学生掌握解题的思路和解题中应注意的问题.

3. 习题的编制以复习巩固学习目标为主,部分在难度、深度和题型的广度上略有拓展,供学有余力的学生选用.

全书分为准备知识、基础教程和专业实用三个部分,其中基础教程部分供各专业使用,可满足各工科专业和现代服务业职业岗位对高素质劳动者共同的对数学基础的需求,也可满足学生参加对口单独招生高考、成人高考等升学考试的需求;专业实用部分供相关专业选用,可满足物流、电子商务、金融、管理等现代服务业职业岗位对数学方面的特殊需求.各部分内容有相对的系统性和独立性.本书配有电子教案方便教和学.

本书既可作为职业技术教育各专业的数学教材,也可以作为备考复习用书.

本书由邹建国、狄国汉主编,施泽慧、余英娟、姜祯祯任副主编.全书由孔芸主审.

本书编写过程中得到了南京化工技师学院的领导及相关部门的大力支持,也得到了其他学科和专业老师的帮助,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,敬请读者批评指正.并恳请将意见和建议发至邮箱:njzjg@qq.com.

编 者

目 录

第一篇 准备知识

课题 1	实数的概念	3
课题 2	实数分类及几个重要概念	4
课题 3	近似值的概念	5
课题 4	误差	6
课题 5	近似值的表示	8
课题 6	行列式	11
课题 7	矩阵	16

第二篇 基础教程部分

第一章	集合与简易逻辑	27
课题 1	集合的概念	27
课题 2	集合的运算	30
课题 3	简易逻辑	33
第二章	函数	37
课题 1	函数的概念	37
课题 2	函数的性质	39
课题 3	一次函数和反比例函数	42
课题 4	二次函数	45
课题 5	反函数的概念	47
课题 6	指数函数与对数函数	49
第三章	不等式与不等式组	54
课题 1	不等式的概念与性质	54
课题 2	一元一次不等式与一元一次不等式组	58
课题 3	一元二次不等式	60

课题 4 绝对值不等式	64
第四章 数列	67
课题 1 数列的概念	67
课题 2 等差数列	71
课题 3 等比数列	76
第五章 复数	81
课题 1 复数的概念	81
课题 2 复数的运算	83
第六章 导数	91
课题 1 极限与导数的概念	91
课题 2 导数的运算	95
课题 3 导数的应用	96
第七章 三角函数及其有关概念	99
课题 1 角的有关概念及度量	99
课题 2 任意角的三角函数	103
第八章 三角函数式的变换	107
课题 1 同角三角函数的基本关系式	107
课题 2 三角函数的诱导公式	110
课题 3 两角和与差、二倍角的三角函数	115
第九章 三角函数的图像和性质	122
课题 1 正弦函数、余弦函数、正切函数的图像	122
课题 2 正弦函数、余弦函数、正切函数的性质	127
课题 3 反三角函数的基本概念	134
第十章 解三角形	140
课题 1 解直角三角形	140
课题 2 解斜三角形	142
第十一章 平面向量	148
课题 1 向量的概念	148
课题 2 向量的运算与向量的数量积	150
课题 3 平面向量的直角坐标运算	157

第十二章	直线	162
课题 1	直线的倾斜角与斜率	162
课题 2	直线方程的几种形式	165
课题 3	两直线的位置关系	171
课题 4	点到直线的距离与两直线的夹角	177
第十三章	圆锥曲线	182
课题 1	圆	182
课题 2	椭圆	189
课题 3	双曲线	195
课题 4	抛物线	201
第十四章	立体几何	205
课题 1	直线和平面	205
课题 2	空间向量	210
课题 3	多面体与旋转体	213
第十五章	排列、组合与二项式定理	216
课题 1	计数原理	216
课题 2	排列	219
课题 3	组合	221
课题 4	二项式定理	224
第十六章	概率与统计初步	227
课题 1	概率	227
课题 2	统计初步	232

第三篇 专业实用部分

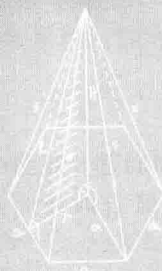
第十七章	经济应用	243
课题 1	投资收益的现值	243
课题 2	分期付款购物的有关计算	249
课题 3	边际成本、边际收入、边际利润	254
课题 4	一笔画和最短路问题	262
第十八章	线性规划初步	271
课题 1	线性规划问题的有关概念	271

