数学分析习题课教程

shuxuefenxi xitike jiaocheng

主编 卞秋香 蒋家尚 孙 波 李传贞

苏州大学出版社
Soochow University Press

数学分析习题课教程

主　编　卞秋香　蒋家尚
孙　波　李传贞

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题课教程 / 卞秋香等主编. —苏州：苏州大学出版社，2017.6
ISBN 978-7-5672-1965-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①卞… Ⅲ.①数学分析—高等学校—教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 306637 号

数学分析习题课教程
卞秋香　蒋家尚　孙　波　李传贞　主编
责任编辑　征　慧

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006)
丹阳市兴华印刷厂印装
(地址：丹阳市胡桥镇　邮编：212313)

开本 787 mm×1 092 mm　1/16　印张 21.25　字数 495 千
2017 年 6 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1965-6　定价：42.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址　http://www.sudapress.com

编委会名单

主　编： 卞秋香　蒋家尚
孙　波　李传贞

编　委：（排名不分先后）
卞秋香　蒋家尚　孙　波　李传贞
花小琴　赵桂华　黄青鹤　吴颉尔
孟义平　杨　帆　夏良云　沈启庆
伊士超　杨　晶　张　勇　赵　娜

preface

前　言

数学分析是数学类专业最重要的一门基础课，在如何培养学生具备良好数学素养方面起着非常重要的作用，甚至可能会影响学生一生的思维方式。习题课是数学分析课程教学的重要组成部分，是学生掌握及拓展知识的关键环节。它能使学习者理顺和巩固所学内容，并在解题过程中扩展思路，培养学生的数学思维能力。

本教程为数学分析习题课所编写，其内容体系参照教材《数学分析(第四版)》(华东师范大学出版社出版)。本教程吸取了国内外多种相关资料的研究成果以及参编教师的习题课讲稿，适用于各个层次的数学分析学习者，对报考硕士研究生的读者亦有一定的帮助，也可作为数学分析教师的教学参考书。

本教程按章编写，每一章主要包括以下五个部分的内容：

1. 目的要求

根据数学分析课程教学的基本要求，让读者分层次明晰各章内容的目的与要求。

2. 内容提要

包括主要的定义、定理及结论，并给出编者在教学过程中总结出的一些计算方法及计算方式。

3. 复习提问

提供教师与学生在习题课上的交流内容，包括对一些概念的理解、辨析，一些定理使用的注意事项及一些较难计算的问题等。

4. 例题分析

例题中有基本概念的讨论，有利用基本方法的计算或证明题，也有较灵活的综合题，深入浅出，逐步介绍各种解题方法与技巧，有助于读者掌握各章重点。

5. 自测题

分 A，B 两个层次，A 层次的练习题以基本题为主，B 层次的练习题难度较大，读者可以根据自身情况选择适合自己的练习题进行练习。

本教程的最后还附上了综合练习，根据数学分析三个学期的课程内容，每学期给出 5 套综合测试卷，共 15 套测试卷，每套需用时两小时左右，便于读者巩固所学内容并找出自身薄弱环节。

本教程的编写得到了江苏科技大学教务处和理学院领导的大力支持和帮助，同时还得到了理学院全体数学教师的关心与协助，在此表示衷心的感谢。

虽然各位编者竭尽全力，但书中难免有不足和错误之处，诚挚地希望同行和读者给予批评指正。

编　者

2016.11

contents

目 录

第1章 实数集与函数

CHAPTER 1

一、目的要求

1. 理解实数的连续性、有序性、稠密性、阿基米德性质、实数对四则运算和正实数的开方运算的封闭性.

2. 掌握无限集、有界集、无界集、邻域的概念及确界的定义和确界原理.

3. 理解函数的概念，掌握函数的表示法及其有界性、单调性、奇偶性与周期性.

4. 掌握基本初等函数的性质和图形，理解复合函数、反函数和分段函数的概念以及反函数存在的必要条件与充分条件.

5. 掌握初等绝对值不等式的证明技巧，能够证明简单函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性.

二、内容提要

1. 实数及其性质

(1) 可用分数形式$\frac{p}{q}$(p,q为整数，$q\neq 0$)表示的数称为有理数，其也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示；而无限十进不循环小数称为无理数. 有理数和无理数统称为实数.

(2) 对$\forall a,b\in\mathbf{R}$，有$a\pm b,ab,\frac{a}{b}(b\neq 0)\in\mathbf{R}$.

(3) 对$\forall a,b\in\mathbf{R}$，必满足：$a<b,a=b,a>b$三种关系之一.

(4) 若$a>b,b>c$，则$a>c$.