课题 2	二元线性规划问题的图解法	273
课题 3	解线性规划问题的表格法	274
课题 4	利用 Excel 软件解线性规划问题	278
第十九章	数据表格信息处理	283
课题 1	数组与数据表格	283
课题 2	数组的运算	286
课题 3	数据表格的图示	289
课题 4	数据表格应用举例	294
课题 5	用软件处理数据表格	304
第二十章	编制计划原理与方法	314
课题 1	编制计划的有关概念	314
课题 2	关键路径法	316
课题 3	网络图与横道图	320
课题 4	计划的调整与优化	325
第二十一	逻辑代数初步	327
课题 1	二进制及其转换	327
课题 2	命题逻辑与条件判断	330
课题 3	逻辑变量与基本运算	333
课题 4	逻辑式、真值表和逻辑运算律	337
课题 5	逻辑函数的卡诺图化简法	342
第二十二章	算法与程序框图	347
课题 1	算法的概念	347
课题 2	算法的程序框图	349
课题 3	算法与程序框图应用举例	354
参考文献		357



$$D = 2a$$

$$d = 1 \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



$$S = 3aH$$

$$S = 3a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$V = \frac{1}{3} S H$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 H$$

第一篇 准备知识

数学也是一种语言,从它的结构和内容来看,这是一种比任何国家的语言都要完善的语言.通过数学,自然在论述;通过数学,世界的创造者在表达;通过数学,世界的保护者在讲演.为了使同学们能够听懂这种语言并顺利地融入其中,我们在此集结了实数的概念及其分类,舍入误差的方法和近似值的表示,简介了行列式和矩阵的概念及基本运算,以及线性方程组的解法等准备知识.

课题 1 实数的概念

1. 自然数

用以计量物体的个数或表示事物件数的数叫作**自然数**.即用数码 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 所表示的数.自然数由 0 开始,一个接一个,组成一个无穷集体.自然数有一个最小的数 0 ,但没有最大数.

除 0 以外的自然数叫作**正整数**.

正整数中,能够被 2 整除的数,叫作**双数**.不能被 2 整除的数则叫作**单数**.

正整数除 1 以外,只能被 1 和它本身整除的数叫作**质数**(或称**素数**).例如: $2, 3, 5, 7, 11, \dots$.

不仅能被 1 和它本身整除,还能被其他正整数整除的正整数叫作**合数**.例如: $4, 6, 8, 9, 10, \dots$.

1 既不是质数也不是合数.正整数可分为质数、合数和 1 .

任何一个合数,都可以用几个质数连乘的形式表示.例如,合数 $30 = 2 \times 3 \times 5$,其中 $2, 3, 5$ 就是三个质数因数,简称**质因数**.

例 1 指出下列各数中,哪些是单数?哪些是双数?哪些是质数?哪些是合数?

$1, 2, 4, 5, 9, 18, 21, 23, 27, 29$

解 单数是 $1, 5, 9, 21, 23, 27, 29$;双数是 $2, 4, 18$;质数是 $2, 5, 23, 29$;合数是 $4, 9, 18, 21, 27$.

例 2 把 210 分解成质因数.

解 用短除法

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 210} \\ 3 \overline{) 105} \\ 5 \overline{) 35} \\ 7 \end{array}$$

则 $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

2. 整数

像 $+6, +11, +29$ 等,带有正号的数叫作**正数**(一般正号“ $+$ ”省略不写).像 $-2, -7, -15$ 等,带有负号“ $-$ ”的数叫作**负数**.数前面的“ $+$ ”或“ $-$ ”是性质符号.

正整数前带符号“ $-$ ”的数叫作**负整数**.例如: $-1, -2, -3, -4, \dots$.

正整数、零、负整数统称为**整数**.

整数中,能够被 2 整除的数,叫作**偶数**.不能被 2 整除的数则叫作**奇数**.

偶数包括正偶数(亦称**双数**)、负偶数和 0 ;奇数包括正奇数(亦称**单数**)和负奇数.所有整

数不是奇数,就是偶数.

3. 有理数

两个整数相除(除数不为零)的商不是整数,就形成了分数.例如, $4 \div 5 = \frac{4}{5} = 0.8$, $1 \div 3 = \frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$.

有限小数和无限循环小数都可以化为分数.例如, $6.5 = \frac{13}{2}$, $-0.6 = -\frac{3}{5}$, $0.\dot{7} = \frac{7}{9}$.

整数和分数(正分数和负分数)统称为有理数.

因此,任何一个有理数都可以表示成两个整数相除的形式.

4. 实数

小数除有限小数和无限循环小数外,还有一种无限不循环小数.例如,圆周率 $\pi = 3.141\,592\,6\cdots$, $\sqrt{2} = 1.414\,2\cdots$, $\lg 2 = 0.301\,0\cdots$, $e = 2.718\,28\cdots$.

无限不循环小数叫作无理数.有理数和无理数统称为实数.

5. 科学记数法

在经济活动、工程技术和科学实验中,常将一个较大的数化成 $a \times 10^n$ 的形式.例如,光的速度是 300 000 千米每秒,可写成 3×10^5 km/s.

把一个绝对值大于 0 的数写成 $a \times 10^n$ 的形式(其中 $1 \leq |a| < 10$, n 是正整数),这种记数的方法就是科学记数法.

例 3 用科学记数法表示下列各数

(1) 403

(2) 1 825.34

(3) 110 000 000 000

(4) 95 亿

(5) -450 000

(6) 地球上煤的蕴藏量估计为 15 万亿吨

解 (1) $403 = 4.03 \times 10^2$;

(2) $1\,825.34 = 1.825\,34 \times 10^3$;

(3) $110\,000\,000\,000 = 1.1 \times 10^{11}$;

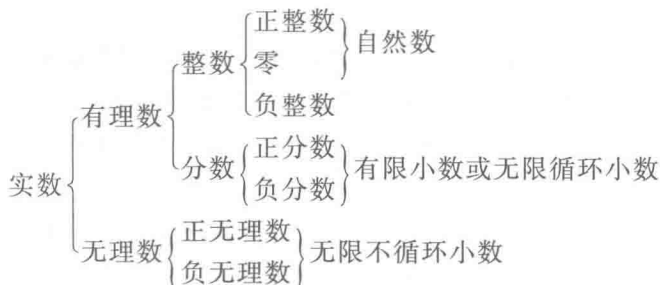
(4) $95\text{ 亿} = 9\,500\,000\,000 = 9.5 \times 10^9$;

(5) $-450\,000 = -4.5 \times 10^5$;

(6) $15\text{ 万亿吨} = 15\,000\,000\,000\,000\text{ 吨} = 1.5 \times 10^{13}\text{ 吨}$.

课题 2 实数分类及几个重要概念

1. 实数的分类



实数包括有理数和无理数两大类.有理数是能表示为两个整数相除的形式,或者等价地,有理数就是整数、有限小数或无限循环小数.凡是不能表示为两个整数相除的数称为无理数,或者等价地,无理数就是无限不循环小数.

注意 (1) 任何分数都是有理数,如 $\frac{17}{10}$, $-\frac{11}{29}$ 等;

(2) 0 既不是正数,也不是负数,但 0 是自然数;

(3) 常见的几种无理数:

① 根号型: $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ 等开不尽方的;

② 构造型: 如 1.323 223...;

③ 与 π 有关的: 如 $\frac{\pi}{3}$, $\pi-1$ 等.

2. 几个重要概念

(1) 数轴: 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫作**数轴**. (画数轴时, 要注意上述规定的三要素缺一不可.)

注意 ① 实数与数轴上的点是一一对应的;

② 数轴上任一点对应的数总大于这个点左边的点对应的数.

(2) 相反数: 只有符号不同的两个数, 叫作互为**相反数**, 零的相反数是零.

注意 ① 若 a, b 互为相反数, 则 $a+b=0$, $a^{2n}=b^{2n}$ (n 为正整数), $|a|=|b|$;

② 相反数等于它本身的数是零;

③ 从数轴上看, 互为相反数的两个数所对应的点关于原点对称.

(3) 倒数: 乘积是 1 的两个数互为**倒数**.

注意 零是唯一没有倒数的数, 倒数等于本身的数是 1 或 -1.