(5) 实数的阿基米德性：对$\forall a,b\in\mathbf{R}$，若$b>a>0$，则存在正整数n，使得$na>b$.

(6) 实数的稠密性：对任意$a,b\in\mathbf{R}$，若$a\neq b$，则a与b之间必存在另一个实数$c\in\mathbf{R}$.

(7) 对$a,b\in\mathbf{R}$，若$a\neq b$，则a与b之间既有有理数，也有无理数.

(8) 实数集$\mathbf{R}$与数轴上的点可建立一一对应关系.

(9) 实数的绝对值性质：

(a) $|a|=|-a|\geqslant 0$，当且仅当$a=0$时，$|a|=0$.

(b) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(c) $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$；$|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h(h>0)$.

(d) 对$\forall a,b\in\mathbf{R}$，有$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$(三角不等式).

(e) $|ab|=|a||b|$.

(f) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$.

(10) $a=b\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0, |a-b|<\varepsilon$.

2. 邻域的概念

设 $a\in\mathbf{R},\delta>0$,称满足 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 的集合为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a;\delta)$,即

$$U(a;\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=(x-\delta,x+\delta),$$

而点 a 的 δ 空心邻域定义为

$$U^{\circ}(a;\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

3. 有界数集与确界原理

(1) 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集.

S 为有上界的数集 $\Leftrightarrow\exists M\in\mathbf{R}$,对 $\forall x\in S$,有 $x\leqslant M$;

S 为有下界的数集 $\Leftrightarrow\exists L\in\mathbf{R}$,对 $\forall x\in S$,有 $x\geqslant L$;

S 为有界集 $\Leftrightarrow S$ 是既有上界又有下界的数集 $\Leftrightarrow\exists M>0$,对 $\forall x\in S$,有 $|x|\leqslant M$.

(2) S 为无界集 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall M>0,\exists x_0\in S$,有 $|x_0|>M$.

(3) 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个非空数集. 若数 η 满足:

(ⅰ) 对 $\forall x\in S$,有 $x\leqslant\eta$(η 是 S 的上界),

(ⅱ) 对 $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in S$,使 $x_0>\eta-\varepsilon$(η 是 S 的最小上界),

则称数 η 为 S 的上确界,记为 $\eta=\sup S$.

若数 ξ 满足:

(ⅰ) 对 $\forall x\in S$,有 $x\geqslant\xi$(ξ 是 S 的下界),

(ⅱ) 对 $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in S$,使 $x_0<\xi+\varepsilon$(ξ 是 S 的最大下界),

则称数 ξ 为 S 的下确界,记为 $\xi=\inf S$.

上、下确界统称为确界.

(4) 确界原理:设 S 为非空数集. 若 S 有上界,则 S 必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界.

4. 函数的概念和具有某些特性的函数

(1) 函数的定义、函数的定义域和值域、反函数的定义和反函数存在定理、函数的代数运算、复合函数的定义、六种基本初等函数及初等函数的定义.

(2) 函数的特性:有界性、单调性、奇偶性及周期性.

三、复习提问

1. 若数集 S 有上界,上界是唯一的吗? 对下界呢?

答:不唯一,有无穷多个. 下界也是.

2. 设 $\eta=\sup S$,下列说法是否正确?

(1) η 是 S 的上界;

(2) η 是 S 的最小的上界;

(3) η 一定属于数集 S;

(4) η 一定不属于数集 S.

答:(1)和(2)正确,(3)和(4)不正确.

3. 任意两个函数都可以复合吗?

答:不是任意两个函数都可以复合.例如,$y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合为 $y=\ln(-x^2)$.

四、例题分析

例 1 设 $S=\left\{x_n=\dfrac{n}{n+1}\right\}$,证明:$\sup S=1,\inf S=0$.

证 只证 $\sup S=1$.

(ⅰ) 对 $\forall n\in\mathbf{N}$,有 $x_n=\dfrac{n}{n+1}<1$,即 1 为 S 的上界;

(ⅱ) 对 $\forall 0<\varepsilon<1$,要证 $\dfrac{n}{n+1}>1-\varepsilon$,只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$,所以,$\exists n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1,x_{n_0}\in S$,有 $x_{n_0}>1-\varepsilon$.于是 $\sup S=1$.

同理可证,$\inf S=0$.

例 2 证明:数集 E 有最大数 a,即若对 $\forall x\in E$,有 $x\leqslant a$,则 $\sup E=a$.

证 根据确界原理,$\sup E$ 存在.因为

(ⅰ) 对 $\forall x\in E$,有 $x\leqslant a$;

(ⅱ) 对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $x_0=a\in E$,使得 $x_0>a-\varepsilon$.由上确界的定义有 $\sup E=a$.