(4) 绝对值: 从数轴上看, 一个数的绝对值就是表示这个数的点与原点的距离.

注意 $|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0. \end{cases}$

课题 3 近似值的概念

在日常生活和实际工作中, 人们经常遇到的数值有两种: 一种是精确的数值, 另一种是近似的数值.

1. 准确数和近似数

一个数能表示原来物体或事件的实际数量, 这个数称为**准确数**. 一个数与准确数相近 (比准确数略多或者略少些), 这一个数称之为**近似数**.

例如, 某班有 50 位学生, 其中男生 26 人, 女生 24 人. 这里的 50, 26, 24 都是准确数.

又如, 某校有 5 千学生, 这里的 5 000 就不是准确数, 而是近似数.

再如, 我国的人口无法计算准确数目, 但是可以说出一个近似数. 比如说我国人口有 13 亿, 这 13 亿就是一个近似数.

近似数可以通过“四舍五入法”省略千位、万位或亿位后面的尾数, 再在数的后面加千、万、或亿而得出.

2. 精确值和近似值

在确定的度量单位下,能表示原来物体或事件的实际数量的准确的数值叫作**精确值**,又称**真值**.根据精确度取其接近真值的数值称为**近似值**.

例如,某区有 20 所中学,某班有 50 位学生.这“20”或“50”都是准确数,也是精确值.又如,圆周率 π 是个准确数,圆周率 π 的精确值应为 3.141 592 653 589 793 238 46...,实际应用时多取 3.14,3.141 6 等,这些都是 π 的近似值.

再如,某辆货车装载物品的重量是 16 吨,某人身高是 1.80 米.这 16 和 1.80 就不是准确数,也不是精确值.因为货车上多装一些或少装一些货物是可以的;人的身高由于测量的缘故,总会有偏差.事实上,所有的测量值都不是精确值,而是近似值.

近似数指的是根据实际情况,不可能得到或很难得到的一个不甚准确的数.而近似值是对精确值而言的,这个精确值是可能得到的.

课题 4 误差

真值减去近似值所得的差叫作**误差**.

1. 误差来源

主要有如下四个方面.

(1) 人为误差

由于测量者受分辨能力的限制,或因工作疲劳引起的视觉器官的生理变化,或由于习惯引起的读数误差,以及精神上的因素产生的一时疏忽等引起的误差.

(2) 算法误差

用数学式来计算实际现象时,应用的公式是有某特定条件的,因而所得的值必是一个近似值.例如,自由落体公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$,就略去了空气阻力,产生了路程的近似值.

(3) 量具误差

计量器具本身有误差,由于制造工艺的不完善,计量器具各组成部分不可避免地含有误差,如机械误差、调整误差、量具误差、变形误差等都有可能在测量中引起误差.就是本身也存在误差.

(4) 舍入误差

在计算中常遇到无限多位小数或位数很多的有限小数,把它们用较小位数的近似值来代替所产生的误差叫作**舍入误差**.例如,圆面积为 $A = \pi r^2$, π 只能取近似值 3.14、3.141 6 等,因此 A 的值也只能是近似值.

2. 舍入误差的方法

在近似值的实际应用中根据不同的需要和精确程度,主要采取去尾法、进一法和四舍五入法.另外在一些特殊需要的地方也有二舍八入法.这里只介绍三种主要方法.

(1) 去尾法(只舍不入)

把一个数保留到某一指定的数位,而把数位后面的尾数全部舍去,这种取近似值的方法叫作**去尾法**.例如,有一组数 3.141 592 6,2.718 28,141 017.92,把第一个数保留到小数点后第三位,第二个数保留到个位,第三个数保留到百位.则这三数去尾后的数值分别是 3.141,2,141 017.

例 4 已知某物品每件 13 元,现有 100 元,问最多可买几件?

解 设最多可以买 x 件,则

$$x = 100 \div 13 = 7.672\ 3\cdots$$

由于所买件数不能是小数,这里 x 只能取整数 7,而把尾数全部去掉.即最多可买 7 件.

(2) 进一法(只入不舍)

把一个数保留到某一指定的数位,该数位以后的尾数全部舍去,同时在保留数值的最后一位上再加上 1,这种取近似值的方法叫作**进一法**(也叫**收尾法**).例如,有一组数 5.726 3, 12.183 7, 0.015 4,把第一个数保留到小数点后第一位,第二个数保留到小数点后第二位,第三个数保留到小数点后第三位.则这三数用进一法收尾后的数值分别是 5.8, 12.19, 0.016.

例 5 已知一辆货车最多只能装 60 台台式电脑,现有 200 台台式电脑要运送,问一辆货车需运送几次?

解 设需要运送 x 次,则

$$x = 200 \div 60 = 3.333\cdots$$

因为运送次数不能是小数,这里 x 舍去个位后面的数以后是 3,同时在个位上再加上 1.即需要运送 4 次.

(3) 四舍五入法

把一个数保留到某一指定的数位,如果该数位以后的尾数的第一位数字是 4 或者比 4 小,就把尾数全部舍去;如果该数位以后的尾数的第一位数字是 5 或者比 5 大,就把尾数全部舍去的同时在保留数值的最后一位上再加上 1,这种取近似值的方法叫作**四舍五入法**.例如,用四舍五入法将 5.209 211 29 保留到小数点后第二位,则舍去尾数 921 129 部分后得到 5.20,由于舍去的尾数 921 129 中第一位数字是 9,因此在保留的 5.20 的最后一位上再加上 1,得到结果 5.21.又如,用四舍五入法将 5.209 21 129 保留到小数点后第三位,由于舍去的尾数 21 129 中第一位数字是 2,则只需舍去尾数 21129 部分,得到结果 5.209.

在近似计算中的取舍,一般经常用四舍五入法.

例 6 已知一根不锈钢管长 350 厘米,平均截成 3 段,每段长约多少厘米?(保留到小数点后第二位)

解 设每段不锈钢管长 x 厘米,则

$$x = 350 \div 3 = 116.666\cdots$$

根据题意,按四舍五入法应取每段不锈钢管长约 116.67 厘米.

例 7 把下面各数用四舍五入法近似到指定的数位

- (1) 3.603 7(保留到小数点后第三位);
- (2) 3.049 9(保留到小数点后第一位);
- (3) 17.516 6(保留到个位);
- (4) 1 989(保留到十位);
- (5) 12 345 678(保留到万位).

解 (1) $3.603\ 7 \approx 3.604$;

(2) $3.049\ 9 \approx 3.0$;

(3) $17.516\ 6 \approx 18$;

(4) $1\ 989 \approx 1\ 990$;

(5) $12\ 345\ 678 \approx 12\ 350\ 000$.

注意 第(2)题的 3.0 中的 0 不能省掉,如果省掉 0,写成 3,则表示保留到个位;第(4)题的那个 1 990 中的 0 不能省掉,如果省掉 0,写成 199,就不是近似值;同样第(5)题的那个 12 350 000 中的四个 0 都不能省掉,如果省掉 0,写成 1 235,就不是近似值.

3. 误差的种类

(1) 绝对误差

一个量的真值为 A , 它的近似值为 a , 则 $A-a$ 叫作近似值 a 的**绝对误差**(简称**误差**). 绝对误差一般用 D 表示, 那么

$$D=A-a.$$

例如, 某微信群有成员 196 人, 如果用 200 作为该群成员人数的近似值, 那么绝对误差 $D=196-200=-4$; 一段公路长实际为 400.06 km, 测量长为 400 km, 那么绝对误差 $D=400.06-400=0.06$.

(2) 相对误差

一个量的近似值的绝对误差 D 与真值 A 的比叫作近似值 a 的**相对误差**. 相对误差一般用 K 表示, 那么

$$K=\frac{D}{A}=\frac{A-a}{A}=1-\frac{a}{A}.$$

相对误差常用百分比表示, 因此

$$K=\frac{D}{A}\times 100\%.$$

在许多实际工作中, 真值不容易知道, 就用近似值代替真值来计算近似值的相对误差, 即 $K=\frac{D}{a}\times 100\%$.