例 3 设 $E=\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\middle| n=1,2,\cdots\right\}$,指出 E 的上确界与下确界,并验证.

解 $E=\left\{0,1,0,\dfrac{2}{4},\dfrac{2}{6},0,\dfrac{2}{8},\cdots\right\}$,$\sup E=1,\inf E=0$.

(1) 验证 $\sup E=1$.对 $\forall x\in E$,有 $x\leqslant 1$.又对 $\forall\varepsilon>0$,取 $x_0=1\in E$,则 $x_0>1-\varepsilon$.于是,$\sup E=1$.

(2) 验证 $\inf E=0$.对 $\forall x\in E$,有 $x\geqslant 0$.又对 $\forall\varepsilon>0$,取 $x_0=0\in E$,则 $x_0<0+\varepsilon$.于是,$\inf E=0$.

例 4 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=3x-x^3$;

(2) $f(x)=3^{-x}(1+3^x)^2$.

解 (1) 因为

$$f(-x)=-3x+x^3=-f(x),$$

所以 $f(x)=3x-x^3$ 是奇函数.

(2) 因为

$$f(-x)=3^x(1+3^{-x})^2=3^x\cdot 3^{-2x}(1+3^x)^2=3^{-x}(1+3^x)^2=f(x),$$

所以 $f(x)=3^{-x}(1+3^x)^2$ 是偶函数.

例 5 验证函数 $f(x)=\dfrac{5x}{2x^2+3}$ 在 $\mathbf{R}$ 内有界.

证 *方法一* 由 $2x^2+3=(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3})^2\geqslant 2|\sqrt{2}x\cdot\sqrt{3}|=2\sqrt{6}|x|$ 知,当 $x\neq 0$ 时,有

$$|f(x)|=\left|\frac{5x}{2x^2+3}\right|=\frac{5|x|}{2x^2+3}\leqslant\frac{5|x|}{2\sqrt{6}|x|}=\frac{5}{2\sqrt{6}}\leqslant 3.$$

又$|f(0)|=0\leqslant 3$,所以,对$\forall x\in\mathbf{R}$,总有$|f(x)|\leqslant 3$,即 $f(x)$在$\mathbf{R}$内有界.

方法二　令 $y=\dfrac{5x}{2x^2+3}$,则关于 x 的二次方程 $2yx^2-5x+3y=0$ 有实数根.从而,有

$\Delta=5^2-24y^2\geqslant 0$,解得 $y^2\leqslant\dfrac{25}{24}\leqslant 4$.

于是,有$|f(x)|=|y|\leqslant 2$,即 $f(x)$在$\mathbf{R}$内有界.

例 6　确定函数 $f(x)=2x+\sin x$ 的单调性.

解　首先,有

$$f(x_2)-f(x_1)=2x_2+\sin x_2-2x_1-\sin x_1=2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1.$$

因为

$$|\sin x_2-\sin x_1|=2\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|=|x_2-x_1|,$$

所以,当 $x_2>x_1$ 时,有$-(x_2-x_1)<\sin x_2-\sin x_1<x_2-x_1$,从而

$$2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1>2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)=x_2-x_1>0,$$

即 $f(x_2)-f(x_1)>0$,于是 $f(x)=2x+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调递增函数.

例 7　设 $y=f(x)$是以 2π 为周期的函数,当$-\pi\leqslant x<\pi$ 时,$f(x)=x$,试求函数 $f(x)$的表达式.

解　由于 $y=f(x)$是以 2π 为周期的函数,且当$-\pi\leqslant x<\pi$ 时,$f(x)=x$,故对任意整数 k,当$-\pi+2k\pi\leqslant x<\pi+2k\pi$ 时,函数的曲线是斜率为 1、截距为$-2k\pi$ 的直线上的一段,即当$-\pi+2k\pi\leqslant x<\pi+2k\pi$ 时,$f(x)=x-2k\pi$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

例 8　设函数 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2}}$,求:

(1) $f(x)$的定义域;　(2) $\dfrac{1}{2}(f(f(x)))^2$.

解　(1) $f(x)=\sqrt{x+|x|}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{2x}, & x>0,\end{cases}$ 所以 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) $f(f(x))=\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x^2}}+\sqrt{(\sqrt{x+\sqrt{x^2}})^2}}=\sqrt{2\sqrt{x+\sqrt{x^2}}}=\sqrt{2f(x)}$,

所以,$\dfrac{1}{2}(f(f(x)))^2=f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2}}$.

例 9　已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,(-1<x\leqslant 0)$,求 $f^{-1}(x)$.

解　由 $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,(-1<x\leqslant 0)$知$\begin{cases}4-x^2=4y^2,\\ x\leqslant 0,\end{cases}$解得 $x=-2\sqrt{1-y^2}$,互换 x,y 得

$y=-2\sqrt{1-x^2}$.当$-1<x\leqslant 0$ 时,$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.因此

$$f^{-1}(x)=-2\sqrt{1-x^2},x\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right].$$

五、自测题

A 组

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\geqslant 10, \\ f(f(x+5)), & x<10. \end{cases}$ 求 $f(5)$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$ 和 $\varphi(x)=\begin{cases} 4-x^2, & |x|\leqslant 2, \\ 2, & |x|>2. \end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$.

3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数,求 $f\left(\dfrac{1}{2}g(3x)\right)$ 的反函数.

4. 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,且 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,求 $g(x)$.

5. 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+f(|\sin x|-2)\operatorname{sgn}(\sin x)(a>0,a\neq 1)$;

(2) $f(x)=xe^{\cos x}\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $f(x)=\begin{cases} 1-2^{-x}, & x\geqslant 0, \\ 2^x-1, & x<0. \end{cases}$

6. 设 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$(其中 a,b,c 是整数)是奇函数,且在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,$f(1)=2$,$f(2)<3$,求 a,b,c 的值.

7. 已知函数 $y=\begin{cases} x^2, & -1\leqslant x<0, \\ \ln x, & 0<x\leqslant 1, \\ 2e^{x-1}, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$ 求其反函数及定义域.

8. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $|a|f(x)+|b|f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x(|a|\neq|b|)$,求 $f(x)$.

9. 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,存在常数 $c\neq 0$,使得 $f(x+c)=-f(x)$,证明 $f(x)$ 是周期函数.

10. 设 $f(x),g(x)$ 为区间 (a,b) 上的递减函数,令

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}, G(x)=\min\{f(x),g(x)\}.$$

证明:$F(x),G(x)$ 都是区间 (a,b) 上的递减函数.

11. 设函数 $f(x)$ 满足关系 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,试证:

(1) $f(0)=0$;

(2) $f(nx)=nf(x)$,其中 n 为自然数.

12. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,若存在 $x^*\in\mathbf{R}$,使得 $f(x^*)=x^*$,则称 x^* 为 $f(x)$ 的不动点. 证明:若 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点,则 $f(x)$ 也存在唯一的不动点.

13. 证明:$\sqrt{2}$ 是满足不等式 $r^2>2$ 的所有正有理数的下确界.

14. 设 A 与 B 是数轴上位于原点右方的非空有界数集,记 $AB=\{xy\mid x\in A, y\in B\}$,证明:$\sup AB=\sup A\cdot\sup B$.

15. 证明有界数集的上、下确界唯一.

B 组

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x^2-1, & x\geqslant 1\end{cases}$ 和 $g(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求 $f(f(x))$ 的定义域.

3. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $h(x)=\lg x$,求 $f(g(h(x)))$ 的定义域.

4. 求函数 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, & x<-2,\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 1-(x-2)^2, & x>2\end{cases}$ 的反函数.

5. 设 $f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=2f(x)+x$,求函数 $f(x)$.

6. 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots(x)))}_{n次}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)$.

7. 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x\,(x\neq 0,1)$,求 $f(x)$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$f(x)\neq 0$,$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$,试求 $f(1985)$.

9. 设函数 $f(x)$ 适合 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$($a,b,c$ 均为常数),且 $|a|\neq|b|$,试证:$f(-x)=-f(x)$.

10. 证明:狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$

以任意有理数为周期.

11. 证明:若函数 $f(x)\,(-\infty<x<+\infty)$ 满足等式

$$f(x+T)=kf(x),$$

式中 k 和 T 为正常数,则 $f(x)=a^x\varphi(x)\,(a>0)$,其中 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的周期函数.

12. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上,如果对任意的 $x_1,x_2\in I$ 及 $\lambda\in(0,1)$,恒有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

证明:$f(x)$ 在区间 I 的任何闭子区间上有界.

13. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的严格单调递增函数,且恒有 $f(f(f(x)))=f(x)$,证明:$f(x)=x$.

14. 证明:一切有理真分数 $\dfrac{m}{n}$(式中 m 及 n 为正整数,且 $0<m<n$)的集合无最小及最大元素,并求此集合的上确界及下确界.

15. 设 $f(x)$,$g(x)$ 为 D 上的非负有界函数.证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$;

(2) $\sup\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$.