例 8 计算下列各小题中的相对误差

$$(1) A=49, a=48.65$$

$$(2) a=2.35\times 10^3, D=30$$

解 (1) $K=\frac{D}{A}=\frac{A-a}{A}=\frac{49-48.65}{49}=\frac{0.35}{49}\approx 0.0071=0.71\%.$

$$(2) K=\frac{D}{a}=\frac{30}{2.35\times 10^3}\approx 0.0128=1.28\%.$$

课题 5 近似值的表示

如何表示一个近似值呢? 我们总希望在写出近似值的同时, 还能看出它的误差. 近似值的表示方法一般有两种: 一种是直接表示法, 即指出绝对误差界; 一种是数位法, 即用精确度和有效数字来表示.

1. 直接法

(1) 绝对误差界

在许多实际情况下, 一些量的准确值是无法得知的, 则其近似值的绝对误差也就无法确定. 不过根据各种问题的实际情况, 总可以估计出 D 的范围, 即可以定出一个尽可能小的正数 Δ , 使 $|D|\leq\Delta$.

一般地,如果能够求出适合不等式

$$|D| = |A - a| \leq \Delta$$

的正数 Δ , 那么正数 Δ 就叫作近似值 a 的绝对误差界.

显然 $a - \Delta \leq A \leq a + \Delta$, 这里 $a - \Delta$ 叫作真值 A 的下界; $a + \Delta$ 叫作真值 A 的上界.

例 9 用一杆最小刻度是一毫米的尺子去量一段钢管的长度, 量得尺寸为 63.4 厘米. 求这一段钢管实际长度的绝对误差界和上界与下界.

解 因读数误差一般不会超过尺子最小刻度 1 毫米的一半, 即绝对误差界为尺子最小刻度的一半 0.5 毫米, 所以

钢管实际长度的绝对误差界为 $\Delta = 0.5$ 毫米 $= 0.05$ 厘米.

又因为 $a = 63.4$ 厘米, 所以

$$a - \Delta = 63.4 - 0.05 = 63.35 \text{ 厘米}, a + \Delta = 63.4 + 0.05 = 63.45 \text{ 厘米}.$$

得钢管实际长度的上界是 63.45 厘米, 下界是 63.35 厘米.

我们度量一个量, 如果只测得它的近似值, 而不知道它的真值的话, 则可以确定它的绝对误差不会超过度量工具上最小单位的一半.

近似值的直接表示法是: $A \approx a (\pm \Delta)$.

上面例 9 中测量钢管长度近似值的直接表示法是: $A \approx 63.4 (\pm 0.05)$ 厘米.

在工程技术中, 常用这形式表示对产品的规格要求. 例如, 某零件在图纸上标注 $\varnothing 50 (\pm 0.5)$ 或写成 $\varnothing 50 \pm 0.5$ (国标规定单位是毫米), 就是要求成品的直径不得小于下界 49.5 毫米, 也不得大于上界 50.5 毫米. 否则就是废品零件.

(2) 相对误差界

通常准确值不能得到, 绝对误差 D 就无法求出, 相对误差也无法确定. 因此, 在实际工作中应用相对误差界这一概念.

如果用 Δ 表示近似值 a 的绝对误差界, 我们把 Δ 与近似值 a 的绝对值 $|a|$ 之比叫作近似值 a 的相对误差界, 用 δ 表示. 即

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}.$$

相对误差界常用百分比表示.

例 10 (1) 用最小刻度为厘米的卷尺测得一桥的长度为 49.57 米; (2) 用最小刻度为毫米的钢尺测得一机器轴的直径为 98.5 毫米. 问这两次测得的相对误差界各是多少?

解 (1) 据题意, 得 $\Delta = 0.5$ 厘米, $a = 49.57$ 米 $= 4957$ 厘米, 那么 $\delta = \frac{\Delta}{|a|} = \frac{0.5}{4957} \approx 0.0001 = 0.01\%$;

(2) 据题意, 得 $\Delta = 0.5$ 毫米, $a = 98.5$ 毫米, 那么 $\delta = \frac{\Delta}{|a|} = \frac{0.5}{98.5} \approx 0.0051 = 0.51\%$.

从本例可见, 测桥长度的绝对误差界比测机器轴直径的绝对误差界大, 但桥本身的长度比机器轴直径长度大得多, 所以相对误差界反而较小.

2. 数位法

(1) 精确度

一个量的真值为 A , 它的近似值为 a , 近似值 a 的绝对误差为 $D = A - a$. 当 $D > 0$ 时, 称 a